

GRAĐEVINSKA FIZIKA

Building physics (EU) ; Building science (USA)

Pripada oblasti primenjene fizike. Bavi se analizom i kontrolom fundamentalnih procesa koji utiču na **termičke, svetlosne i akustičke** osobine:

- građevinskih objekata ili njihovih delova
- materijala koji se ugrađuju

Fizički procesi od interesa za građevinarstvo su:

- transport toplote, vazduha i vlage
- prostiranje svetlosti
- prenos zvuka (buke)

Građevinska fizika se bavi optimizacijom osobina i predviđanjem ponašanja građevinskih objekata i materijala u odnosu na fizičke procese od interesa.

Problematika Građevinske fizike je multidisciplinarna i u njoj učestvuju fizičari, inženjeri, arhitekte i druge profesije (meteorolozi, seizmičari, urbanisti, psiholozi, itd).

Praktični rezultati Građevinske fizike se reflektuju na detalje projektovanja i strukutru termičkog omotača zgrade a jedan od najvažnijih ciljeva je ostvarivanje optimalne potrošnje energije (energetska efikasnost). Takođe razvijaju se novi i unapređuju korišćeni materijali.

1.1 Transport toplote

Toplota je energija koja se razmenjuje između tela i okoline ako su na različitim temperaturama, putem **haotičnih sudara** molekula sistema sa česticama okoline što ima isključivo za posledicu povećanje ili smanjenje srednje kinetičke energije **haotičnog** kretanja molekula sistema i čestica okoline.

Posledica haotičnih sudara može da bude i razmena drugog vida energije, mehaničkog rada, koji se javlja samo ako dolazi do pomeranja granica sistema (širenja ili skupljanja). To ima za posledicu da se deo kinetičke energije haotičnog kretanja molekula transformiše u kinetičku energiju uređenog kretanja molekula okoline (na primer, haotični udari molekula gasa koji pokreću klip neke mašine duž nekog pravca).

Važno je primetiti da tela ne poseduju toplotu. Termin toplota je rezervisan za proces prenosa energije između sistema i okoline. Energija koju poseduju tela se naziva **unutrašnja energija** i sačinjavaju je **kinetičke energije haotičnog** kretanja molekula (translatorno, rotaciono i vibraciono).

Toplotu, kao vid energije, treba razlikovati od temperature koja ne predstavlja nikakvu energiju.

Temperatura je makroskopski fizički parametar pomoću koga se izračunava srednja kinetička energija haotičnog kretanja atoma a time i ukupna unutrašnja energija tela.

Zato se kaže da je **temperatura mera unutrašnje energije tela**. Srednja kinetička energija i temperatura kod gasova su povezani izrazom $E_k = \frac{j}{2} k_B T$, gde je j -broj stepeni slobode atoma (molekula), k_B -Boltzmanova konstanta.

Transport toplote se u prirodi obavlja preko tri osnovna procesa:

1. **Provođenjem (kondukcijom)**
2. **Prelazom (konvekcijom; može biti prirodna/slobodna ili prinudna)**
3. **Zračenjem (radijacijom)**

Provođenje je proces prenosa toplote kod koga nema strujanja ili usmerenog kretanja molekula već se energija prenosi isključivo haotičnim sudarima atoma. Unutar čvrstih tela atomi su vezani jakim hemijskim vezama pa se kroz njih toplota transportuje provođenjem. Kod fluida (gasova i tečnosti) provođenje toplote prati strujanje jer postoji gradijent temperature a time i promena gustine supstance što dovodi do pojava sila potiska.

Prelaz toplote se dešava ako je čvrsto telo u kontaktu sa sredinama drugog agregatnog stanja (gas-čvrsto telo, tečnost-čvrsto telo). Tu postoji slobodno ili prinudno strujanje fluida na kontaktu sa telom pa se razmena toplote obavlja sa fluida u kretanju na čvrsto telo i obrnuto što predstavlja potpuno drugi fizički mehanizam od provođenja. Konvekcijom se naziva i prenos toplote sa jednog na drugo mesto unutar istog fluid usled slobodnog (prirodnog) ili prinudnog strujanja.

Zračenje ili radijacija se javlja kod tela svih agregatnih stanja na svim temperaturama i potiče od elektro-magnetnog zračenja samih atoma i molekula usled njihovog termalnog kretanja i sudaranja.

1.2 Temperatursko polje

Ako je u svakoj tački tela ili sredine poznata temperatura onda je definisano temperatursko polje tog tela ili sredine. Matematički, to je funkcija koja svakoj tački tela dodeljuje temperaturu, tj. $t = t(x, y, z, \tau)$ gde su x, y, z prostorne koordinate a τ vreme. Kada t zavisi od vremena za polje kažemo da je nestacionarno, u suprotnom je stacionarno.

Skup tačaka koje imaju istu temperaturu u polju čine izotermu. Izoterma može da bude linija ili površ. Izoterme ne mogu da se seku jer bi u suprotnom u jednoj tački bile definisane dve različite temperature.

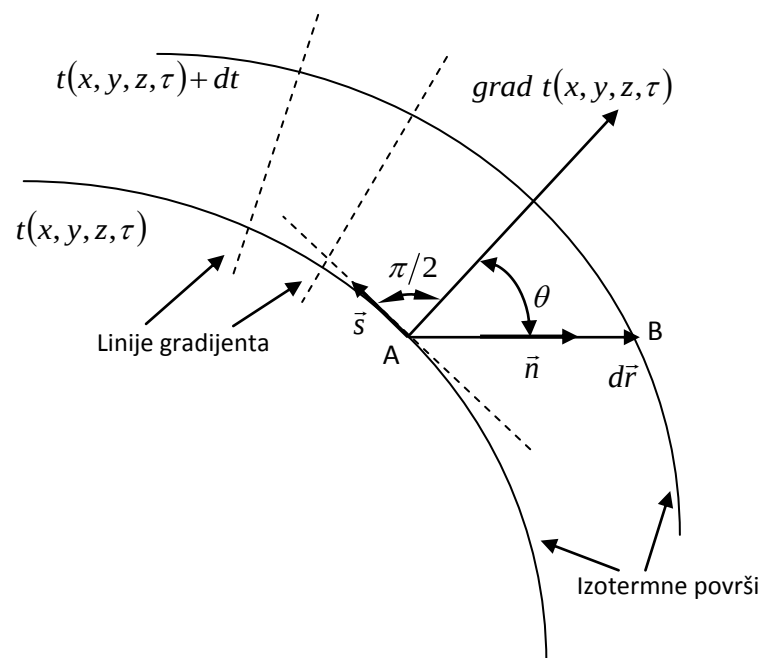
1.2.1 Gradijent temperaturskog polja

Od fizičkog interesa je poznavanje pravca i smera najbržeg porasta temperature posmatrano iz neke tačke polja. Veličina koja ovo opisuje se naziva gradijent temperaturskog polja. Po svojoj prirodi je vektor, i matematički se definiše preko izvoda funkcije temperature po prostornim koordinatama.

$$\text{grad } t(x, y, z, \tau) = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

Pored oznake $\text{grad } t(x, y, z, \tau)$ u literature se koristi i oznaka $\nabla t(x, y, z, \tau)$ gde se operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$$
 naziva nabra operator.



Linije gradijenta su krive kojima je gradijent temperaturskog polja tangenta u svakoj tački polja i ove krive su normalne na izotermalne površi u svakoj tački polja.

Izvod temperature u nekom pravcu definisanom jedinačnim vektorom $\vec{n}$ se definiše na sledeći način:

$$\frac{dt}{dl} = \text{grad } t(x, y, z, \tau) \cdot \vec{n} = |\text{grad } t(x, y, z, \tau)| \cdot \cos \theta; \quad \vec{n} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}; \quad dl = |d\vec{r}|.$$

Ako je pravac prostiranja toplote samo duž x ose gradijent temperaturskog polja se svodi na:

$$\text{grad } t(x, y, z, \tau) = \frac{dt}{dx} \cdot \vec{i},$$

i fizički predstavlja brzinu promene temperature duž x ose. Ako je izvod temperature po koordinati x negativan to znači da temperatura opada u pravcu x ose.

1.3 Furijeov zakon provođenja toplote

Furi je eksperimentalno otkrio zakon provođenja toplote kroz čvrsto telo. Provedena toplota Q između dve paralelne površine unutar tela je direktno srazmerna: razlici njihovih temperatura Δt , površini površi S (S je normalna na pravac provođenja), vremenu provođenja τ i termičkim karakteristikama materijala koji se opisuju koeficijentom toplotnog provođenja λ i obrnuto srazmerna rastojanju između njih Δx :

$$Q = \frac{\lambda \cdot S \cdot \tau \cdot \Delta t}{\Delta x} [J]; \Delta t [^{\circ}C].$$

Koeficijent λ zavisi od vrste materijala, sadržaja vlage u materijalu i temperature. Jedinica mu je W/mK i predstavlja toplotu koja se sa 1 s provede kroz zid debljine 1 m ako je razlika temperatura njegovih površina 1 K. Promene temperature od nekoliko desetina $^{\circ}C$ ne utiču značajno na promenu vrednosti λ .

Ako bi posmatrali beskonačno tanak sloj ravnog zida debljine dx i površine S , onda bi i razlika temperatura na njegovim površinama bila takođe beskonačno mala dt (temperatura se ne menja skokovito), pa bi Furijeov zakon za ovaj slučaj glasio:

$$Q = -\lambda S \tau \frac{dt}{dx}.$$

Veličina dt/dx predstavlja brzinu promene temperature duž pozitivnog smera x ose tj. gradijent temperature u tom pravcu. Znak minus uvodimo jer želimo da je $Q > 0$. Naime toplota spontano struji iz oblasti više u oblast niže temperature pa je $dt < 0$. Dakle

$$Q = -\lambda S \tau \cdot \text{grad } t(x) \cdot \vec{i}$$

je opšti oblik Furijeovog zakona provođenja toplote duž jednog pravca. Vidimo da je provedena toplota srazmerna gradijentu temperature. Kako je gradijent vektor normalan na izotermnu površ zaključujemo da se toplota provodi duž pravca koji je normalan na izoterme tela.

Sada definišimo veličine kojima karakterišemo provođenje toplote:

1. **Toplotni fluks** (brzina protaka toplote): $\Phi = \frac{Q}{\tau} = -\lambda S \frac{dt}{dx} [W]$

2. **Gustina toplotnog fluksa** (brzina protaka toplote / m^2): $q = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \frac{dt}{dx} \left[\frac{W}{m^2} \right]$

Ove veličine su pogodnije za opis od same provedene toplote Q jer prva ne zavisi od vremena provođenja a druga ni od površine zida. Tako da, na primer, gustina toplotnog fluksa daje koliko toplote u sekundi provede m^2 zida što je iznos koji zavisi samo od termičkih karakteristika materijala i razlike temperatura što omogućava poređenje zidova od različitih materijala.

Furi jeovi zakoni provođenja duž jednog pravca izraženi preko fluksa je:

$$\Phi = -\lambda S \frac{dt}{dx} \Rightarrow q = -\lambda \frac{dt}{dx}.$$

U stacionarnim uslovima, toplotni fluks Φ je konstantan pa se prethodna jednačina može prikazati i u integralnoj formi, pri čemu možemo da smatramo da površina S kroz koju toplota difunduje najopštije zavisi od koordinate x i da koeficijent λ zavisi od temperature :

$$\Phi \int_{x_0}^x \frac{dx}{S(x)} = - \int_{t_0}^t \lambda(t) dt.$$

Ukoliko su S i λ konstantni mogu se izvući ispred znaka integrala.

1.4 Toplotne karakteristike materijala

Preko koeficijenta provođenja toplote λ opisuju se veoma složeni fizički procesi prenosa toplote između atoma. Za tečnosti i čvrsta tela dobija se eksperimentalno jer su sudari atoma u ovim sredinama jako složeni.

Čvrsta tela se posmatraju kao kolekcija enormnog broja jona prostorno raspoređenih u kristalnu rešetku i elektrona koji mogu biti slobodni kao kod metala ili vezani za jone kao kod nemetala i izolatora. Haotično oscilovanje jona i kretanje elektrona doprinosi provođenju toplote kada postoji gradijent temperature. Oscilacije jona tj. skup mogućih frekvencija oscilovanja se opisuju kao kretanje hipotetskih čestica, fonona (kvanata oscilovanja). Njihovi sudari predstavljaju sudare jona pri čemu dolazi do razmene energije, tj. toplote. Kod metala sudari slobodnih elektrona su dominantni mehanizmi provođenja, dok kod ostali materijala to su sudari jona kristalne rešetke tj. fonona. Količina toplote koju mogu da prenesu slobodni elektroni sudarima je znatno veća od one prenesene fononima pa su zbog toga metali daleko bolji toplotni provodnici. Vrednost koeficijenta toplotne provodnosti čvrstih tela direktno zavisi od dužine slobodnog puta elektrona d_{sr} (fonona), srednje brzine elektrona v_{sr} (fonona) i zapreminske specifične toplote elektrona (fonona) C :

$$\lambda = \frac{1}{3} C v_{sr} d_{sr}.$$

Kristalni materijali imaju veće vrednosti λ zbog toga što se elektroni i fononi manje haotično kreću pa time imaju veće srednje brzine oscilovanja i prelaze duže puteve između sudara. Najbolji toplotni provodnik je dijamant.

Atomi ili molekuli fluida se znatno haotičnije kreću pa imaju znatno manju toplotnu provodnost. Zbog toga je vazduh zarobljen u šuplinama nekog nemetalnog materijala (opeka, kamena vuna) predstavlja odličan toplotni izolator.

U opštem sličaju λ zavisi od temperature T , pritiska i sadržaja vlage u materijalu H , a za praktične primene u građevinarstvu, određuje se eksperimentalno uz pretpostavku da se menja linearno, kao funkcija temperature i vlažnosti, po formuli:

$$\lambda = \lambda_0 + a(T - T_0) + bH$$

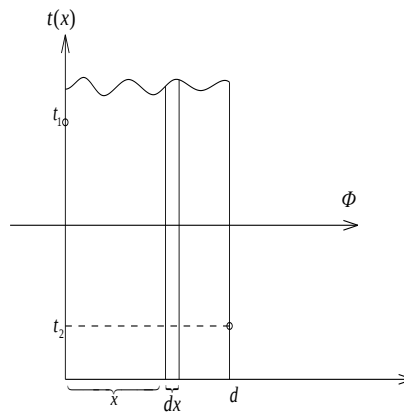
pri čemu je λ_0 –koeficijent termalne provodnosti na temperaturi T_0 , a i b konstante koje se određuju eksperimentalno.

Kako je raspon temperatura u građevinarstvu ograničen, a vrednosti koeficijent a male za građevinske materijale iz grupe nemetala, možemo zanemariti temperatursku zavisnost. Povećanje vlažnosti znatno utiče na vrednost koeficijenta, smanjujući termoizolacione karakteristike hidroskopnih materijala. Na primer toplotna provodnost suve opeke 0,35 W/mK, a opeke zasićene vlagom, čak 1,0 W/mK.

Toplotna provodnost materijala koji se koriste u izgradnji, termoizolacionih i konstrukcionih materijala je između 0,023 W/mK i 2,9 W/mK.

1.5 Provođenje toplote kroz ravan homogen zid

Posmatramo homogen zid debljine d , konstantnog koeficijenta provodnosti λ sa poznatim temperaturama površina t_1 i t_2 . Analiziramo stacionaran slučaj, tj. temperature u svakoj tački zida se ne menjaju u vremenu.



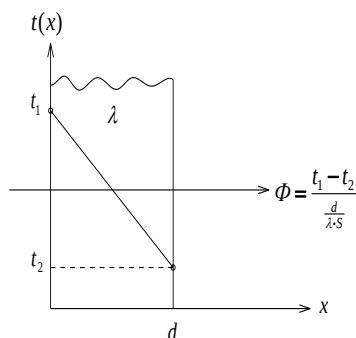
Izvodimo temperatursko polje u zidu i određujemo gustinu fluksa polazeći od Furijeovog zakona. Fluks je konstantan jer su i temperature na površinama zida konstantne. Dakle $\Phi = \frac{Q}{\tau} = \frac{\lambda S(t_1 - t_2)}{d} = \text{const}$. Fluks kroz sloj dx je takođe Φ , razlika temperatura je dt , pa imamo da je:

$$\Phi = -\lambda S \frac{dt}{dx}, \quad \Phi \cdot dx = -\lambda S \cdot dt, \quad \Phi \int_0^x dx = -\lambda S \int_{t_1}^{t(x)} dt, \quad \Phi \cdot (x - 0) = -\lambda S(t(x) - t_1).$$

Odavde dobijamo temperatursko polje $t(x)$:

$$t(x) = t_1 - \frac{\Phi}{\lambda S} \cdot x.$$

Φ određujemo na osnovu zapažanja da za $x = d$, $t(x = d) = t_2$. Zamenom u prethodni izraz imamo $t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{\lambda S} \cdot d$, $\Phi = \lambda S \frac{t_1 - t_2}{d} = \frac{\lambda S}{d} \cdot \Delta t = \frac{\Delta t}{d / \lambda S}$.



