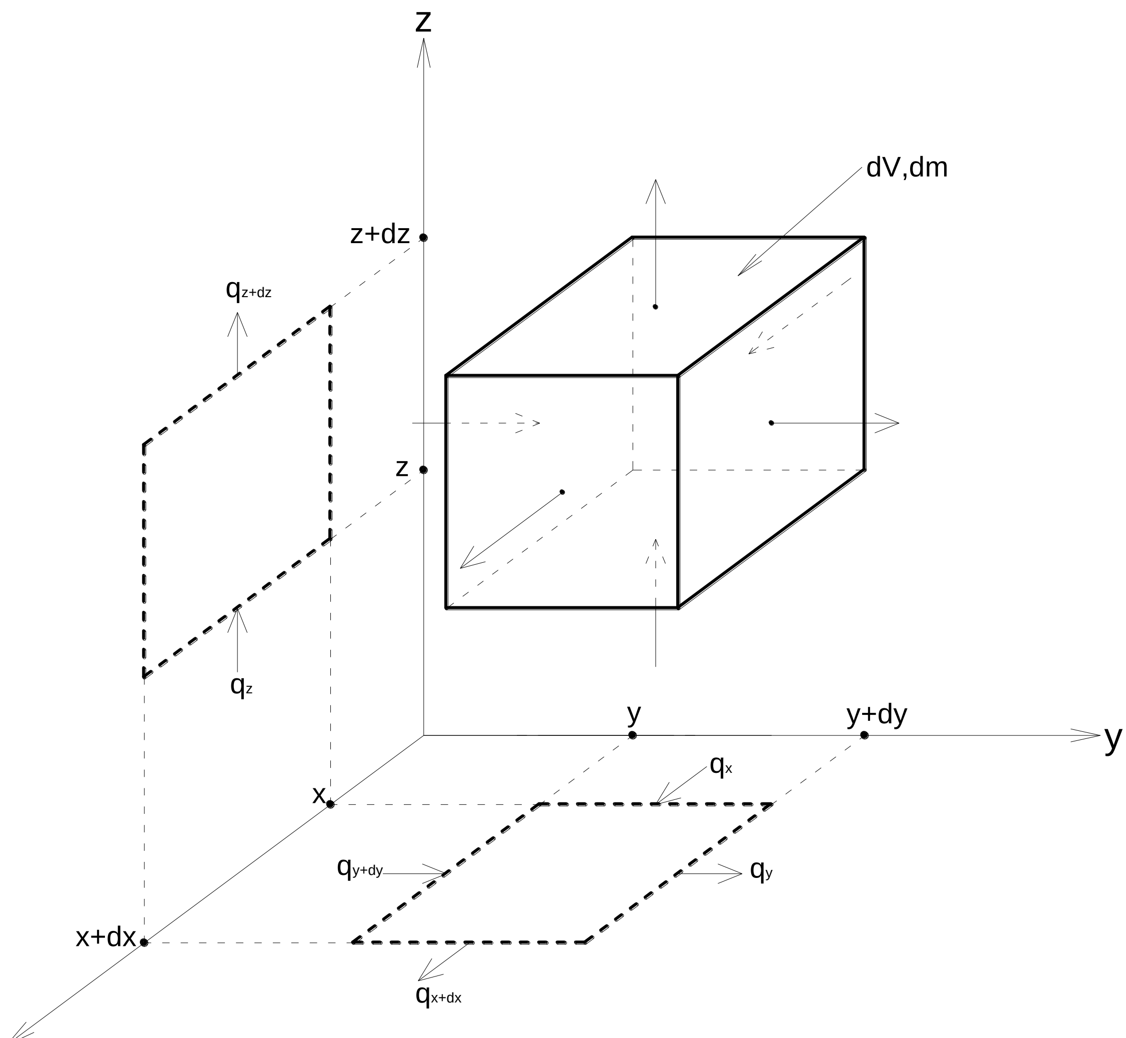
1.1 Nestacionarna Furijeova jednačina provođenja toplote

Izvodimo jednačinu koja opisuje vremenski promenjiva temperaturska polja. Posmatramo beskonačno mali deo sredine, zapremine dV i mase dm u obliku paralelopipeda i uočavamo toplotne flukseve kroz svaku njegovu površ.