Konačno,

$$t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{d} \cdot x$$

Dakle, temperatura se menja linearno kroz zid. Poseban značaj u termici ima količnik $\frac{\Delta t}{\Phi}$, odnos razlike temperatura i fluksa, koji se obeležava obično R_T i naziva termički opor i za slučaj

ravnog zida je:

$$R_T = \frac{\Delta t}{\Phi} = \frac{d}{S\lambda} \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

Dakle termički otpor ravnog homogenog zida je:

$$R_T = \frac{d}{S\lambda} \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

Vidimo da otpor provođenja R_T direktno zavisi od debljine zida d , obrnuto srazmerno od površine S i toplotne provodnosti λ . Dakle zid veće površine ima manji toplotni otpor jer toplota difunduje kroz veću površinu.

Pored termičkog otpora kao karakteristike zida pogodno je imati veličinu koja ne zavisi od njegove površine, već samo od debljine i toplotnih svojstava materijala. Nju nazivamo R vrednost zida i dobijamo je kao količnik razlike temperatura i gustine toplotnog fluksa: $R = \frac{\Delta t}{q} = \frac{d}{\lambda}$, ili preko toplotnog otpora $R = SR_T$.

Dakle R vrednost zida je:

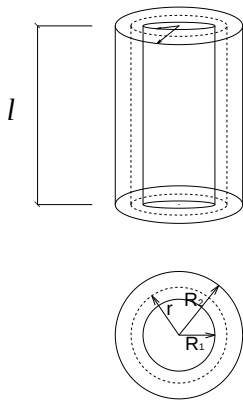
$$R = \frac{d}{\lambda} \left[\frac{\text{m}^2 \text{K}}{\text{W}} \right]$$

Recipročna vrednost od R se naziva **koefficijent toplotne provodnosti zida**:

$$U = \frac{1}{SR_T} = \frac{\lambda}{d} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right]$$

Fizički predstavlja količinu toplote koja se provede za 1s kroz zid površine 1m^2 kada je razlika temperatura njegovih površina $\Delta t = 1\text{K} = 1^\circ\text{C}$.

1.6 Provođenje toplote kroz cilindričan zid



Posmatramo cilindričan zid od homogenog materijala konstantnog koeficijenta toplotne provodljivosti λ , debljine $R_2 - R_1$ sa temperaturama površina t_1 i t_2 . Analiziramo stacionarno (vremenski nepromenljivo) provođenje toplote.

Uočimo koaksijalnu površ unutar zida poluprečnika r . Fluks kroz ovu površ je vremenski konstantan i iznosi

$$\Phi = q \cdot S = -\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r l = \text{const}$$

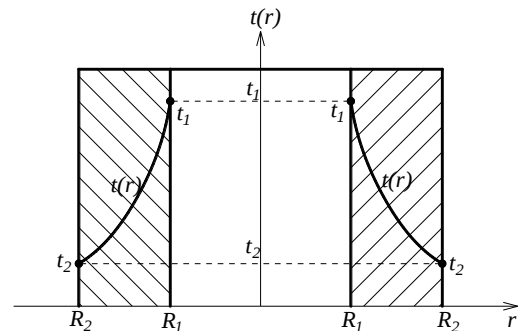
Primitimo da gustina fluksa q kao i površina S zavise od poluprečnika r . Sa porastom r raste S a opada q . Razdvajanjem promenljivih dobijamo:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\lambda l}{\Phi} dt$$

$$\int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\lambda l}{\Phi} \cdot \int_{t_1}^{t(r)} dt, \quad \ln r - \ln R_1 = -\frac{2\pi\lambda l}{\Phi} (t(r) - t_1)$$

$$\ln \frac{r}{R_1} = \frac{2\pi\lambda l}{\Phi} (t_1 - t(r))$$

$$t(r) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r}{R_1}$$



Vidimo da se temperatura menja po logaritamskom zakonu. Toplotni fluks možemo da odredimo jer znamo temperaturu spoljašnje površine zida:

$$t(r = R_2) = t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda l} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [\text{W}]$$

Sada je:

$$t(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}$$

Pošto gustina fluksa q nije konstantna (zavisi od radijalne kooordinate r) kao veličina nije pogodna za procenu termalnih kvaliteta zida. Zato uvodimo podužnu gustinu toplotnog fluksa kao količnik fluksa i visine zida:

$$q_\ell = \frac{\Phi}{l} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}} \right]$$

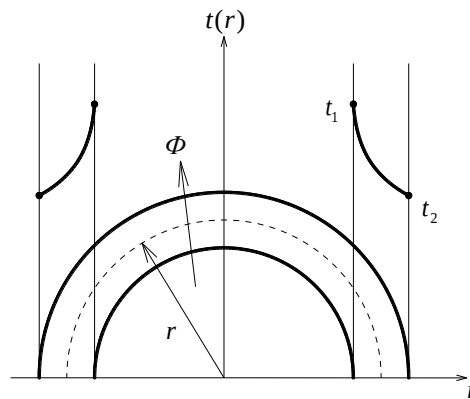
Ovaj izraz daje koliko cilindričan zid (cev) gubi toplote u jednom sekundu na jednom metru dužine. Termički otpor provođenja toplote je količnik razlike temperatura i fluksa:

$$R_T = \frac{1}{2\pi\lambda \ell} \ln \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

Koeficijent toplotne provodnosti U u ovom slučaju se ne može jednoznačno definisati jer površine unutrašnjeg i spoljašnjeg zida nisu jednake.

1.7 Provođenje toplote kroz sferni zid

Posmatramo homogen sferni zid u obliku kupole debljine $R_2 - R_1$, konstantnog koeficijenta toplotne provodljivosti λ u stacionarnom slučaju ($\Phi = \text{const}$).



$$\Phi = \text{const}, \quad \Phi = q \cdot S = -\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r^2$$

Uočili smo koncentričnu kupolu poluprečnika r unutar materijala kroz koju je fluks dat gornjim izrazom. Razdvajanjem promenljivih nalazimo:

$$\frac{dr}{r^2} = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} dt, \quad \int_{R_1}^r r^{-2} dr = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} \int_{t_1}^{t(r)} dt \quad \left. \frac{r^{-1}}{-1} \right|_{R_1}^r = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} (t(r) - t_1), \quad \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} = \frac{2\pi\lambda}{\Phi} (t_1 - t(r)),$$

$$t(r) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)$$

Vidimo da temperatura opada kao $\frac{1}{r}$. Fluks određujemo iz poznate temperature na

$$\text{spoljašnjoj površini:} \quad t(r = R_2) = t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} [\text{W}]$$

Veličina u imeniocu predstavlja termički otpor provođenja kupole.

$$R_T = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\frac{K}{W} \right]$$

U slučaju sfernog zida gustina toplotnog fluksa $q = \Phi/S$ nije konstantna, jer površina S nije ista sa unutrašnje i spoljašnje strane pa se ne definiše. Isto važi i za koeficijent toplotne provodnosti U .

1.8 Konvektivni transport toplote

1.9 Prelaz toplote

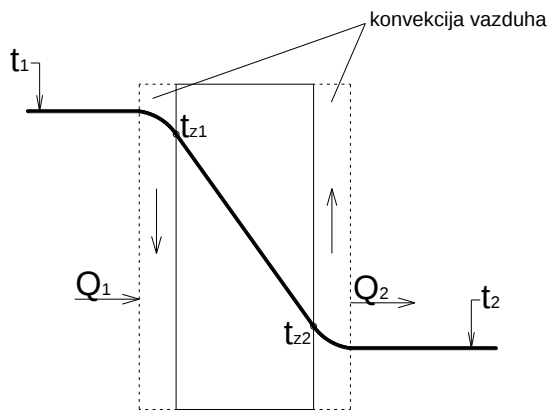
Prelaz toplote je proces razmene toplote između sredina različitih agregatnih stanja praćen *prirodnim* ili *prinudnim* strujanjem fluida. Ako postoji razlika pritisaka u fluidu, koji nije posledica gradijenta temperature, kažemo da je strujanje prinudno i tada imamo prinudnu konvekciju. Dakle kod prinudne konvekcije fluid struji ne samo usled sile potiska već i zbog gradijenta pritiska (na pr. vetra). Prirodnu konvekciju čini struja fluida nastala samo zbog razlike temperatura i može biti laminarna (slojevita) ili turbulentna (vrtložna).

Posebno nas interesuje prelaz toplote između čvrstih tela i gasova i čvrstog tela i tečnosti. Proces, kao što je rečeno, prati tzv. konvektivno strujanje fluida na granici sa čvrstim telom što je posledica promene njegove temperature, time i gustine što uzrokuje pojavu sile potiska. Uz čvrsto telo se formira sloj fluida koji struji što drastično utiče na količinu toplote koja se razmeni. Iz iskustva znamo da veća brzina strujanja doprinosi većoj razmeni toplote, tj. tela se brže hlade ako fluid opstrujava većom brzinom. Ako je brzina strujanja relativno mala, fluid struju laminarno (slojevito) oko tela dok pri većim se javljaju vrtlozi, turbulencije pa kažemo da se radi o turbulentnoj konvekciji.

Na konvektivni transfer toplote značajno utiče jako veliki broj faktora: vrsta i fizičko stanje fluida, brzinsko polje, oblik tela i njegov položaj u odnosu na struju fluida, oblik površine i td. Zbog ovoga proučavanje ove pojave nije moguće bez eksperimenata i upotrebu značajnih računarskih resursa. Postoje teorijski fizički modeli strujanja ali zbog uticaja velikog broja faktora i često složene geometrije problema rezultati ne zadovoljavaju upotpunosti potrebe prakse.

Brzina strujanja fluida uz samo telo je veoma mala, praktično nula, zbog sila trenja uslovljenih hrapavosti površine i silama adhezije molekula čvrstog tela i fluida. Zato proces konvektivne razmene započinje provođenjem toplote kroz ovaj nepokretni tanak sloj. Iznad njega su slojevi koji se kreću pa gradijent temperature u njima zavisi od brzine strujanja a time i količina prenosene toplote.

Na slici je dat zid sa okolnom temperaturom vazduha t_1 i t_2 sa označenim oblastima strujanja vazduha (konvekcije). Sa leve strane vazduh struji niz a sa desne uz zid.



Levo uz topliju površinu zida vazduh prirodnom konvekcijom struji naniže jer se hladi od t_1 do t_{z1} , postaje gušći (smanjuje mu se specifična zapremina pa raste gustina $\rho = \frac{m}{V}$). Sa desne hladniji vazduh se greje od t_2 do t_{z2} , postaje specifično lakši (ima veću specifičnu zapreminu jer se širi) i usled sile potiska okolnog hladnijeg vazduha prirodno struji naviše.

Eksperimentalno je određeno da toplote koje se razmene kroz konvektivan sloj su srazmerne površini zida, vremenu razmene, razlici temperatura fluida i površine zida. Uticaj konvektivne struje fluida se uračunava preko koeficijenta α koji se dobija ekperimentalno a samo veoma malom broju slučajeva i teorijski sa greškom od nekoliko desetina procenata. Matematički izrazi glase:

$$Q_1 = \alpha_1 S \tau (t_1 - t_{z1})$$

$$Q_2 = \alpha_2 S \tau (t_{z2} - t_2)$$

gde su: τ – vreme, S – površina zida, α_1 i α_2 koeficijenti prelaza toplote sa zida na vazduh, t_{z1} i t_{z2} temperature površina zida. Jedinica za koeficijent prelaza je $[W/m^2K]$.

1.10 Prolaz toplote

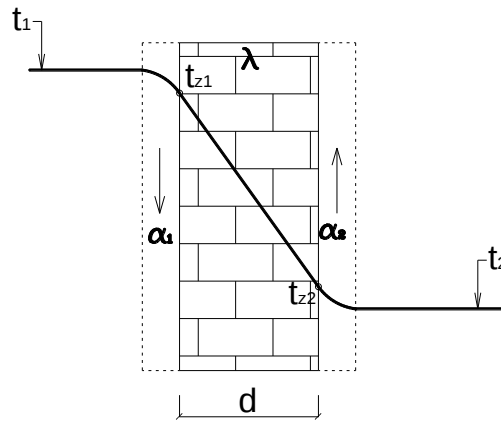
Prolaz toplote je pojava transporta toplote između dva fluida koji se obavlja kroz zid koji ih razdvaja. Sastoji se od dva prelaza toplote, sa fluida na zida, sa zida na fluid i jednog provođenja toplote kroz zid. Tipičan primer je razmena toplote između vazduha u prostoriji i spoljašnjeg preko zida.

Toplota razmenjena **prolazom** se opisuje izrazom sličnim onim za prelaz samo što umesto koeficijenta prelaza α figuriše koeficijent U -**koeficijent prolaza** toplote.

$$Q = US \tau (t_1 - t_2).$$

Jedinica za koeficijent U je $\frac{W}{m^2K}$.

1.10.1 Prolaz toplote kroz ravan zid



Posmatramo homogen ravan zid, debljine d , konstantnog koeficijenta toplotne provodnosti λ sa temperaturama vazduha t_1 i t_2 , kao na slici. U stacionarnom slučaju toplotni fluksevi prelaza $\Phi_{\alpha 1}$ i $\Phi_{\alpha 2}$ su jednaki fluksu provođenja Φ i svi su odrediti: međusobno jednaki. Izražavanjem razlika temperatura preko fluksa Φ , možemo ga odrediti:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\alpha 1} &= \alpha_1 S (t_1 - t_{z1}) \\ \Phi &= \frac{\lambda S}{d} (t_{z1} - t_{z2}) \\ \Phi_{\alpha 2} &= \alpha_2 S (t_{z2} - t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{\alpha_1 S} \\ t_{z1} - t_{z2} &= \frac{\Phi d}{\lambda S} \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{\alpha_2 S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\Phi}{S} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \Rightarrow \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{S\alpha_1} + \frac{d}{S\lambda} + \frac{1}{S\alpha_2}} [W]$$

Gustina fluksa je:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Veličina $R_T = \frac{1}{S\alpha_1} + \frac{d}{S\lambda} + \frac{1}{S\alpha_2}$ se naziva termički otpor prolaza toplote. Ako je uporedimo sa izrazom za termički otpor provođenja, $R_T = d / S\lambda$, vidimo da izraz ima dva nova člana, $1 / S\alpha_1$ i $1 / S\alpha_2$, koji predstavljaju otpore prelaza sa unutrašnje i spoljašnje površine zida. Dakle, konvektivno strujanje vazduha pored zida povećava termički otpor i smanjuje količinu toplote koja se razmenjuje između zida i vazduha.

Nepoznate temperature zida t_{z1} i t_{z2} možemo da odredimo iz sada poznatog fluksa:

$$t_{z1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} \quad \text{i} \quad t_{z2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}$$

Vidimo da je $t_{z1} < t_1$ i $t_{z2} > t_2$. **Koeficijent prolaza toplote** U za ravan zid se određuje iz izraza:

$$U = \frac{Q}{\tau S (t_1 - t_2)} = \frac{q}{t_1 - t_2} = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$$

Promena temperature unutar zida se može odrediti pomoću izraza izvedenog za provođenje toplote:

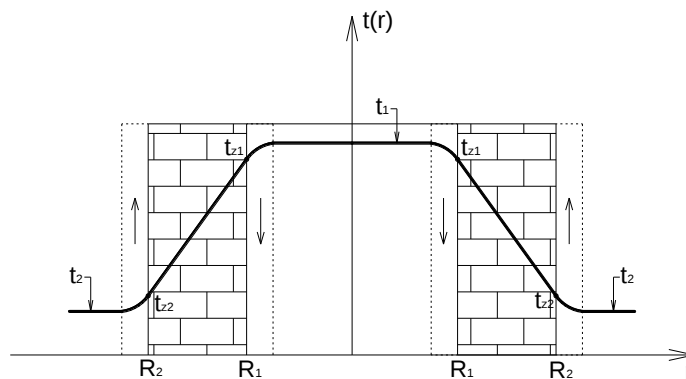
$$t(x) = t_{z1} - \frac{\Phi}{\lambda S} \cdot x = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} - \frac{\frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{S\alpha_1} + \frac{d}{S\lambda} + \frac{1}{S\alpha_2}}}{\lambda S} x = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Dakle:

$$t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{x}{\lambda} \right).$$

1.11 Prolaz toplote kroz cilindričan zid

Posmatramo homogen cilindričan zid, visine h , načinjen od materijala toplotne provodljivosti λ . Temperature vazduha unutar i van cilindra su t_1 i t_2 .



Fluksevi prelaza toplote u ovom slučaju su:

$$\Phi_{\alpha 1} = \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z1}) = \alpha_1 \cdot 2\pi R_1 h (t_1 - t_{z1}),$$

$$\Phi_{\alpha 2} = \alpha_2 S_2 (t_{z2} - t_2) = \alpha_2 \cdot 2\pi R_2 h (t_{z2} - t_2).$$

Fluks provođenja je $\Phi = \frac{t_{z1} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda h} \ln \frac{R_2}{R_1}}.$

U stacionarnim uslovima je $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. Razlike temperatura su:

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{2\pi\alpha_1 R_1 h} \\ t_{z1} - t_{z2} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{2\pi\alpha_2 R_2 h} \end{aligned} \right\} \text{sumiranjem dobijamo: } t_1 - t_2 = \Phi \left(\frac{1}{2\pi\alpha_1 R_1 h} + \frac{1}{2\pi\lambda h} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\pi\alpha_2 R_2 h} \right)$$

Sada je fluks,

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi h} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2} \right)} [W],$$

i podužna gustina fluksa:

$$q_h = \frac{\Phi}{h} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2} \right)} \left[\frac{W}{m} \right].$$

$$\text{Termički otpor prolaza toplote } R_T = \frac{1}{2\pi h} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2} \right) \left[\frac{K}{W} \right].$$

Nepoznate temperature zida t_{z1} i t_{z2} možemo da odredimo iz fluksa:

$$t_{z1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 \cdot 2\pi R_1 h} = t_1 - \frac{q_h}{\alpha_1 \cdot 2\pi R_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1}$$

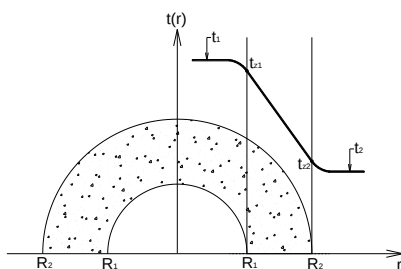
$$t_{z2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} = t_2 + \frac{q_h}{\alpha_2 \cdot 2\pi R_2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\alpha_2 R_2}.$$

Temperatursko polje unutar zida je

$$t(r) = t_{z1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \ln \frac{r}{R_1} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r}{R_1} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

1.12 Prolaz toplote kroz sferni zid

Posmatramo homogen zid u obliku kupole kao na slici.



Fluksevi prelaza toplote su: sa vazduha na zid $\Phi_{\alpha 1} = \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z1})$ i sa zida na vazduh $\Phi_{\alpha 2} = \alpha_2 S_2 (t_{z2} - t_2)$. Fluks provođenja kroz kupolu je:

$$\Phi = \frac{t_{z1} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}.$$

U stacionarnim uslovima $\Phi_{\alpha 1} = \Phi_{\alpha 2} = \Phi = \text{const}$. Odredimo nepoznat fluks Φ .

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} \\ t_{z1} - t_{z2} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right)$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right)} [W]$$

Termička otpornost prolaza toplote za sferični zid:

$$R_T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right).$$

Temperature površina zida su:

$$t_{z1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1^2}$$

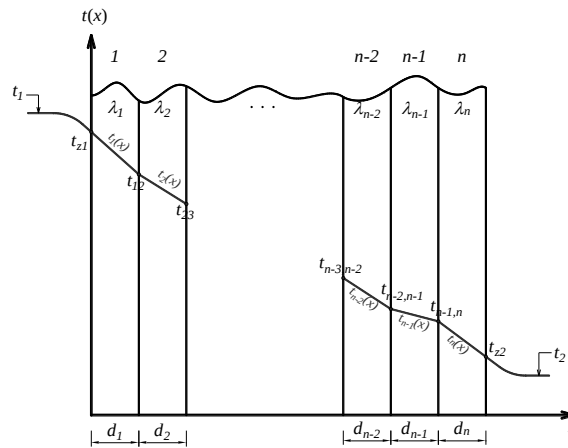
$$t_{z2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \cdot \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}$$

Ostaje još da odredimo temperatursko polje u zidu. Koristićemo izraz isveden za temperatursko polje u istom zidu pri provođenju toplote, stim što u ovoj lekciji temperaturu površine zida obeležavamo sa t_{z1} .

$$t(r) = t_{z1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

$$t(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \right).$$

1.13 Prolaz toplote kroz višeslojan ravan zid



Posmatramo heterogen ravan zid, ukupne debljine d , koji se sastoji od ravnih homogenih slojeva koeficijenata toplotnih provodnosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, debljina $d_1, d_2, \dots, d_n$ sa temperaturama vazduha sa leve i desne strane t_1 i t_2 , kao na slici. U stacionarnom slučaju toplotni fluksevi prelaza $\Phi_{\alpha 1}$ i $\Phi_{\alpha 2}$ su jednaki fluksevima provođenja $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ i svi su međusobno jednaki i obeleženi sa Φ . Koeficijenti prelaza toplote α_1 i α_2 na unutrašnjoj i spoljašnjoj površine zida su poznati. U narednim izrazima su ispisani izrazi za flukseve, izražene razlike temperatura preko Φ i njihovim sabiranjem izveden izraz za nepoznat fluks:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\alpha 1} &= \alpha_1 S (t_1 - t_{z1}) \\
 \Phi_1 &= \frac{\lambda_1 S}{d_1} (t_{z1} - t_{12}) \\
 \Phi_2 &= \frac{\lambda_2 S}{d_2} (t_{12} - t_{23}) \\
 &\vdots \\
 \Phi_{n-2} &= \frac{\lambda_{n-2} S}{d_{n-2}} (t_{n-3,n-2} - t_{n-2,n-1}) \\
 \Phi_{n-1} &= \frac{\lambda_{n-1} S}{d_{n-1}} (t_{n-2,n-1} - t_{n-1,n}) \\
 \Phi_n &= \frac{\lambda_n S}{d_n} (t_{n-1,n} - t_{z2}) \\
 \Phi_{\alpha 2} &= \alpha_2 S (t_{z2} - t_2)
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 t_1 - t_{z1} = \frac{\Phi}{S \alpha_1} \\
 t_{z1} - t_{12} = \frac{\Phi d_1}{S \lambda_1} \\
 t_{12} - t_{23} = \frac{\Phi d_2}{S \lambda_2} \\
 \vdots \\
 t_{n-3,n-2} - t_{n-2,n-1} = \frac{\Phi d_{n-2}}{S \lambda_{n-2}} \\
 t_{n-2,n-1} - t_{n-1,n} = \frac{\Phi d_{n-1}}{S \lambda_{n-1}} \\
 t_{n-1,n} - t_{z2} = \frac{\Phi d_n}{S \lambda_n} \\
 t_{z2} - t_2 = \frac{\Phi}{S \alpha_2}
 \end{array} \right.
 \quad \begin{aligned}
 t_1 - t_2 &= \frac{\Phi}{S} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \\
 \Phi &= \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{S \alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{S \lambda_i} + \frac{1}{S \alpha_2}}
 \end{aligned}$$

Gustina toplotnog fluksa je: $q = \frac{\Phi}{S} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$.

Veličina u imeniocu je **termički otpor prolaza toplote**:

$$R_T = \frac{1}{S \alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{S \lambda_i} + \frac{1}{S \alpha_2} \left[\frac{K}{W} \right]$$

Recipročna vrednost je **koeficijent prolaza toplote** višeslojnog zida:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[\frac{W}{m^2 K} \right].$$

Ako uporedimo ove izraze za otpor i koeficijent provođenja višeslojnog zida sa istim dobijenih bez uzimanja u obzir efekata prelaza, vidimo da prelaz toplote unosi dva nova člana $1/S\alpha_1$ i $1/S\alpha_2$ i oni predstavljaju **otpor prelaza** sa jedne i druge strane zida.

Sada možemo da odredimo temperature na površinama zida t_{z1} i t_{z2} . Iz $t_1 - t_{z1} = \frac{\Phi}{S\alpha_1}$ imamo

$$\boxed{t_{z1} = t_1 - \frac{q}{\alpha_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}}, \text{ iz } t_{z2} - t_2 = \frac{\Phi}{S\alpha_2} \Rightarrow \boxed{t_{z2} = t_2 + \frac{q}{\alpha_2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}}.$$

Na isti način možemo da odredimo i temperature na spojevima materijala:

$$t_{12} = t_{z1} - \frac{\Phi}{S} \frac{d_1}{\lambda_1} = t_1 - \frac{q}{\alpha_1} - q \frac{d_1}{\lambda_1} = t_1 - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} \right)$$

$$t_{23} = t_{12} - \frac{\Phi}{S} \frac{d_2}{\lambda_2} = t_1 - \frac{q}{\alpha_1} - q \frac{d_1}{\lambda_1} - q \frac{d_2}{\lambda_2} = t_1 - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right)$$

Temperatura na kontaktu trećeg i drugog sloja računato od spoljašnje površine je:

$$t_{n-2,n-1} = t_{n-3,n-2} - \frac{\Phi}{S} \frac{d_{n-2}}{\lambda_{n-2}} = t_1 - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{d_{n-2}}{\lambda_{n-2}} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{d_i}{\lambda_i} \right).$$

Temperatura između drugog i prvog sloja gledano od spoljašnje površine je:

$$t_{n-1,n} = t_{n-2,n-1} - \frac{\Phi}{S} \frac{d_{n-1}}{\lambda_{n-1}} = t_1 - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{d_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i}{\lambda_i} \right).$$

Možemo da odredimo analogno i t_{z2} preko prethodnih izraza:

$$t_{z2} = t_{n-1,n} - \frac{\Phi}{S} \frac{d_n}{\lambda_n} = t_1 - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{d_n}{\lambda_n} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} \right).$$

Na kraju izvedimo formule za temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(x), \dots, t_n(x)$. Po analogiji

na formulu za jednoslojni zid tj. $t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{d} x$, za prvi sloj imamo:

$$t_1(x) = t_{z1} - \frac{t_{z1} - t_{12}}{d_1} x = t_1 - \frac{q}{\alpha_1} - \frac{q \frac{d_1}{\lambda_1}}{d_1} x = t_1 - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{x}{\lambda_1} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{x}{\lambda_1} \right). \text{ Za drugi}$$

$$t_2(x) = t_{12} - \frac{t_{12} - t_{23}}{d_2} (x - d_1) = t_1 - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} \right) - \frac{q \frac{d_2}{\lambda_2}}{d_2} (x - d_1) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{x - d_1}{\lambda_2} \right)$$

Za k -ti sloj:

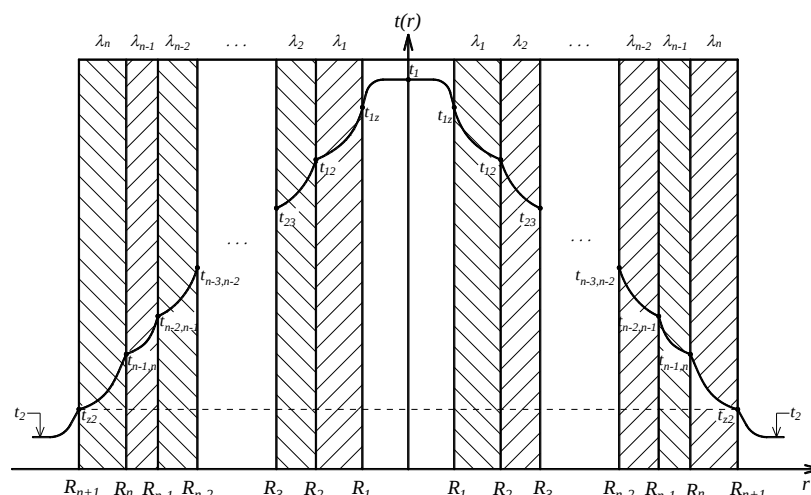
$$t_k(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{x - \sum_{i=1}^{k-1} d_i}{\lambda_k} \right).$$

Za poslednji:

$$t_n(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{x - \sum_{i=1}^{n-1} d_i}{\lambda_n} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{x - (d - d_n)}{\lambda_n} \right)$$

1.14 Prolaz toplote kroz višeslojni cilindričan zid

Analiziramo cilindričan heterogen zid od materijala toplotnih provodnosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, čiji su poluprečnici $R_1, \dots, R_n$. Temperature vazduha unutar sa jedne i druge strane zida su t_1 i t_2 . Uzimamo u obzir prelaze toplote za vazduha na zid i sa zida na vazduh. Izvodimo izraze za podužnu gustinu toplotnog fluksa q_h , termički otpor prolaza toplote R_T , temperature površina zida t_{z1} , t_{z2} , temperature na spoju između slijeva $t_{12}, t_{23}, \dots, t_{n-2, n-1}, t_{n-1}$ i na kraju temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(r), \dots, t_n(r)$. Analiziramo stacionaran slučaj, tj. fluksevi prelaza toplote $\Phi_{\alpha 1}$ i $\Phi_{\alpha 2}$, provođenja $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ su konstantni u vremenu i međusobno jednaki. Označićemo ih Φ .



Izrazi za flukseve su:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\alpha_1} &= \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z1}) \\ \Phi_1 &= \frac{t_{z1} - t_{12}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1 h} \ln \frac{R_2}{R_1}} \\ \Phi_2 &= \frac{t_{12} - t_{23}}{\frac{1}{2\pi\lambda_2 h} \ln \frac{R_3}{R_2}} \\ &\vdots \\ \Phi_{n-2} &= \frac{t_{n-3,n-2} - t_{n-2,n-1}}{\frac{1}{2\pi\lambda_{n-2} h} \ln \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}}} \\ \Phi_{n-1} &= \frac{t_{n-2,n-1} - t_{n-1,n}}{\frac{1}{2\pi\lambda_{n-1} h} \ln \frac{R_n}{R_{n-1}}} \\ \Phi_n &= \frac{t_{n-1,n} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda_n h} \ln \frac{R_{n+1}}{R_n}} \\ \Phi_{\alpha_2} &= \alpha_2 S_2 (t_{z2} - t_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{S_1 \alpha_1} \\ t_{z1} - t_{12} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1 h} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ t_{12} - t_{23} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2 h} \ln \frac{R_3}{R_2} \\ &\vdots \\ t_{n-3,n-2} - t_{n-2,n-1} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-2} h} \ln \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} \\ t_{n-2,n-1} - t_{n-1,n} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-1} h} \ln \frac{R_n}{R_{n-1}} \\ t_{n-1,n} - t_{z2} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_n h} \ln \frac{R_{n+1}}{R_n} \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{S_2 \alpha_2} \end{aligned} \right\} t_1 - t_2 = \Phi \left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 S_2} \right)$$

Toplotni fluks je:

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi h} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}} \right)} [W].$$

Termički otpor zida je:

$$R_T = \frac{1}{2\pi h} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}} \right) \left[\frac{K}{W} \right].$$

Podužna gustina toplotnog fluksa je: $q_h = \frac{\Phi}{h} = 2\pi \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}} \right)$

Odredimo temperature na površinama zida.

$$\begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{S_1 \alpha_1} \Rightarrow t_{z1} = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi \alpha_1 R_1 h} & t_{z1} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \frac{1}{\alpha_1 R_1} \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{S_2 \alpha_2} \Rightarrow t_{z2} = t_2 + \frac{\Phi}{2\pi \alpha_2 R_{n+1} h} & t_{z2} &= t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}} \end{aligned}$$

Odredimo temperature na spojevima slojeva zida.

$$\begin{aligned} t_{z1} - t_{12} &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_1 h} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow t_{12} = t_{z1} - \frac{q_h}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \frac{1}{\alpha_1 R_1} - \frac{q_h}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \\ t_{12} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

$$t_{12} - t_{23} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2 h} \ln \frac{R_3}{R_2}$$

$$t_{23} = t_{12} - \frac{q_h}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_3}{R_2} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \frac{1}{\alpha_1 R_1} - \frac{q_h}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{q_h}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_3}{R_2} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right)$$

$$t_{23} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right)$$

Analogno prethodnim izrazima biće:

$$t_{n-2,n-1} = t_{n-3,n-2} - \frac{q_h}{2\pi\lambda_{n-2}} \ln \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} \right)$$

$$t_{n-2,n-1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} \right)$$

$$t_{n-1,n} = t_{n-2,n-1} - \frac{q_h}{2\pi\lambda_{n-1}} \ln \frac{R_n}{R_{n-1}} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} \right)$$

$$t_{n-1,n} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} \right)$$

Možemo da odredimo i t_{z2} korišćenjem prethodnih izraza:

$$t_{z2} = t_{n-1,n} - \frac{q_h}{2\pi\lambda_n} \ln \frac{R_{n+1}}{R_n} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} \right).$$

Na kraju izvedimo formule za temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(r), \dots, t_n(r)$. Polazimo od izraza za jednoslojni zid izvedenoj u prethodnoj lekciji:

$$t_1(r) = t_{z1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1 h} \ln \frac{r}{R_1} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r}{R_1} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

$$t_2(r) = t_{12} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2 h} \ln \frac{r}{R_2} = t_1 - \frac{q_h}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r}{R_2} \right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r}{R_2} \right)$$

U k -tom sloju:

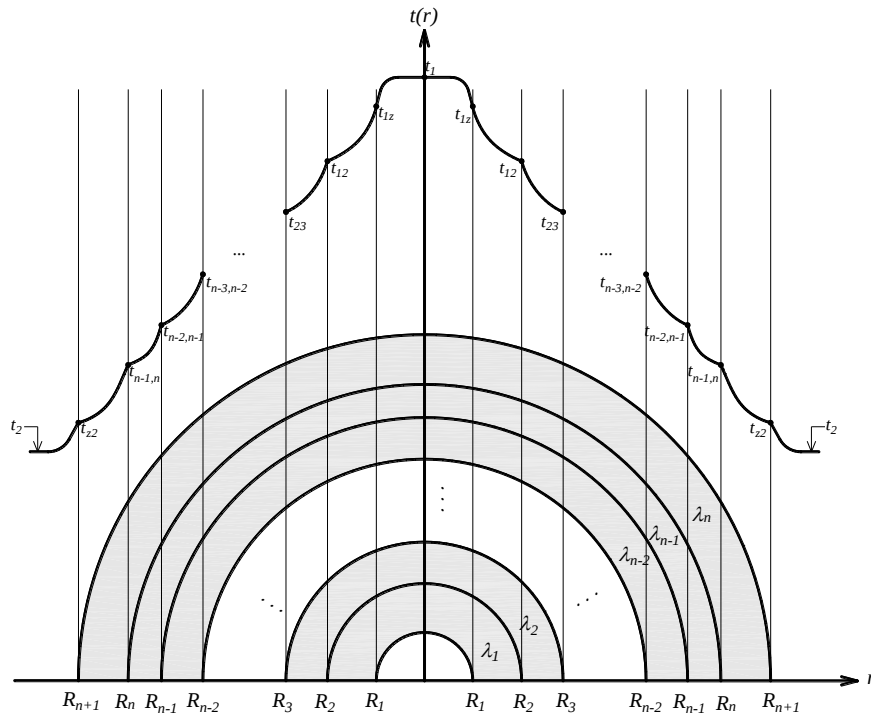
$$t_k(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{r}{R_k} \right)$$

U poslednjem n -tom sloju:

$$t_n(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_1} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{r}{R_n} \right).$$

1.15 Prolaz toplote kroz višeslojni sferni zid

Analiziramo heterogenu polusfernu kupolu od materijala toplotnih provodnosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, čiji su poluprečnici $R_1, \dots, R_n$. Temperature vazduha unutar i van kupole su t_1 i t_2 . Uzimamo u obzir prelaze toplote za vazduha na zid kupole i sa zida na spoljašnji vazduh. Izvodimo izraze za toplotni fluks Φ , termički otpor prolaza toplote R_T , temperature površina zida t_{z1} , t_{z2} , temperature na spolu između slijeva $t_{12}, t_{23}, \dots, t_{n-2, n-1}, t_{n-1}$ i na kraju temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(r), \dots, t_n(r)$. Analiziramo stacionaran slučaj, tj. fluksevi prelaza toplote $\Phi_{\alpha 1}$ i $\Phi_{\alpha 2}$, provođenja $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ su konstantni u vremenu i međusobno jednaki. Sve ih označavamo sa Φ .



U narednom pasusu su dati izrazi za pomenute flukseve, a zatim i izvođenje samog fluksa:

$$\left. \begin{aligned}
\Phi_{\alpha 1} &= \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z1}) \\
\Phi_1 &= \frac{t_{z1} - t_{12}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \\
\Phi_2 &= \frac{t_{12} - t_{23}}{\frac{1}{2\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)} \\
&\vdots \\
\Phi_{n-2} &= \frac{t_{n-3,n-2} - t_{n-2,n-1}}{\frac{1}{2\pi\lambda_{n-2}} \left(\frac{1}{R_{n-2}} - \frac{1}{R_{n-1}} \right)} \\
\Phi_{n-1} &= \frac{t_{n-2,n-1} - t_{n-1,n}}{\frac{1}{2\pi\lambda_{n-1}} \left(\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{R_n} \right)} \\
\Phi_n &= \frac{t_{n-1,n} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda_n} \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n+1}} \right)} \\
\Phi_{\alpha 2} &= \alpha_2 S_2 (t_{z2} - t_2)
\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}
t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{2\pi\alpha_1 R_1^2} \\
t_{z1} - t_{12} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\
t_{12} - t_{23} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \\
&\vdots \\
t_{n-3,n-2} - t_{n-2,n-1} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-2}} \left(\frac{1}{R_{n-2}} - \frac{1}{R_{n-1}} \right) \\
t_{n-2,n-1} - t_{n-1,n} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-1} h} \left(\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{R_n} \right) \\
t_{n-1,n} - t_{z2} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_n} \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n+1}} \right) \\
t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{2\pi\alpha_2 R_{n+1}^2}
\end{aligned} \right\}$$

Sabiranjem prethodnih jednačina dobijamo:

$$t_1 - t_2 = \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2} \right)$$

Toplotni fluks kroz zid je: $\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2} \right)} [W]$

Toplotna otpornost zida je: $R_T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2} \right) \left[\frac{K}{W} \right]$

Temperature površina zida su:

$$\begin{aligned}
t_{z1} &= t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} \\
t_{z2} &= t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \cdot \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}
\end{aligned}$$

Temperature na spojevima slojeva unutar zida su:

$$\begin{aligned}
t_{z1} - t_{12} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\
t_{12} &= t_{z1} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right) \\
t_{12} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right) \\
t_{12} - t_{23} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \Rightarrow t_{23} = t_{12} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \\
t_{12} &= t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right) \\
t_{23} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right)
\end{aligned}$$

Analogno prethodnim izrazima biće:

$$\begin{aligned}
t_{n-2,n-1} &= t_{n-3,n-2} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-2}} \left(\frac{1}{R_{n-2}} - \frac{1}{R_{n-1}} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \right) \\
t_{n-2,n-1} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \right) \\
t_{n-1,n} &= t_{n-2,n-1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-1}} \left(\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{R_n} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \right) \\
t_{n-1,n} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Možemo da odredimo i t_{z2} korišćenjem prethodnih izraza:

$$\begin{aligned}
t_{z2} &= t_{n-1,n} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_n} \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n+1}} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \right) \\
t_{z2} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Na kraju izvedimo formule za temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(r), \dots, t_n(r)$. Polazimo od izraza za jednoslojni zid izvedenoj u prethodnoj lekciji:

$$t_1(r) = t_{z1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

$$t_2(r) = t_{z2} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right)$$

$$t_2(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

U k -tom sloju:

$$t_k(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

U poslednjem n -tom sloju:

$$t_n(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

1.16 Razmena toplote zračenjem

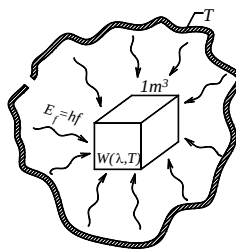
1.16.1 Plankov zakon

Sva tela na $T > 0K$ zrače i na taj način gube energiju tj. hlade se. Tela mogu i da absorbiraju elektromagnetne talase i na taj način povećavaju unutrašnju energiju (greju se). U oba procesa elektromagnetnu energiju razmenjuju u „porcijama“ (kvantima), koji se nazivaju fotoni. Uzrok zračenja tela je usporeno i ubrzano kretanje molekula koje se najčešće javlja kao posledica slučajnih sudara između molekula. Naime, svaka čestica koja nosi naelektrisanje tokom ovog kretanja, tj. smanjenja ili povećanja mehaničke kinetičke energije, zrači elektromagnetnu energiju u vidu talasa, tj. fotona. Kako su molekuli (atomi) u stalnom makroskopskom kretanju na temperaturama većim od $0K$ oni permanentno zrače fotone. Snaga izračenih talasa je srazmerna kvadratu ubrzanja (usporenja). Kod čvrstih tela ovo kretanje je u vidu vibracija oko fiksiranih položaja, u tečnostima osim vibracija postoji i tečenje a u gasovima se kreću slobodno između sudara posle kojih naglo menjaju brzinu.

Za istorijski razvoj fizike otkriće tačnog zakona emisija i apsorpcija fotona je bilo izuzetno važno (do tada se verovalo da je zračenje kontinualne prirode, tj. da se energija razmenjuje kontinualno, a ne u „porcijama“). Pokazalo se da sve čestice u prirodi razmenjuju energiju na ovaj način, putem razmene kvantata polja konačne energije. Energija fotona zavisi od frekvencije

elektromagnetnog polja i izračunava se po Planck-ovoj formuli: $E_f = h \cdot f$, gde je h – Plankova konstanta i iznosi $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, a f – frekvencija u Hercima $[\text{Hz}]$. Plankov zakon opisuje zračenje elektromagnetnih talasa tzv. apsolutno crnog tela, a lako se primenjuje i na ostala tzv. siva tela. Apsolutno crna tela postoje u prirodi u vidu neprozirnih šupljina sa malim otvorom prema spoljašnjosti i predstavljaju idealne apsorbere fotona. Apsorpcija se odigrava na unutrašnjim zidovima šupljina, jer svaki foton koji upadne kroz otvor u šupljinu, usled brojnih refleksija od unutrašnjih zidova (foton ima malu verovatnoću da izađe iz šupljine kroz otvor koji je ušao) se apsorbuje. Tako, unutrašnjost svakog šupljeg neprozirnog tela predstavlja jedno crno telo. Unutar šupljine postoji gusto polje fotona koje emituju i apsorbuju zidovi u njegovoj unutrašnjosti. Kada je izračena energija zidova šupljine jednaka apsorbovanoj kaže se da je fotonsko polje u termodinamičkoj ravnoteži sa zidovima, tj. temperature fotona i zida su jednake.

Za opisivanje pomenutog polja fotona Planck je uveo fizičku veličinu $W(\lambda, T)$, koja se naziva **spektralna zapreminska gustina zračenja** koja opisuje pomenuto energetske stanje ravnoteže. $W(\lambda, T)$ predstavlja energiju svih fotona sadržanih u 1m^3 vakuuma šupljine crnog tela na temperaturi T (tj. gustinu energije), čije su talasne dužine u uskom opsegu oko λ ($\lambda, \lambda + d\lambda$). Na slici je prikazana šupljina crnog tela.

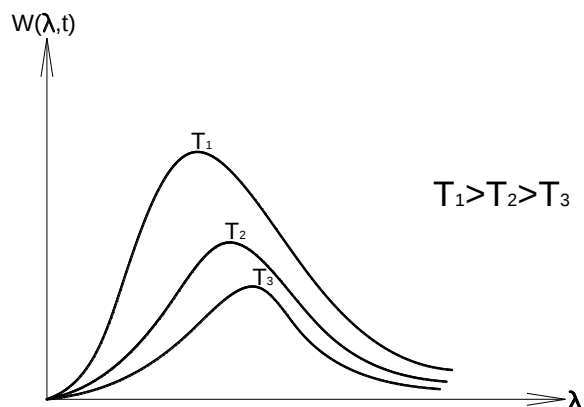


Jedinica joj je J / m^3 po jedinici talasne dužine tj. $\frac{\text{J} / \text{m}^3}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^4}$. Dakle radi se o zapreminskoj gustini energije po jedinici talasne dužine. Treba obratiti pažnju da se ovde radi samo o fotonima čija je talasna dužina u uskom opsegu oko λ . Šupljina sadrži fotone svih talasnih dužina tako da $W(\lambda, T)$ praktično daje gustinu energije samo fotona talasne dužine λ . Ako nas interesuje ukupna energija koja potiče od svih fotona unutar 1m^3 šupljine, treba sabrati energije fotona svih talasnih dužina, od 0 do ∞ : $M(T) = \int_0^{\infty} W(\lambda, T) d\lambda$.

Samo navodimo Planck-ov zakon koji daje spektralnu zapreminsku gustinu zračenja:

$$W(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^4} \right],$$

gde su: k – Bolcmanova konstanta, c – brzina svetlosti u vakuumu, h – Planck-ova konstanta, T – temperatura, λ - talasna dužina fotona. hc/λ predstavlja energiju fotona. Na slici je prikazana zavisnost $W(\lambda, T)$ od talasne dužine za tri temperature.



Važno je primetiti pomeranje maksimuma Planck-ovih krivi sa porastom temperature ka manjim talasnim dužinama. To znači da tela na višim temperaturama zrače više fotona manjih talasnih dužina, tj. većih energija (energija fotona obrnuto srazmerno zavisi od talasne dužine $E_f = \frac{hc}{\lambda}$). Ova pojava se naziva **Vinov zakon pomeranja**. Zakon se može iskazati formulom koja povezuje talasnu dužinu na kojoj telo izači najviše energije i temperaturu tela: $\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$, gde je b – Vinova konstanta i iznosi $0,289 \text{ K} \cdot \text{m}$. Planck-ov kao i Vinov zakon ne zavise od vrste materijala šupljine, što znači da se radi o fundamentalnoj pojavi povezanoj sa kretanjem molekula (atoma) i procesima emisije i apsorpcije u njima.

U literaturi se može naći forma Planck-ovog zakona u kojoj umesto talasne dužine figuriše frekvencija f , tj. kao funkcija $W(f, T)$, koja se uvodi preko jednakosti gustina elektromagnetne energije šupljine crnog tela izražena jednom kao $W(\lambda, T) \cdot d\lambda$ a drugi put kao $W(f, T)df$:

$$W(\lambda, T)d\lambda = W(f, T)df$$

Dalje sledi da je $W(f, T) = W(\lambda, T) \frac{d\lambda}{df}$. Odnos $\frac{d\lambda}{df}$ predstavlja izvod talasne dužine fotona po frekvenciji kojeg određujemo iz veze ovih veličina: $\lambda = c / f \Rightarrow \frac{d\lambda}{df} = -\frac{c}{f^2}$. Znak minus označava činjenicu da sa porastom frekvencije opada talasna dužina, što nije od interesa za $W(f, T)$. Kada u $W(\lambda, T)$ uvrstimo prethodno rečeno i $\lambda = c / f$ dobija se:

$$W(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \left[\frac{J}{m^3 \text{Hz}} \right].$$

Na osnovu jedinice za $W(f, T)$ vidimo da izraz daje gustinu energije fotonskog polja šupljine crnog tela po jedinici frekvencije, tj. gustinu energije fotona čije su frekvencije u opsegu $(f, f + df)$.

1.17 Emisiona moć čvrstih tela

Za tehničku praksu je od interesa da imamo izraz za energiju koju izrači neko telo u jedinici vremena **sa jedinice svoje površine**. Spektralne gustine $W(\lambda, T)$ i $W(f, T)$ iz Planck-ovog zakona nam daju spektralne gustine elektromagnetne energije sadržane u šupljini crnog tela.

Uvodimo **spektralnu površinsku gustinu zračenja** ili **spektralnu zračnu emitansu** crnog tela $M(f, T)$ koja je dimenziono $\frac{W}{m^2 \text{Hz}}$ i predstavlja energiju koju jedinica površine šupljine izrači u okolni prostor za 1s koja potiče samo od fotona iz uskog opsega frekvencija oko f ($f, f + df$).

Veza $M(f, T)$ sa spektralnom gustinom $W(f, T)$ je data preko izraza $M(f, T) = \frac{c}{4} W(f, T)$. Ako

uvrstimo $W(f, T)$ dobijamo: $M(f, T) = \frac{2\pi h f^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \left[\frac{W}{m^2 \text{Hz}} \right]$. Ista ova veličina se može izraziti

preko $W(\lambda, T)$: $M(\lambda, T) = \frac{c}{4} W(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \left[\frac{W}{m^2 \cdot m} \right]$.

Ukupna izračena snaga sa jedinice površine se dobija kada saberemo snagu fotona svih frekvencija ili talasnih dužina, od 0 do ∞ . Matematički to je integral funkcije $M(f, T)$ po frekvenciji, ili $M(\lambda, T)$ po talasnoj dužini, koji obeležavamo sa $M(T)$ i zovemo **emisiona moć tela**. Rešenje integrala daje zavisnost emisije moći od četvrtog stepena apsolutne temperature:

$$M(T) = \int_0^\infty M(f, T) df = \int_0^\infty M(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Ovo je Štefan-Bolcmanov zakon koji je dobijen prvo eksperimentalno a zatim i teorijski na opisan način. Konstanta σ se naziva Štefan-Bolcmanova konstanta i iznosi $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$.

1.18 Kirhofov zakon zračenja (Gustav Kirchoff (1824-1887))

Do sada smo opisivali emisiju zračenja, ali od značaja je i apsorpcija, proces suprotan emisiji jer predstavlja mehanizam kojim se telo zagreva zračenjem. Ovaj zakon utvrđuje da emisiona i apsorpciona svojstva idealno crnih tela zavise samo od temperature i frekvencije zračenja ali ne i od vrste materijala od kojih su tela načinjena. Za apsolutno crna tela na svim temperaturama i frekvencijama apsorpcija fotona je potpuna (nema refleksije zračenja od tela). Realna tela (sem šupnjina) se nazivaju siva tela. Njihova apsorpcija je manja od crnog a veća od idealno belog (telo koje reflektuje sve fotone koji padnu na njega).