Izvođenje jednačine se svodi na pisanje bilansnih jednačina za provođenje toplote kroz uočenu zapreminu za sva tri pravca: x, y i z. To znači pisanje izraza za toplotu koja ulazi kroz jednu površ, a izlazi kroz njoj paralelnu drugu površ, i tako za sva tri pravca. (Na slici to su gustine toplotnih flukseva: q_x, q_{x+dx}, q_y, q_{y+dy}, q_z, q_{z+dz} gde su indeksi koordinate paralelnih površi.)

Tražimo bilans toplote duž x ose. Toplota koja ulazi u paralelopiped kroz površ koordinate x iznosi:

$$\boxed{\delta Q_x = q_x dydzd\tau}$$

($dydz = ds$, $d\tau -$ beskonačno malo vreme) ($q \overset{def}{=} \dfrac{\Delta Q}{\Delta S \Delta \tau} = \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta S} \Rightarrow \Delta Q = q \Delta S \Delta \tau$)

Toplota koja izađe kroz naspramnu paralelnu površ sa koordinatom $x+dx$ iznosi:

$$\boxed{\delta Q_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau}$$

Gde su q_x i q_{x+dx} gustine toplotnih flukseva kroz te površi, i one mogu biti konačne. Analogno za ostale pravce imamo:

$$\boxed{\delta Q_y = q_y dxdzd\tau}, \boxed{\delta Q_{y+dy} = q_{y+dy} dxdzd\tau}$$

$$\boxed{\delta Q_z = q_z dxdyd\tau}, \boxed{\delta Q_{z+dz} = q_{z+dz} dxdyd\tau}$$

Sada koristimo Furijeov zakon koji povezuje gustinu toplotnog fluksa i temperaturu.

Za gustine duž x ose imamo:

$$q_x = -\lambda_x \left.\frac{dt}{dx}\right|_x,\ q_{x+dx} = -\lambda_{x+dx} \left.\frac{dt}{dx}\right|_{x+dx}.$$

Ovde predpostavljamo da je koeficijent toplotne provodnosti anizotropan i najopštije funkcija koordinata, $\lambda = \lambda(x,y,z)$.

Akumulacija toplote u paralelopipedu koja je posledica razlike dovedene i odvedene toplote je:

$$\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = (q_x - q_{x+dx}) dydzd\tau = (-\lambda_x \left.\frac{dt}{dx}\right|_x + \lambda_{x+dx} \left.\frac{dt}{dx}\right|_{x+dx}) dydzd\tau$$

Gradijenti temperature $\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x+dx}, \left.\frac{dt}{dx}\right|_x$ se razlikuju za beskonačno malu vrednost jer su tačke u kojima se izračunavaju beskonačno bliske pa im je razlika beskonačno mali broj kojeg ćemo uobičajno označiti sa $d\left(\lambda_x \frac{dt}{dx}\right)$. Dakle $\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = d\left(\lambda_x \frac{dt}{dx}\right) dydzd\tau$. Dalje proširenjem sa dx dobijamo: $\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = \frac{d\left(\lambda_x \frac{dt}{dx}\right)}{dx} dxdydzd\tau = \frac{d\left(\lambda_x \frac{dt}{dx}\right)}{dx} dVd\tau$, $dV = dxdydz$. Konačno akumulirana toplota u paralelopipedu usled njenog strujanja duž x ose je:

$$\boxed{\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = \frac{d}{dx}\left(\lambda_x \frac{dt}{dx}\right) dVd\tau}$$