Veza između emisionih i apsorpcionih karakteristika tela je data preko emisije moći crnog tela. Za siva tela definišemo koeficijent apsorpcije kao odnos apsorbovane snage fotona sivog $A_s(T)$ i crnog tela $A_c(T)$. Ovaj odnos je ustvari odnos apsorpcionih moći sivog i crnog tela:

$$a_s = \frac{A_s(T)}{A_c(T)}$$

$$0 < a_s < 1$$

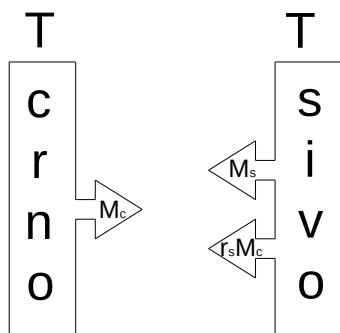
Takođe uodimo koeficijent emisije ε_s sivog tela kao količnik emisione moći sivog i crnog tela.

$$\varepsilon_s = \frac{M_s(T)}{M_c(T)}$$

$$0 < \varepsilon_s < 1$$

Kirhofov zakon tvrdi: emisiona i apsorpciona moć sivog tela su jednake.

Dokažimo ovo. Posmatramo dve paralelne površine sivu i crnu.



Dakle, imamo dve iste paralelne ploče: idealno crnu i sivu na istoj temperaturi, koje razmenjuju energiju zračenjem. M_c – je emisiona moć crnog tela, M_s – emisiona moć sivog tela. $r_s M_c$ – reflektovana energija zračenja crnog tela sa površine sivog (za razliku od crnog sivo telo ne apsorbuje svo zračenje; r_s je koeficijent refleksije: $r_s = 1 - a_s \Leftrightarrow a_s + r_s = 1$).

Napravimo sada bilans snage za sivo telo: na njegovu površinu dolazi zračenje M_c a sa njega se emituje sopstveno M_s i ono ono usled refleksije dela zračenja sa crnog tela: $M_s + r_s M_c$. Pošto je temperatura konstantna, mora da važi:

$$M_c = M_s + r_s M_c.$$

Dakle imamo,
$$\sigma T^4 = \varepsilon_s \sigma T^4 + r_s \sigma T^4.$$

Kada jednačinu energetskog bilansa gore podelimo sa leve i desne strane sa σT^4 dobijamo:

$$1 = \varepsilon_s + r_s, \quad 1 = \varepsilon_s + 1 - a_s \Rightarrow \boxed{\varepsilon_s = a_s}$$

Emisija i apsorpciona svojstva sivog telu su ista.

Siva tela nazivamo da su sva ona koja nisu idealno crna. Zakon zračenja ovih površina je dat u vidu Štefan-Bolcmanovog zakona:

$$M = \varepsilon \sigma T^4 \left[\frac{W}{m^2} \right].$$

Za veliki broj materijala koeficijent emisivnosti je eksperimentalno određen i može se naći u tablicama u literaturi.

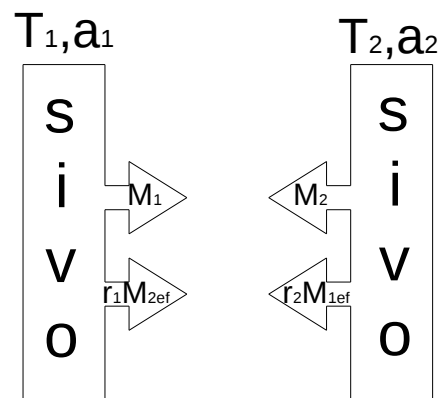
Razmena toplote zračenjem između ravnih površina na različitim temperaturama

Građevinske površine zrače sopstveno zračenje usled zagrejanosti kao sive površine koeficijenta emisivnosti ε i reflektuju zračenje koje pada na njih sa koeficijentom refleksije r . Ukupno zračenje koje napušta površinu je zbir dva navedena:

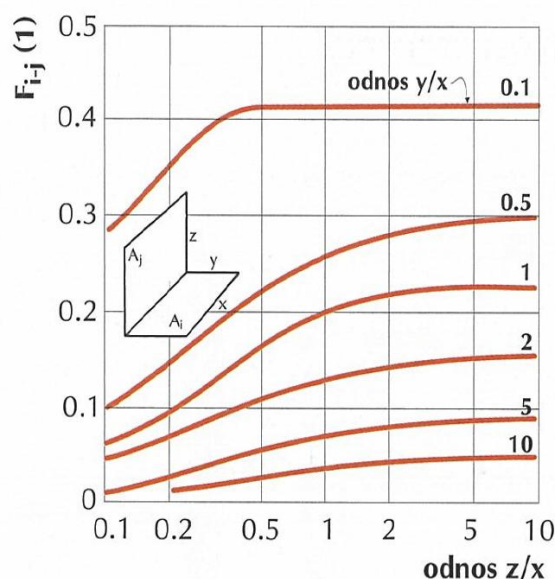
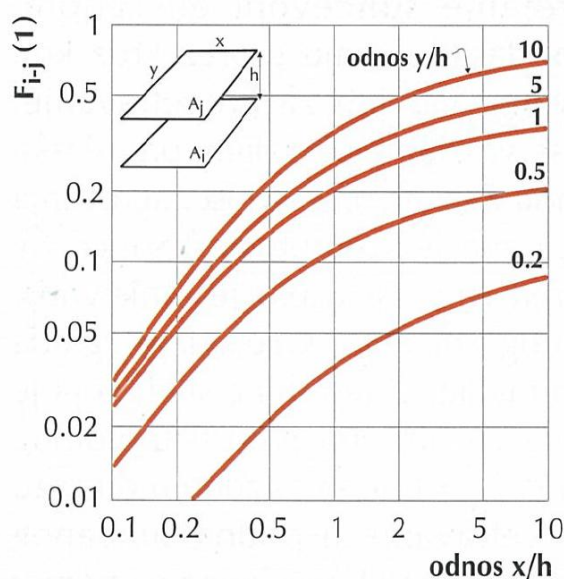
$$M_{1ef} = M_1 + r_1 M_{2ef} \quad M_{2ef} = M_2 + r_2 M_{1ef}$$

Svaka tačka površina oba tela zrači kao savršen difuzni izvor u svim pravcima što znači da deo zračenja jednog tela ne završi na površini drugog. Veza između toplotnog zračenja koga odaje prvo i pada na drugo je data preko faktora razmene F_{12} :

$$M_{2ef} = F_{21} M_{1ef}, \quad M_{1ef} = F_{12} M_{2ef}$$



Faktor razmene zavisi samo od geometrije površina i međurastojanja. Veće i manje udaljene površine razmenjuju više zračenja. Ako su površine površi S_1 i S_2 onda važi pravilo reciprociteta: $S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$. Ako zatvorene površi čine zatvorenu površ zbir svih faktora razmene je 1.



Dve ravne sive površina S_1 i S_2 i temperatura T_1 i

T_2 , koeficijenta emisije ε_1 i ε_2 razmenjuju toplotu zračenjem u svakoj sekundi u iznosu:

$$\Phi = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \cdot S_1} + \frac{1}{S_1 \cdot F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \cdot S_2}} [\text{W}]$$

Razliku temperatura $T_1^4 - T_2^4$ možemo da linearizujemo putem aproksimacije:

$T_1 - T_2 = \Delta T \Rightarrow T_1^4 = T_2^4 + 4T_2^3 \cdot \Delta T + 6T_2^2 \cdot \Delta T^2 + 4T_2 \cdot \Delta T^3 + \Delta T^4$. Poslednji sabirak je veličina reda T^4 pa se zanemaruje u odnosu na T^3 pa imamo da je: $T_1^4 - T_2^4 = 4T_2^3 \cdot \Delta T$.

Ako je $T_1 \approx T_2 \Rightarrow T_1 + T_2 = 2T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 + T_2}{2} = T_{sr}$. Dakle, $T_1^4 - T_2^4 = 4T_{sr}^3(T_1 - T_2)$.

Ako su ploče istih površina i paralelno postavljene tako da je ispunjeno $F_{12} \approx 1$:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}} = \frac{4\sigma \cdot T_{sr}^3(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \alpha_s(T_1 - T_2) \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

gde je α_s koeficijent prelaza toplote zračenjem i ima jedinicu $\left[\frac{W}{m^2 K} \right]$.

Koeficijent α_s zavisi od razlike temperatura pri čemu je ta zavisnost slabija ako je razlika koeficijenata emisivnosti manja.

Figure 8-16 | Radiation shape factor for radiation between two parallel coaxial disks.

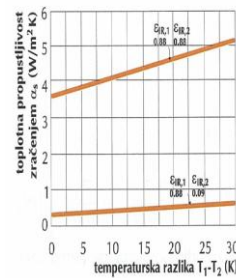
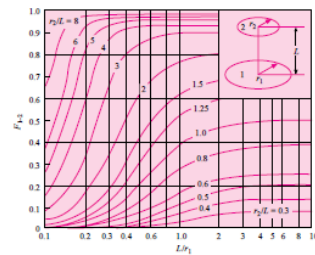
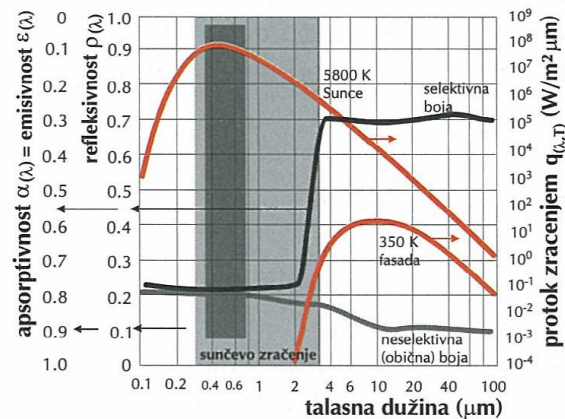
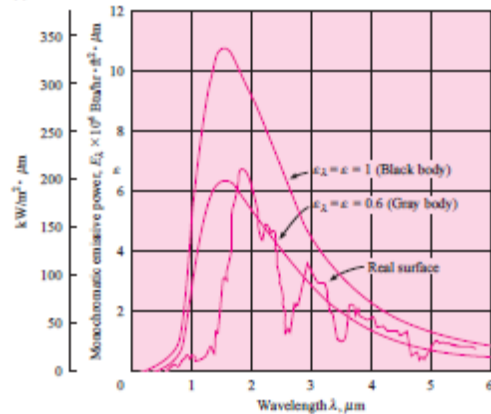
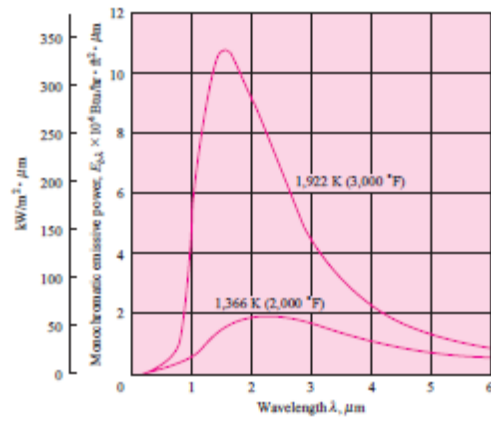


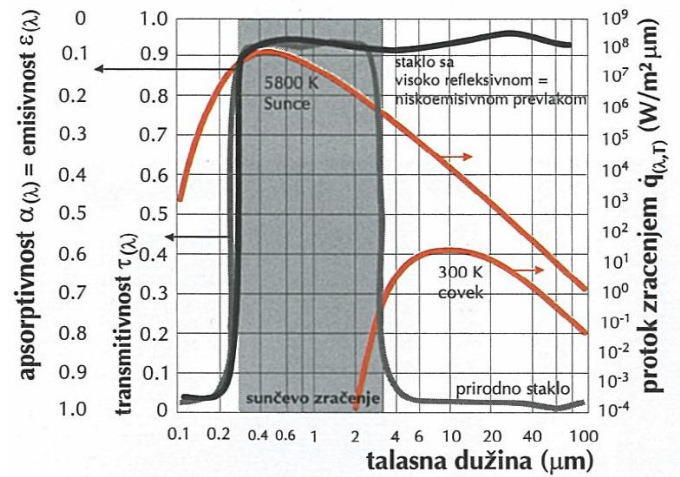
Table 8-21 Radiation shape factor relations.

Geometry	Shape factor
1. Parallel, equal rectangles (Fig. 8-12) $x = X/D, y = Y/D$	$F_{1-2} = (2/\pi xy) \left[\ln(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + x^2 + y^2)^{1/2} + x(1 + y^2)^{1/2} \tan^{-1}[x/(1 + y^2)^{1/2}] + y(1 + x^2)^{1/2} \tan^{-1}[y/(1 + x^2)^{1/2}] - x \tan^{-1}x - y \tan^{-1}y \right]$
2. Parallel, equal, coaxial disks (Fig. 8-13) $R = d/2, X = (2R^2 + 1)/R^2$	$F_{1-2} = [X - (X^2 - 4)^{1/2}]/2$
3. Perpendicular rectangles with a common edge (Fig. 8-14) $H = Z/X, W = Y/X$	$F_{1-2} = (1/\pi W) \left(W \tan^{-1}(1/W) + H \tan^{-1}(1/H) - (H^2 + W^2)^{1/2} \tan^{-1}[1/(H^2 + W^2)^{1/2}] + (1/4) \ln \left[\frac{(1 + W^2)(1 + H^2 + W^2)}{(W^2 + H^2)(1 + W^2 + H^2)} \right] \right) \times [H^2(1 + H^2 + W^2)(1 + H^2)(H^2 + W^2)]^{1/2}$
4. Finite, coaxial cylinders (Fig. 8-15) $X = r_2/r_1, Y = L/r_1$ $A = X^2 + Y^2 - 1$ $B = Y^2 - X^2 + 1$	$F_{2-1} = (1/X) - (1/\pi X) \left(\tan^{-1}(B/A) - (1/2Y) \left[(A^2 + 4A - 4X^2 + 4)^{1/2} \tan^{-1}(B/XA) + B \sin^{-1}(1/X) - \pi A/2 \right] \right)$ $F_{2-2} = 1 - (1/X) + (2/2X) \left(\tan^{-1}[2(X^2 - 1)^{1/2}/Y] - (Y/2\pi X) \left[\ln \left(\frac{4(X^2 + Y^2) + 4(X^2 - 1)}{4(X^2 - 1) + (Y/2X)^2(X^2 - 2)} \right) + (Y/X)^2(X^2 - 2)/(Y^2 + 4(X^2 - 1)) \right] \right)$
5. Parallel, coaxial disks (Fig. 8-16) $R_1 = r_1/L$ $R_2 = r_2/L$ $X = 1 + (1 + R_2^2/R_1^2)^{1/2}$	$F_{1-2} = [X - (X^2 - 4)(R_2/R_1)^2]^{1/2}/2$

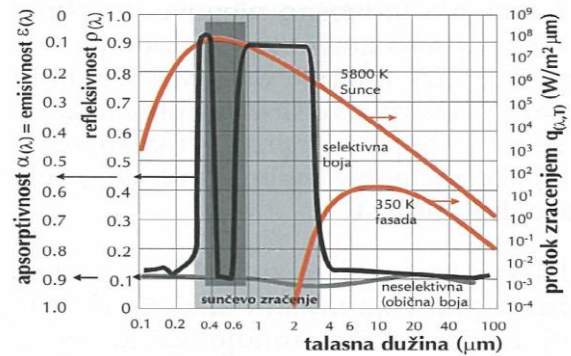
Realni izvori zračenja



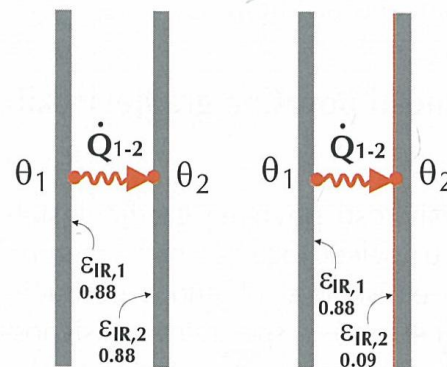
Slika I.26.: Optičke osobine fasade, ofarbane običnom i selektivnom bojom niže emisivnosti dugotalasnog toplotnog zračenja ε_{IR} i iste nijanse boje.



Slika I.24.: Transmisivnost, apsorptivnost i emisivnost običnog stakla i stakla sa prevlakom niske emisivnosti.



Slika I.27.: Optičke osobine površine fasade obojene običnom i selektivnom bojom, kojom postižemo niže temperature fasade i usled toga manja temperaturna izduženja.



Slika I.32.: Zastakljivanje običnim i niskoemisivnim staklom.

Vlaga u građevinskim konstrukcijama

Građevinske konstrukcije su uvek u kontaktu sa vlagom iz tla i vazduha. Velika većina građevinskih materijala je porozna što čini vezivanje i transport vlage posebno olakšanim. I pre ugradnje materijali sadrže vlagu u sebi. Do promene količine vlage dolazi uglavnom iz sledećih razloga:

- promena relativne vlažnosti vazduha (smena godišnjih doba, promena intenziteta i frekvencije padavina)
- promena načina upotrebe zgrade (početak grejne sezone, umanjeno provetravanje)

Čovek doprinosi vlaženju zgrade svojim normalnim aktivnostima:

Izvor vodene pare	Brzina oslobođanja vlage (g/h)
Čovek u mirovanju	30-60
Čovek u napornom radu	<300
Kuvanje	100
Sušenje veša	<500
Kupatilo (pranje)	70
Kupatilo (tuširanje)	2600
Sobna biljka	15
Mirna voda (bazen)	40

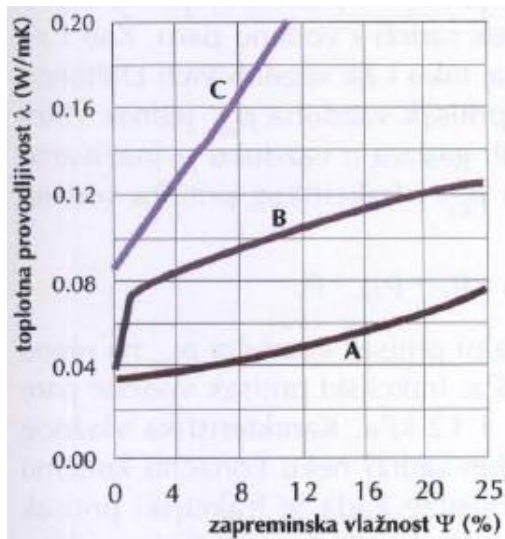
Neposredan prelaz vlage u konstrukcije se sprečava odgovarajućom hidro izolacijom elemenata koji u kontaktu sa vodom ili upotrebom materijala koji ne propuštaju vodu (smole, kamen, crep, metal, plastika) kao i pravilnim usmeravanjem vode od meteoroloških padavina.

Međutim, prelaz vlage u vidu vodene pare iz vazduha je znatno teže onemogućiti tako da se taj problem rešava primenom odgovarajuće toplotne izolacije kako bi se umanjilo ili sprečilo njeno kondenzovanje u konstrukciji.

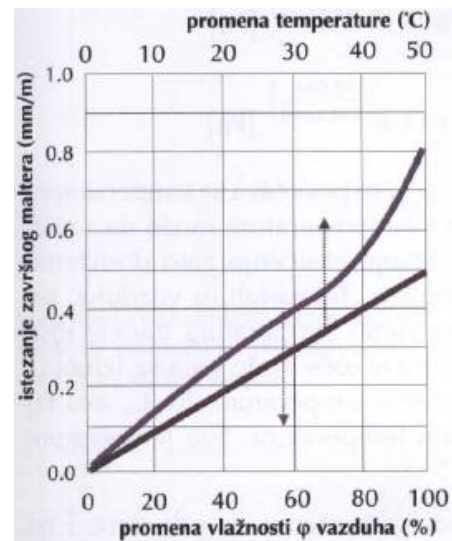
Vlaga u konstrukcijama ima višestruko negativno dejstvo i predstavlja jedan od najvažnijih faktora degradacije:

- povećava značajno koeficijent toplotne provodnosti poroznih materijala u koje spada i termoizolacioni ($\lambda_{vode} = 0,15W / mK$, $\lambda_{vazduha} = 0,025W / mK$)
- dodatno povećava toplotne gubitke zbog isparavanja vode u materijalu
- daje mogućnost razvoja mikroorganizama
- dovodi do mehaničkog naprezanja (bubrenje) materijala
- smrzavanje dovodi do mehaničke degradacije materijala
- utiče na vlažnost vazduha prostorija
- povećava troškove održavanja zgrade

Na slikama su prikazane promene koeficijenta toplotne provodnosti λ materijala u funkciji zapremiske vlažnosti Ψ (odnos zapremine vode u materijalu i suvog materijala) i relativnog istezanja (bubrenja) usled promene temperature i relativne vlažnosti materijala.



Slika II.1.: Povećanje toplotne provodljivosti λ toplotno izolacionih materijala (A – polistirol, B – mineralna vuna, C – penasti beton) [1].



Slika II.2.: Istezanje spoljašnjeg maltera pri promenjenoj temperaturi (toplotno istezanje) i vlažnosti vazduha (higroskopsko istezanje) [1].

Hidroscopska svojstva vazduha

Suv vazduh je smeša u kojoj dominira azot N_2 (78%), kiseonik O_2 (21%) i argon (1%) a drugi gasovi su znatno manje zastupljeni. U vazduhu uvek postoje molekuli vode u vidu pare. Pritisak u vazduhu stvaraju svi molekuli koji ga sačinjavaju udarima u zidove suda. Normalan pritisak je pritisak od 101325Pa na nivou mora.

Parcijalni pritisak je pritisak izazvan udarima molekula samo jedne vrste u zid suda.

Parcijalni pritisak molekula H_2O se kreće u opsegu od 100Pa-12000Pa.

Važna osobina vazduha je da može da apsorbuje samo ograničenu količinu vodene pare. Količina zavisi od temperature. Na višim temperaturama količina vodene pare je veća. Kada vazduh sadrži maksimalnu količinu vodene pare kažemo da je zasićen. Parcijalni pritisak molekula H_2O u ovom slučaju se naziva **pritisak zasićene vodene pare**. Zavisnost pritiska zasićenja pare od temperature je data prema standardu **SRPS U.J5.520**:

$$p_z(t) = \begin{cases} 610,6 \cdot 10^{\frac{9,5 \cdot t}{t+265,5}}, & -20^\circ C < t < 0^\circ C \\ 610,6 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot t}{t+237,5}}, & 0^\circ C \leq t < +40^\circ C \end{cases}$$

Temperatura vazduha na kojoj je para zasićena se naziva **tačka rose**. Svako povećanje sadržaja vodene pare u zasićenom vazduhu dovodi do pojave kondezovane pare, tj. rose.

Maksimalne količine vodene pare u 1m³ zasićenog vazduha na različitim temperaturama je data u tabeli:

Tempearatura (°C)	0	5	10	15	20
Vodena para (g/m ³)	4,8	6,8	9,4	12,8	17,3

Količina vodene pare u vazduhu se može izraziti preko:

1. **sadržaja vlage** ω_v . Definiše kao odnos mase vodene pare i mase suvog vazduha. Može se izraziti preko parcijalnog pritiska vodene pare p_{H_2O} i atmosferskog pritiska p i izražava se u gramima pare po 1kg suvog vazduha:

$$\omega_v = 0,622 \frac{p_{H_2O}}{p - p_{H_2O}} [\text{g/kg}].$$

2. **apsolutne vlažnosti** ψ_v . Definiše se kao odnos mase vodene pare i zapremine vlažnog vazduha i na temperaturi t (°C) se izračunava pomoću izraza:

$$\psi_v = \frac{p_{H_2O}}{462(t + 273)} = \frac{\varphi \cdot p_z}{462(t + 273)} [\text{kg/m}^3]$$

3. **relativne vlažnosti** φ . Po definiciji to je odnos parcijalnih pritisaka pare i zasićene vodene pare:

$$\varphi = \frac{p_{H_2O}}{p_z} \cdot 100 [\%]$$

Hidroscopska svojstva građevinskih materijala

Za vazduh postoji relacija koja povezuje parcijalni pritisak zasićene vodene pare i temperature i može se na jednostavan način izračunati sadžaj vodene pare ako je poznata relativna vlažnost i temperatura.

Na žalost za porozne materijale ne postoje takve formule jer su oni nehomogeni i neizotropni. Zbog toga se kao zamena za ove relacije daju **krive sorpcije** koje povezuju apsolutnu vlažnost materijala i relativnu vlažnost vazduha u kome se nalazi.

Površina tela, tj. molekuli na površini, imaju tendenciju da vezuju molekule H_2O . Ova pojava se naziva **adsorpcija**. Maksimalna adsorbovana količina vode zavisi od relativne vlažnosti vazduha, temperature, površine tela i hidroscopnosti materijala. Materijali koji lako vezuju vodu na površini su beton, drvo i gips. Opeka, veštački materijali i većina termoizolacionih materijala su nehidroscopni, tj. teže vezuju vodu. U površinu tela se ubraja i površina zidova pora unutar tela i ona može biti i do 5000 puta veća od spoljašnje (uzorak površine 1cm² može da ima 500m² pora).

Neka je uzorak suvog materijala izložen vlažnom vazduhu najmanje 100h. Pri niskim relativnim vlažnostima vazduha rezultat adsorpcije je pojava vezanih molekula H_2O u vidu jednog sloja na spoljašnjoj i unutrašnjoj površini (unutar pora) tela. Ovo je karakteristično za relativnu vlažnost vazduha $0 < \varphi < 20\%$. Za $20 < \varphi < 60\%$ karakteristična je pojava vode u više slojeva i pojava kapljica vode. Za $\varphi > 60\%$ dolazi do ispunjavanja pora vodenim kapljicama i javlja se kapilarno usisavanje, tj. izdizanje nivoa tečnosti usled privlačnih sila između molekula vode i materijala. Za $\varphi = 100\%$ pore postaju zasićene vodom.

Unutar pora dolazi do pojave kapilarne kondenzacije i za relativne vlažnosti vazduha znatno manjim od 100% što zavisi od poluprečnika pora:

$$\varphi = e^{-\frac{2\sigma \cdot M}{\rho \cdot R \cdot T \cdot r}}, \quad \text{tj.} \quad p = p_z e^{-\frac{2\sigma \cdot M}{\rho \cdot R \cdot T \cdot r}},$$

gde su σ -koeficijent površinskog napona vode, $M=18\text{g/mol}$ -molarna masa vode, ρ -gustina vode, $R=8,314\text{J/molK}$, T -temperatura, r -poluprečnik cilindrične kapilare, p_z -pritisak zasićene pare iznad ravne površine vode. Vidimo da pritisak zasićene pare p u porama je manji od istog iznad ravne površine vode, tako da nakon formiranja prvih kapljica u pori kondenzacija se ubrzava.

U tabeli su dati poluprečnici pora i relativne vlažnosti za koje nastaje kapilarna kondenzacija iznad meniskusa kondenzovane vode.

r [μm]	500	50	15	5	1,5	0,5
φ [%]	99,8	98	93	80	47	10

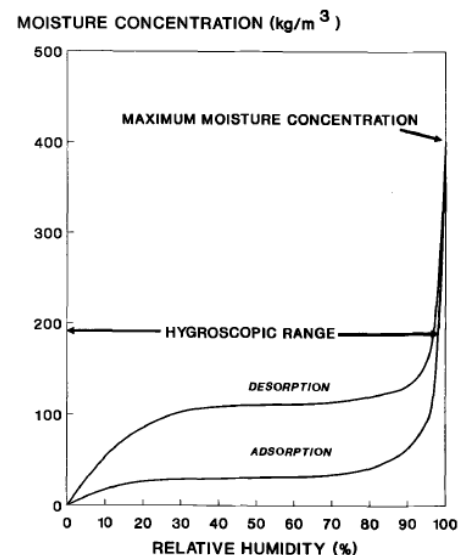
Proces vlaženja (adsorpcije) i isušenja (desorpcije) materijala se ne odvija na isti način jer parcijalni pritisak vodene pare iznad zakrivljene površi kondenzovane vode u pori je manji nego iznad ravne površine tako da sadržaj vlage pri isušivanju je veći nego pri vlaženju sa svaku vrednost φ . Ova pojava se naziva sorpcioni histerezis i karakteristična je za sve materijale.

Visina izdizanja vode vertikalnoj cilindričnoj kapilari se izračunava formulom $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$. Pore poroznih materijala nisu cilindrične i nisu vertikalne pa za procenu visine izdizanja vode iznad nivoa kontakta materijala sa vodom koristi empirijska formula:

$h = B \cdot \sqrt{t}$, gde je t -vreme vlaženja u sekundama a B -koeficijent prodora vode $\text{m/s}^{0,5}$. Gustina masenog fluksa vode koju konstrukcija

apsorbuje u perioda vlaženja $g [\text{kg/m}^2\text{s}]$ se izračunava po formuli $g = \frac{A}{2\sqrt{t}}$, dok je apsorbovana

masa vlage po kvadratnom metru izložene površine $m_v = A\sqrt{t} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$, gde je A -sorpcijski koeficijent materijala. U tabeli su dati koeficijenti A i B za neke materijale.



materijal	A [kg/m ² s ^{1/2}]	B[kg/s ^{1/2}]
opeka	0,4	1,4·10 ⁻³
gasbeton	0,1	4·10 ⁻⁴
beton (voda/cement 0,3)	0,01	10 ⁻⁴
beton (voda/cement 0,7)	0,03	3·10 ⁻⁴
Krečni malter	0,3	10 ⁻³

Vlažnost materijala opisujemo sledećim veličinama:

1. **masena vlažnost** ω . Definiše kao odnos mase vlažnog m_v i m_s suvog uzorka (uzorak se suši na 105°C 40h).

$$\omega = \frac{m_v - m_s}{m_s} \cdot 100[\%]$$

2. **apsolutna vlažnost** u . Definiše se kao odnos mase vode u uzorku i zapremine uzorka:

$$u = \frac{m_v - m_s}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

3. **zapreminska vlažnosti** ψ . Definiše se kao odnos zapremine vode u uzorku i zapremine uzorka:

$$\psi = \frac{V_{\text{vode}}}{V} = \frac{u}{\rho_{\text{vode}}} \cdot 100[\%], \quad \rho_{\text{vode}} - \text{gustina vode}$$

Difuzija vodene pare

Difuzija je proces spontanog prenošenja molekula jedne vrste u sredini druge putem haotičnih sudara. Ovo kretanje, pored haotične, ima jednu usmerenu komponentu koja je orijentisana iz oblasti više u oblast niže koncentracije difundujuće supstance.

Dakle, uzrok difuzije je razlika u koncentraciji, a može biti i razlika u srednjoj kinetičkoj energiji molekula (kretanje „vrućih“ molekula u oblast „hladnih“). U slučaju razlike koncentracija difuzija se naziva *koncentracijska*, a usled razlike temperatura *termalna* koju kod fluida prati i konvektivno strujanje supstance (topliji fluid struji naviše usled sile potiska a hladniji naniže jer ima veću gustinu). Pogonska sila za pojavu difuzije je gradijent koncentracije između dve blike tačke: $\frac{dn}{dx} = \frac{n(x+dx) - n(x)}{dx}$ ili gradijent temperature $\frac{dT}{dx}$. Difuzijom se prenosi masa ali i kinetička energija koju sa sobom nose čestice koje difunduju. Difuzija se najbrže odvija u gasovima, zatim tečnostima, i na kraju u čvrstim telima što je uslovljeno pokretljivošću čestica.

Prvi Fikov zakon

Posmatrajmo difuziju jedne supstance u sredini druge (na pr. molekula vodene pare između molekula gasova vazduha). Koncentracija difundujuće supstance mora da bude mnogo manja od koncentracije molekula sredine kroz koju se vrši difuzija što predstavlja uslov važenja ovog zakona. Za slučaj vodene pare u vazduhu ovo je uvek ispunjeno. Naime pritisak molekula vodene pare na sobnim temperaturama je nekoliko desetina puta malji od atmosferskog (na pr. na 20°C maksimalni pritisak vodene pare iznosi oko 2330Pa što je oko 43 puta manje od normalnog pritiska). Fikov zakon ima još jedno ograničenje, tj. važi samo u slučaju kada je zbir koncentracija

difundujuće i koncentracije supstance kroz koju difunduje u svakoj tački konstantan, tj. pritisak gasa kroz koji se vrši difuzija je konstantan u svakoj tački (pritisak gasa je direktno srazmeran koncentraciji molekula).

Eksperimentalno je utvrđeno da je masa prenesena difuzijom srazmerna gradijentu koncentracije duž pravca difuzije, površini normalno postavljenoj na pravac difuzije kroz koju se vrši, vremenu difundovanja i fizičkim svojstvima sredine. Ovo poslednje se opisuje preko koeficijenta difuzije D koji zavisi od vrste molekula difundujuće supstance, molekula sredine, mehanizma difuzije i temperature. Za beskonačno kratko vreme $d\tau$, kroz beskonačno malu normalnu površinu dS , prenese se duž z ose beskonačno malo mase dm :

$$dm = -D \frac{dC_m}{dz} dS d\tau$$

D – koeficijent difuzije. Jedinica za koeficijent difuzije je m^2/s . $dC_m = C_m(z+dz) - C_m(z)$ je razlika koncentracija masa u dve beskonačno bliske tačke. Masena koncentracija, tj. gustina, je $C_m = m/V$ [kg/m^3]. Znak minus anulira negativan znak gradijenta $\frac{dC_m}{dz}$ jer molekuli difunduju u oblast niže koncentracije, tj: $C_m(z) > C_m(z+dz)$.

Definišemo **maseni difuzioni fluks** kao odnos difundovane mase i vremena:

$$d\Phi = \frac{dm}{d\tau} = -D \frac{dC_m}{dz} dS \left[\frac{kg}{s} \right],$$

i **gustinu difuzionog fluksa** kao odnos fluksa i površine:

$$g = \frac{dm}{d\tau \cdot dS} = -D \frac{dC_m}{dz} \left[\frac{kg}{m^2s} \right].$$

g je masa koja za jedan sekund prođe kroz jedan metar kvadratni površine postavljene normalno na pravac difuzije.