Analogno za y i z pravac imamo:

$$\boxed{\delta Q_y - \delta Q_{y+dy} = \frac{d}{dy}\left(\lambda_y \frac{dt}{dy}\right) dVd\tau}, \boxed{\delta Q_z - \delta Q_{z+dz} = \frac{d}{dz}\left(\lambda_z \frac{dt}{dz}\right) dVd\tau}$$

Sabiranjem sva tri bilansa dobijamo ukupnu akumulaciju toplote u paralelopipedu:

$$\delta Q = \left(\delta Q_x - \delta Q_{x+dx}\right) + \left(\delta Q_y - \delta Q_{y+dy}\right) + \left(\delta Q_z - \delta Q_{z+dz}\right)$$

$$\delta Q = dVd\tau \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) + \frac{d}{dy}\left(\lambda \frac{dt}{dy} \right) + \frac{d}{dz}\left(\lambda \frac{dt}{dz} \right) \right)}_{\text{Laplasovizvod } \nabla^2 t} ; t = t(x,y,z,\tau)\,, \lambda = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda(x,y,z)$$

Sa druge strane $\delta Q \overset{def}{=} dm \cdot C \cdot dt$, $Q = mc\Delta t$, $\delta Q = \rho dVcdt$, $dm = \rho dV$

Dakle imamo: $\rho dVcdt = dVd\tau \left(\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) + \frac{d}{dy}\left(\lambda \frac{dt}{dy} \right) + \frac{d}{dz}\left(\lambda \frac{dt}{dz} \right) \right)$,

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\rho c}\left(\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) + \frac{d}{dy}\left(\lambda \frac{dt}{dy} \right) + \frac{d}{dz}\left(\lambda \frac{dt}{dz} \right) \right)}$$

Ovo je Furijeova jednačina nestacionarnog provođenja toplote za slučaj kada je $\lambda = \lambda(x,y,z)$. Za slučaj homogenih i izotropnih materijala $\lambda = const$, pa se λ može izvući ispred prvih izvoda:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{d^2t}{dy^2} + \frac{d^2t}{dz^2} \right)$$

Operator drugih izvoda kraće obeležavamo sa $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ i naziva se Laplasov operator ili Laplasijan, a oznaka ∇^2 se čita "nabla na kvadrat". Dakle Furijeova jednačina nestacionarnog provođenja toplote glasi:

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{\rho c}\nabla^2 t}$$

Fizički smisao jednačine kaže da je brzina promene temperature $\frac{dt}{dx}$ srazmerna Laplasijanu temperature. Furijeova jednačina se za tela pravilnog oblika se može rešiti u analitičkom obliku (tj. preko matematičkih funkcija), a za tela nepravilnih oblika putem numeričke analize i kompjuterskih programa specijalno pisanih za ovu vrstu jednačina.

Ako unutar tela postoje toplotni izvori i ponori onda se Furijeova jednačina modifikuje gustinom toplotnog fluksa izvora (ponora) $q_i(x,y,z,\tau)$ na sledeći način:

$$\boxed{\frac{dt(x,y,z,\tau)}{d\tau} = \frac{\lambda}{\rho c}\nabla^2 t(x,y,z,\tau) + \frac{q_i(x,y,z,\tau)}{\rho c}} \qquad \lambda = const$$

Funkcija izvora q_i opisuje koliko Džula toplote u jednoj sekundi u $1m^3$ emituje izvor (apsorbuje ponor). Jedinica joj je W/m^3. Iako nestacionarna, Furijeova jednačina se koristi za rešavanje stacionarnih probleme jednostavnim stavljanjem da je $\frac{dt}{d\tau} = 0$. Za ovaj slučaj je: $\frac{\lambda}{\rho c}\nabla^2 t = 0$, tj. $\nabla^2 t = 0$.

Na primer za ravan zid imamo, $\frac{d^2t(x)}{dx^2} = \frac{d(dt/dx)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = const = c_1$. Integracijom dobijamo $t(x) = c_1 \cdot x + c_2$. Konstante određujemo iz temperatura na površinama zida.