Difuzija vodene pare u vazduhu

Kao primer izvodimo Fikove jednačine za difuziju vodene pare kroz suv nepomični vazduh usled gradijenta parcijalnog pritiska vodene pare (kažemo parcijalnog jer je to samo jedna komponenta ukupnog pritiska u prostoriji; čine ga još pritisci drugih gasova: N_2 , O_2 , itd...). Termodinamička stanja pare i vazduha opisujemo zakonima idealnih gasova, što je vrlo dobar model i daje male greške (koncentracija pare je obično mnogo manja od koncentracije molekula vazduha, za gasove na niskim pritiscima i visokim temperaturama upravo važi model idealnog gasa). Dakle, postoji gradijent pritiska i temperature u gasu i molekuli vodene pare usled toga difunduju iz oblasti više u koncentracije (gustine) u oblast niže. Jednačina stanja vodene pare:

$$pV = n_{mol}RT(z) \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT(z) \Rightarrow \frac{m}{V} = C_m = \frac{pM}{RT},$$

gde su: M – molarna masa pare H_2O , R – univerzalna gasna konstanta, p – pritisak pare i T temperatura. Gustina masenog difuzioni fluksa je

$$g = -D \cdot \frac{dC_m}{dz} = -D \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{pM}{RT} \right) = -\frac{DM}{R} \frac{d}{dz} \left(\frac{p}{T} \right) = -\frac{D_p}{T} \cdot \frac{dp}{dz} + \frac{D_p}{T^2} \cdot \frac{dT}{dz} \approx -\frac{D_p}{T} \cdot \frac{dp}{dz}, \quad D_p = \frac{DM}{R}$$

Drugi sabirak poslednjeg izraza je zanemaren u odnosu na prvi jer je eksperimentalno pokazano da je difuzija usled gradijenta temperature mnogo manja od one usled gradijenta pritiska, a vidimo i da je srazmerna T^{-2} što je za temperature od interesa čini znatno manjim od prvog sabirka. Dakle za difuziju vodene pare u idealnom gasu važi:

$$g = -\frac{DM}{RT} \frac{dp}{dz}$$

Koeficijent difuzije zavisi od temperature. Eksperimentalno je utvrđeno da ova zavisnost glasi: $D(T) = 8,8 \cdot 10^{-10} \cdot T^{1,81} \text{ m}^2/\text{s}$, gde je T dato u $[K]$. Zamenom u prethodni izraz nalazimo gustinu difuzionog fluksa vodene pare u suvom vazduhu:

$$g = -\frac{8,8 \cdot 10^{-10} \cdot T^{0,81}}{R/M} \frac{dp}{dz} = -1,91 \cdot 10^{-12} \cdot T^{0,81} \frac{dp}{dz} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$$

Imajući u vidu da opseg temperatura u građevinarstvu u našim klimatskim uslovima se kreće u intervalu od -20°C do $+30^\circ\text{C}$, umesto koeficijenta $1,91 \cdot 10^{-12} \cdot T^{0,81}$ upotrebljava se njegova srednja vrednost u pomenutom intervalu:

$$\frac{1,9 \cdot 10^{-12}}{30 - (-20)} \int_{253K}^{303K} T^{0,81} dT = 1,82 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{Pa} \cdot \text{m} \cdot \text{s}} = 0,67 \cdot 10^{-6} \text{ h}.$$

Gustinu difuzionog fluksa se sada može iskazati sledećim izrazom:

$$g = -0,67 \cdot 10^{-6} \frac{dp}{dz} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{h}} \right]$$

Kada vodena para difunduje kroz porozne materijale, zbog drugačijeg koeficijenta difuzije, gustina fluksa se određuje iz sličnog izraza:

$$g = -\frac{0,67 \cdot 10^{-6}}{\mu} \frac{dp}{dz} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{h}} \right],$$

gde je μ **koeficijent otpora difuzije** i daje koliko puta je otpor difuziji veći u materijalu nego u vazduhu. U tabeli su date vrednosti koeficijenta μ za neke materijale.

Materijal	PE folija	drvo	beton	gips	opeka	celuloza	kamena vuna
μ	$8 \cdot 10^5$	70	30	4	7	1	1

Zahtevi u pogledu vlaženja građevinskih konstrukcija

Svaka građevinska konstrukcija mora da zadovolji sledeća 4 uslova po pitanju vlage:

- kapilarni prelaz vode na kontaktu tla i konstrukcije mora biti upotpunosti sprečen
- kapilarni prelaz vode iz meteoroloških padavima na omotaču zgrade mora biti ograničen odgovarajućim materijalom završnog sloja fasade
- na unutrašnjoj površini konstrukcije ne sme doći do kondenzacije vodene pare iz vazduha
- u građevinskoj konstrukciji ne sme doći do kondenzacije vodene pare u meri koja utiče na nosivost i trajnost konstrukcije

Kapilarni prelaz

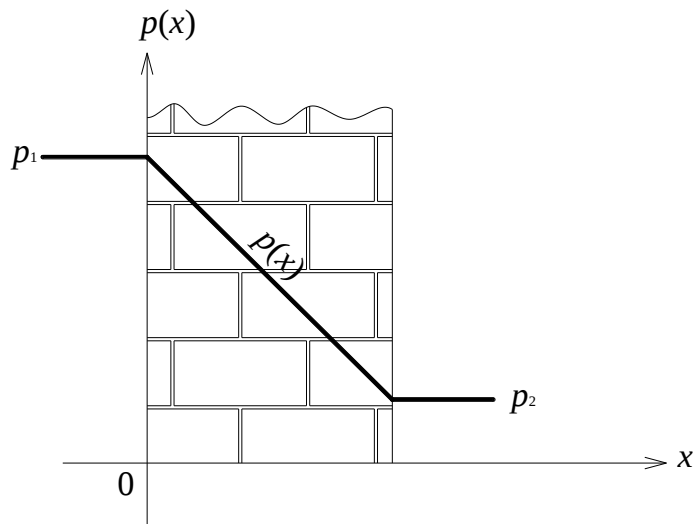
Javlja se na spoju konstrukcije i tla i ravnim krovovima. Postavljanjem sloja hidroizolacije odvajamo izvor vlage od konstrukcije ili zaptivamo pore. Za hidroizolaciju koriste se metalne nerđajuće ploče ili materijali na bazi veštačkih smola. Hidroizolacija zahteva i mehaničku zaštitu jer i najmanje oštećenje prouzrokuje prodor vode. Vodu je potrebno odvoditi od konstrukcije. U temeljima se ukopavaju plastične cevi u šljunak. Cevi imaju rupe sa filtracionom tkaninom. Toplotna izolacija između tla i temenja mora biti nepropusna za vodu, na pr. ekstrudirani polistiren ili penasto staklo.

Poseban problem su stare zgrade sa neadekvatnom izolacijom. Primenjuju se sledeći postupci:

- **mehanički:** kapilare prekidamo hidroizolacijom sečenjem zida i umetanjem bitumenskih traka ili rebrastih limova. Ovaj postupak nije adekvatan kod debelih zidova, zidovima sa instalacijama, objektima bez temelja ili bi interventcija stvorila pukotine
- **hemijski:** stavljaju se materijali koji hemijskom reakcijom promene karakteristike pora. Obično se injektira silikonska emulzija u rupe napravljene na svakih 10-20cm. Posle mesec dana se zid malteriše tzv. Sušecim malterom koji ima velike pore i malo kapilarno usisavanje.
- **električni:** isušivanje propuštanjem struje

Difuzija vodene pare kroz ravan homogen zid

Posmatramo ravan zid debljine d i površine S kroz koji difunduje vodena para. Difuzija se odvija usled razlike pritisaka vodene pare sa jedne i druge strane zida. Odredićemo izraz za struju difuzije vodene pare kroz zid i promenu pritiska vodene pare unutar zida. Posmatramo stacionaran slučaj i smatramo da je difuzioni fluks konstantna, tj. $\Phi = const$. Takođe, nema kondenzovanja pare u zidu.



Polazimo od I Fikovog zakona za difuziju usled gradijenta parcijalnog pritiska vodene pare. Pritisci na površinama zida su p_1 i p_2 , i smatramo ih poznatim.

$$\text{Dakle: } \Phi = g \cdot S = -\frac{0,67 \cdot 10^{-6} S}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad \Phi dx = -\frac{0,67 \cdot 10^{-6} S}{\mu} dp, \quad \Phi \int_0^x dx = -\frac{0,67 \cdot 10^{-6} S}{\mu} \int_{p_1}^{p(x)} dp$$

$$p(x) = p_1 - \frac{\Phi \cdot \mu}{0,67 \cdot 10^{-6} S} \cdot x, \quad p_2 = p_1 - \frac{\Phi \cdot \mu}{0,67 \cdot 10^{-6} S} \cdot d \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{p_1 - p_2}{1,5 \cdot 10^6 \mu d / S} \left[\frac{kg}{h} \right]}$$

$$\boxed{p(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{d} \cdot x [\text{Pa}]}$$

$$\boxed{R_D = \frac{1,5 \cdot 10^6 \mu d}{S}} \text{ - difuzioni otpor zida.}$$

Difuzija vodene pare kroz višeslojni ravan zid

Posmatramo višeslojni ravan zid sa slojevima debljina $d_1, d_2, \dots, d_n$, koeficijentima otpora difuzije $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Parcijalni pritisci vodene pare na obe strane zida su p_1 i p_2 . U stacionarnim uslovi, u odsustvu kondenzacije, fluks pare je konstantan i isti u svakom sloju i kroz ceo zid. Ako napišemo izraze za flukseve za svaki sloj, dobijamo sistem od n jednačina:

$$\Phi = \frac{p_1 - p_{12}}{1,5 \cdot 10^6 \mu_1 d_1 / S} = \frac{p_1 - p_{12}}{R_{D1}}, \quad \Phi = \frac{p_{12} - p_{23}}{1,5 \cdot 10^6 \mu_2 d_2 / S} = \frac{p_{12} - p_{23}}{R_{D2}} \dots \Phi = \frac{p_{n-1,n} - p_2}{1,5 \cdot 10^6 \mu_n d_n / S} = \frac{p_{n-1,n} - p_2}{R_{Dn}}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 - p_{12} = \Phi R_{D1} \\ p_{12} - p_{23} = \Phi R_{D2} \\ \cdot \\ p_{n-2,n-1} - p_{n-1,n} = \Phi R_{Dn-1} \\ p_{n-1,n} - p_2 = \Phi R_{Dn} \end{array} \right\} \Rightarrow p_1 - p_2 = \Phi (R_{D1} + R_{D2} + \dots + R_{Dn}) \Rightarrow \Phi = \frac{p_1 - p_2}{1,5 \cdot 10^6 \sum_{i=1}^n \mu_i d_i}$$

Gustina difuzionog fluksa je:

$$g = \frac{\Phi}{S} = \frac{p_1 - p_2}{1,5 \cdot 10^6 \sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \left[\frac{kg}{m^2 h} \right]$$

Parcijalni pritisci na spojevima slojeva su:

$$p_{12} = p_1 - \Phi R_{D1} = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \mu_1 d_1$$

$$p_{23} = p_{12} - \Phi R_{D2} = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \mu_1 d_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \mu_2 d_2 = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} (\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)$$

Za bilo koja dva sloja:

$$p_{k,k+1} = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} (\mu_1 d_1 + \dots + \mu_k d_k)$$

Na spoju poslednja dva materijala:

$$p_{n-1,n} = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} (\mu_1 d_1 + \dots + \mu_{n-1} d_{n-1})$$

Promena pritiska pare unutar slojeva:

$$p_1(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_{12}}{d_1} x = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \mu_1 \cdot x$$

$$p_2(x) = p_{12} - \frac{p_{12} - p_{23}}{d_2} (x - d_1) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \mu_1 d_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \mu_2 (x - d_1) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} (\mu_1 d_1 + \mu_2 (x - d_1))$$

Analogno, za treći sloj:

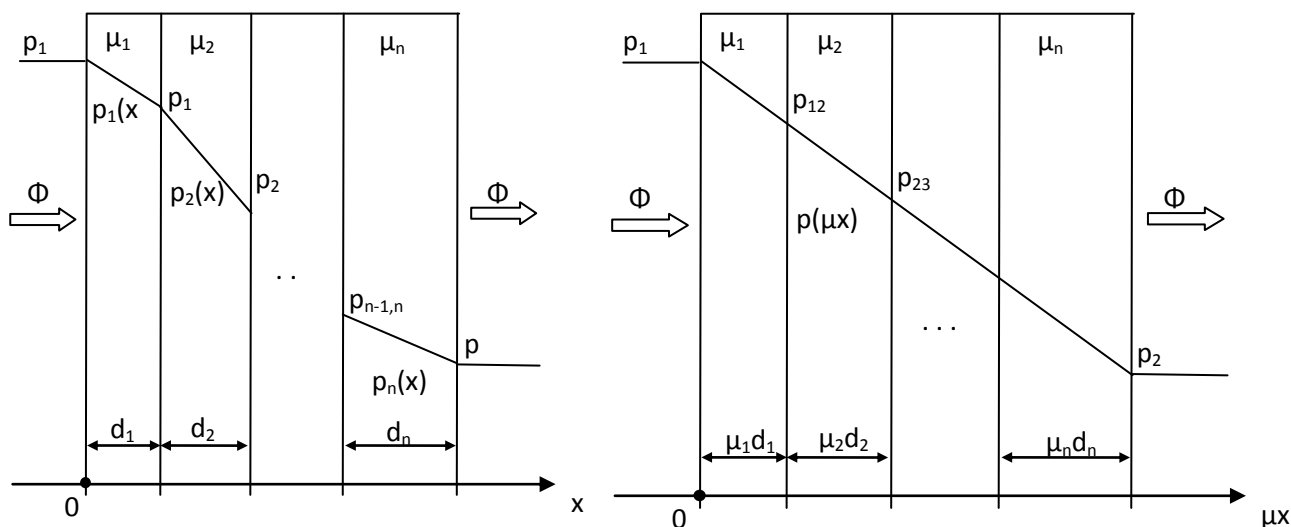
$$p_3(x) = p_{23} - \frac{p_{23} - p_{34}}{d_3} (x - (d_1 + d_2)) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} (\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 (x - (d_1 + d_2)))$$

$$\text{Za } k\text{-ti sloj: } p_k(x) = p_{k-1,k} - \frac{p_{k-1,k} - p_{k,k+1}}{d_k} \left(x - \sum_{i=1}^{k-1} d_i \right) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i d_i + \mu_k \left(x - \sum_{i=1}^{k-1} d_i \right) \right).$$

$$\text{Za poslednji } n\text{-ti sloj: } p_n(x) = p_{n-1,n} - \frac{p_{n-1,n} - p_2}{d_n} \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i d_i + \mu_n \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) \right)$$

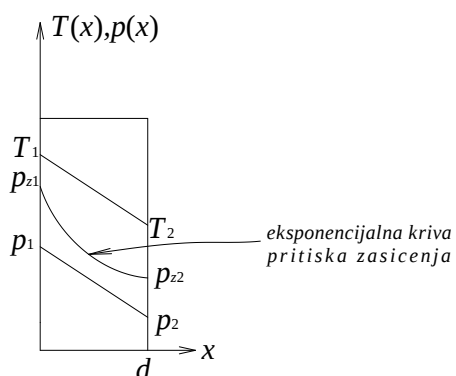
Izlomljenu krivu parcijalnih pritisaka $p_k(x)$ možemo da linearizujemo ako je prikažemo na osi μx .

Jednačina ovako linearizovanog pritiska vodene pare je:
$$p(\mu x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^n \mu_i d_i} \mu x$$



Difuzija i kondenzovanje vodene pare u zidu

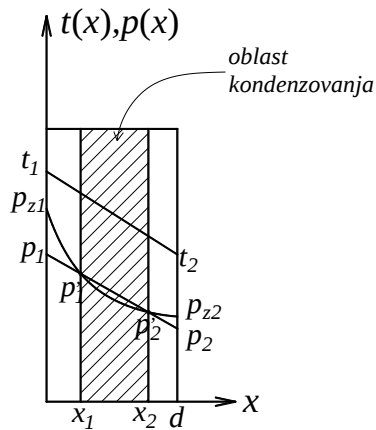
Važna pojava pri difuziji vodene pare kroz zid je nagla i potpuna kondenzacija vodene pare unutar zida. Videli smo da se delimična kondenzacija javlja pri svakoj vrednosti relativne vlažnosti u vidu adsorpcije molekula na zidove pora što je uslovljeno temperaturom pare i poluprečnikom pora. Do potpune kondenzacije po čitavoj zapremini šupljina pora dolazi kada parcijalni pritisak vodene pare naraste na vrednost pritiska zasićene pare, ili posmatrano preko temperature, temperatura pare opadne na temperature tačke rose (dew point). Relativna vlažnost vazduha je tada 100%.



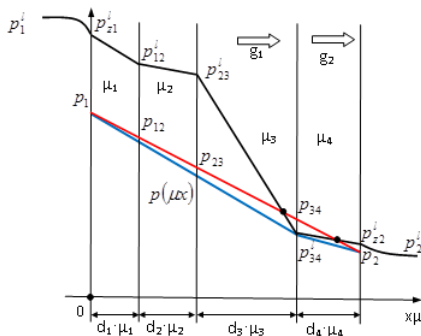
Na slici je prikazan slučaj kada nema potpune kondenzacije pare. Kriva zasićene pare $p_z(x)$ je iznad prave parcijalnog pritiska $p(x)$. Gustina difuzionog fluksa vodene pare za ovaj slučaj je izveden i iznosi:

$$g = \frac{p_1 - p_2}{1,5 \cdot 10^6 \mu d} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{h}} \right]$$

Kada se kriva pritiska zasićene vodene pare seče sa pravom parcijalnog pritiska dolazi do potpune kondenzacije, kao što je prikazano na sledećoj slici.



Kondenzovanje može da se javi u okolini spoja dva susedna materijala u zidu ili da obuhvati čitav jedan sloj (središnji) i delimično dva okolna. U prvom slučaju se kaže da se javlja **kondenzacija u ravni** (misli se na okolinu kontaktne ravan dva materijala) a u drugom **kondenzacija u zoni** pri čemu zona potpuno obuhvata jedan ili više slojeva materijala i delimično dva koja je okružuju. Na slici se kondenzacija odvija u šrafiranoj oblasti od x_1 do x_2 gde se pritisak pare izjednačio sa pritiskom zasićene pare $p_z(x)$.



Na sledećoj slici je prikazan slučaj **kondenzovanja u ravni**. Kondenzacija se dešava u okolini ravni spoja slojeva 3 i 4. Oblast kondenzovanja se nalazi između tačaka preseka prave parcijalnog pritiska (crvene) i parcijalnog pritiska zasićene pare (crne).

Masa kondenzovane pare po jedinici površine zida za 1h jednaka je razlici gustina difuzionih flukseva g_1 i g_2 :

$$g = g_1 - g_2 = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_1 - p_{34}}{\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3} - \frac{p_{34} - p_2}{\mu_4 d_4} \right] \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{h}} \right]$$

U opštem slučaju, ako je ravan kondenzacije spoj $(k-1)$ -og i k -tog sloja:

$$g = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_1 - p_k}{r_1'} - \frac{p_k - p_2}{r_2'} \right] \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{h}} \right]$$

gde su $r_1' = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i d_i$ i $r_2' = \sum_{i=k}^n \mu_i d_i$, tj. ekvivalentne difuzione debljine do i od ravni difuzije. p_k je parcijalni pritisak zasićene vodene pare na mestu spoja $(k-1)$ -og i k -tog sloja, tj. u tzv. ravni kondenzacije.

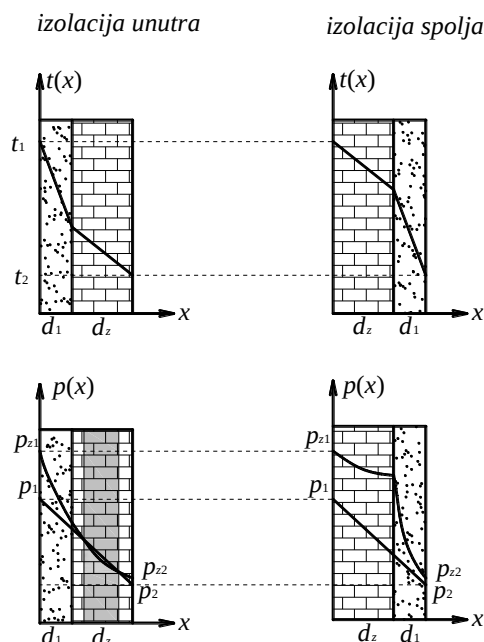
Ovaj način izračunavanja kondenzovane vlage se naziva Glasser-ov postupak i osnov je našeg standarda za ovu oblast (SR UJ.5.520). Očigledno je da se radi o aproksimativnom proračunu gde se kondenzovanje u oblasti oko ravni kondenzovanja računski svodi na kondenzovanje samo u ravni (plava kriva).

Za slučaj kondenzovanja u zoni koristi se ista formula ali sada imamo dve ravni kondenzacije između koje je zona kondenzacije. Parcijalni pritisci zasićene pare u ovim ravnama su p_{k1} i p_{k2} a formula glasi:

$$g = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_1 - p_{k1}}{r_1'} - \frac{p_{k2} - p_2}{r_2'} \right] \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{h}} \right]$$

Gde su $r'_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i d_i$ i $r'_2 = \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i d_i$ ekvivalentne dužine difuzije do prve ravni kondenzovanja i od druge ravni.

Da bi sprečili pojavu kondenzovanja u zidovima pribegava se postavljanju izolacije. Pri tom se mora voditi računa gde se postavlja. Naime, izolacija se stavlja spolja jer je raspored temperaturnog polja u ovom slučaju pogodniji za eliminisanje pojave kondenzata, što se vidi na slici:



Vidimo da kada je izolacija spolja zid je u svakoj tački na višoj temperaturi nego kada je izolacija iznutra. Topliji zid znači manju verovatnoću pojave kondenzata, a topliji je jer je u direktnom kontaktu sa toplijim vazduhom unutar prostorije. U slučaju postavljanja izolacije iznutra mi zid “izolujemo” od toplog vazduha pa je hladniji i pojava kondenzacije više verovatna.

Proračun vlaženja i isušenja zidova

Masa kondenzata po jedinici površine građevinske konstrukcije pri vlaženju

Zidovi vlaže u zimskom periodu od 60 dana. Masa kondenzovane vode se dobija preko gustina difuzionog fluksa vlaženja. U slučaju da se radi o kondenzovanju u ravni, za z dana se izdvoji:

$$g_{z, vl} = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_i - p_k}{r'_1} - \frac{p_k - p_e}{r'_2} \right] \cdot 24 \cdot z \text{ [kg/m}^2\text{]}$$

Za 60 dana:

$$g_{z, vl} = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_i - p_k}{r'_1} - \frac{p_k - p_e}{r'_2} \right] \cdot 1440 \text{ [kg/m}^2\text{]}$$

p_i – parcijalni pritisak vodene pare u vazduhu sa unutrašnje strane zida

p_e – parcijalni pritisak vodene pare u vazduhu sa spoljašnje strane zida

p_k – parcijalni pritisak zasićene vodene pare na razvojnoj površi materijala u kojima dolazi do kondenzovanja

$r'_1 = \sum_i \mu_i d_i$ - ekvivalentna difuziona dužina od unutrašnje površine zida do ravni kondenzovanja

$r'_2 = \sum_i \mu_i d_i$ - ekvivalentna difuziona dužina od ravni kondenzovanja do spoljašnje površine zida

U slučaju kondenzacije u zoni, za z dana se izdvoji:

$$g_{z,vl} = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_i - p_{k1}}{r'_1} - \frac{p_{k2} - p_e}{r'_2} \right] \cdot 24 \cdot z \text{ [kg/m}^2\text{]}$$

Za 60 dana:

$$g_{z,vl} = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_i - p_{k1}}{r'_1} - \frac{p_{k2} - p_e}{r'_2} \right] \cdot 1440 \text{ [kg/m}^2\text{]}$$

Difuzija vodene pare pri isušanju u slučaju kondenzacije u ravni

Gustina difuzionog fluksa isušanja pri kondenzaciji u ravni je ($p_i = p_e = 0,65 p_z(18^0C)$, $p_z(18^0C) = 2063,36Pa$)

$$g_{is} = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_k - p_i}{r'_1} + \frac{p_k - p_e}{r'_2} \right] \text{ [kg/m}^2\text{h]}$$

Difuzija vodene pare pri isušanju u slučaju kondenzacije u zoni

$$g_{is} = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_{k1} - p_i}{r'_1 + 0,5r'_z} + \frac{p_{k2} - p_e}{r'_2 + 0,5r'_z} \right] \text{ [kg/m}^2\text{h]}$$

p_{k1} – parcijalni pritisak zasićene vodene pare na razvojnoj površi materijala u kojima počinje zona kondenzovanja

p_{k2} – parcijalni pritisak zasićene vodene pare na razvojnoj površi materijala u kojima se završava zona kondenzovanja

r'_z – ekvivalentna difuziona debljina zone isušanja

$0,5r'_z$ – polovina zone (levi deo se isusuje ulevo, desni udesno) ;

Vreme isušanja zida

Vreme potrebno za isušanje zida je: $z = 1,3 \cdot \frac{g_{z,vl}}{24 \cdot g} \text{ [dan]} ,$

$$g = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_i - p_k}{r'_1} - \frac{p_k - p_e}{r'_2} \right] \text{ za ravan, } g = 0,67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_i - p_{k1}}{r'_1} - \frac{p_{k2} - p_e}{r'_2} \right] \text{ za zonu.}$$

Zahtevano vreme isušanja je 90 dana.

1. Ravan zid sastoji se od četiri sloja. Debljine, faktor otpora difuzije i termalne provodnosti pojedinih slojeva date su u tabeli. Koeficijenti prelaza toplote sa unutrašnje i spoljašnje strane zida su $7,69 \text{ W/K}\cdot\text{m}^2$ i $25 \text{ W/K}\cdot\text{m}^2$ respektivno. Temperatura i relativna vlažnost sa spoljašnje strane su -5°C i 90% respektivno, dok su temperatura i vlažnost sa unutrašnje strane 20°C i 55% respektivno. Korišćenjem Galser-ovog postupka odrediti parcijalne pritiske vodene pare i pritiske zasićene vodene pare na spojevima materijala. Odrediti gustinu difuzionog fluksa vlaženja i masu kondenzata (vode) koja difunduje kroz 1m^2 zida tokom 60 dana kao i gustinu difuzionog fluksa isušenja i vreme isušenja. Pretpostaviti da je tokom perioda isušenja temperatura unutar zida 18°C a relativna vlažnost 65% sa spoljašnje i unutrašnje strane zida. Pritiske zasićene vodene pare p^l računati korišćenjem sledeće relacije:

$$p^l(t) = \begin{cases} 610,6 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot t}{t+237,5}}; & t \geq 0 \\ 610,6 \cdot 10^{\frac{9,5 \cdot t}{t+265,5}}; & t < 0 \end{cases}$$

br.	Materijal	Debljina d[cm]	Faktor otpora difuzije μ	Toplotna provodnost λ [W/m K]
1	malter (unutar)	3	30	1,40
2	giter blok	30	6	0,61
3	stirodur	5	50	0,035
4	malter (spolja)	2	30	1,40

Rešenje

1.

$$t_1 = 20^\circ\text{C}; t_2 = -5^\circ\text{C}; \alpha_1 = 7,69 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}; \alpha_2 = 25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}; d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0,325 \text{ m}.$$

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^4 \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = 17,124 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Temperature na spojevima materijala

$$t_{z1} = t_1 - \frac{q}{\alpha_1} = 17,773^\circ\text{C}; \quad t_{z2} = t_2 + \frac{q}{\alpha_2} = -4,315^\circ\text{C}$$

$$t_{12} = t_1 - q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} \right) = t_{z1} - q \cdot \frac{d_1}{\lambda_1} = 17,4069^\circ\text{C};$$

$$t_{23} = t_1 - q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right) = t_{12} - q \cdot \frac{d_2}{\lambda_2} = 10,6688^\circ\text{C};$$

$$t_{34} = t_1 - q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} \right) = t_{23} - q \cdot \frac{d_3}{\lambda_3} = -4,00923^\circ\text{C};$$

Pritisci zasićene vodene pare na spojevima materijala:

$$p_z(t) = \begin{cases} p_0 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot t}{t+237,5}}; & t > 0 \\ p_0 \cdot 10^{\frac{9,5 \cdot t}{t+265,5}}; & t < 0 \end{cases}$$

$$p_1^l = 2334,97 \text{ Pa}; \quad p_{z1}^l = 2032,07 \text{ Pa}; \quad p_{12}^l = 1985,604 \text{ Pa}; \quad p_{z3}^l = 1282,8671 \text{ Pa};$$

$$p_{34}^l = 436,617 \text{ Pa}; \quad p_{z2}^l = 425,41 \text{ Pa}; \quad p_2^l = 401,25 \text{ Pa};$$

Parcijalni pritisci vodene pare na spojevima materijala:

$$Rv l_1 = 0,55; \quad Rv l_2 = 0,9$$

$$p_1 = Rv l_1 \cdot p_{z1}^l = 1117,6358 \text{ Pa}; p_{10} = Rv l_1 \cdot p_1^l = 1284,23 \text{ Pa}$$

$$p_2 = Rv l_2 \cdot p_{z2}^l = 382,869 \text{ Pa}; p_{20} = Rv l_2 \cdot p_2^l = 361,125 \text{ Pa}$$

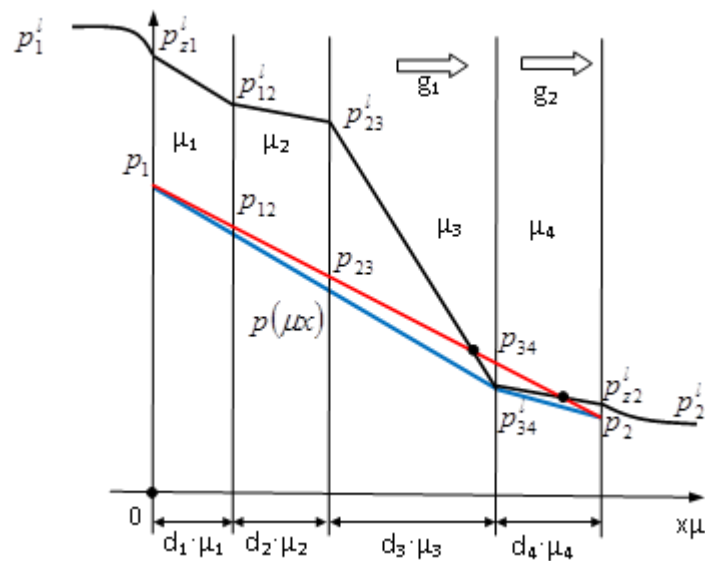
$$p(x) = p_1 - \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{R}{M} \cdot T \cdot \mu x = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{r} \cdot \mu x; \quad \mu x = \int_0^x \mu(x) \cdot dx.$$

$$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4; \quad r = \int_0^d \mu(x) \cdot dx = \mu_1 \cdot d_1 + \mu_2 \cdot d_2 + \mu_3 \cdot d_3 + \mu_4 \cdot d_4$$

$$p_{12} = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{r} \cdot d_1 \cdot \mu_1 = 973,564 \text{ Pa}; \quad p_{23} = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{r} \cdot (d_1 \cdot \mu_1 + d_2 \cdot \mu_2) = 743,049 \text{ Pa};$$

$$p_{34} = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{r} \cdot (d_1 \cdot \mu_1 + d_2 \cdot \mu_2 + d_3 \cdot \mu_3) = 502,929 \text{ Pa} \Rightarrow p_{34} > p_{34}^l;$$

Pošto je parcijalni pritisak vodene pare na spoju trećeg i četvrtog sloja veći od pritiska zasićene vodene pare na istom mestu i pošto je pretpostavljeno da je prostorna raspodela pritiska linearna, zaključujemo da u ovom slučaju postoji kondenzacija u trećem i četvrtom sloju. Ova vrsta kondenzacije se naziva kondenzacija u ravni. Pošto parcijalni pritisak vodene pare ne može biti veći od pritiska zasićene vodene pare, doći će do pada parcijalnog pritiska na spoju trećeg i četvrtog sloja na $p_k^l = p_{34}^l$ kao što je prikazano na slici.



$$g = \frac{\Phi}{S} = 0,67 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\Delta p}{r} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{h}}$$

Gustina difuzionog fluksa vlaženja data je sledećom relacijom:

$$g_1 = 0,67 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{p_1 - p_k^l}{r_1}; \quad g_2 = 0,67 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{p_k^l - p_2}{r_2};$$

$$r_1 = d_1 \cdot \mu_1 + d_2 \cdot \mu_2 + d_3 \cdot \mu_3; \quad r_2 = d_4 \cdot \mu_4$$

$$g_{vl} = g_1 - g_2 = 0,0708 \frac{\text{g}}{\text{m}^2 \cdot \text{h}}$$

Masa kondenzata po jedinici površine za 60 dana je:

$$\Delta m = 24 \times 60 \times g_{vl} = 101,964 \frac{g}{m^2}$$

Gustina difuzionog fluksa isušenja je:

$$Rvl_{is} = 0,55; \quad t_{is} = 18^\circ C;$$

$$g_{is} = 0,67 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{p^l(18^\circ C) - Rvl_{is} \cdot p^l(18^\circ C)}{r_1} + \frac{p^l(18^\circ C) - Rvl_{is} \cdot p^l(18^\circ C)}{r_2} \right) =$$

$$0,67 \cdot 10^{-6} \cdot p^l(18^\circ C) \cdot (1 - Rvl_{is}) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 0,7703 \frac{g}{h \cdot m^2}$$

Vreme potrebno za isušenje:

$$t_{is} = 1,3 \cdot \frac{\Delta m}{g_{is}} = 7,169 \text{ dana}$$