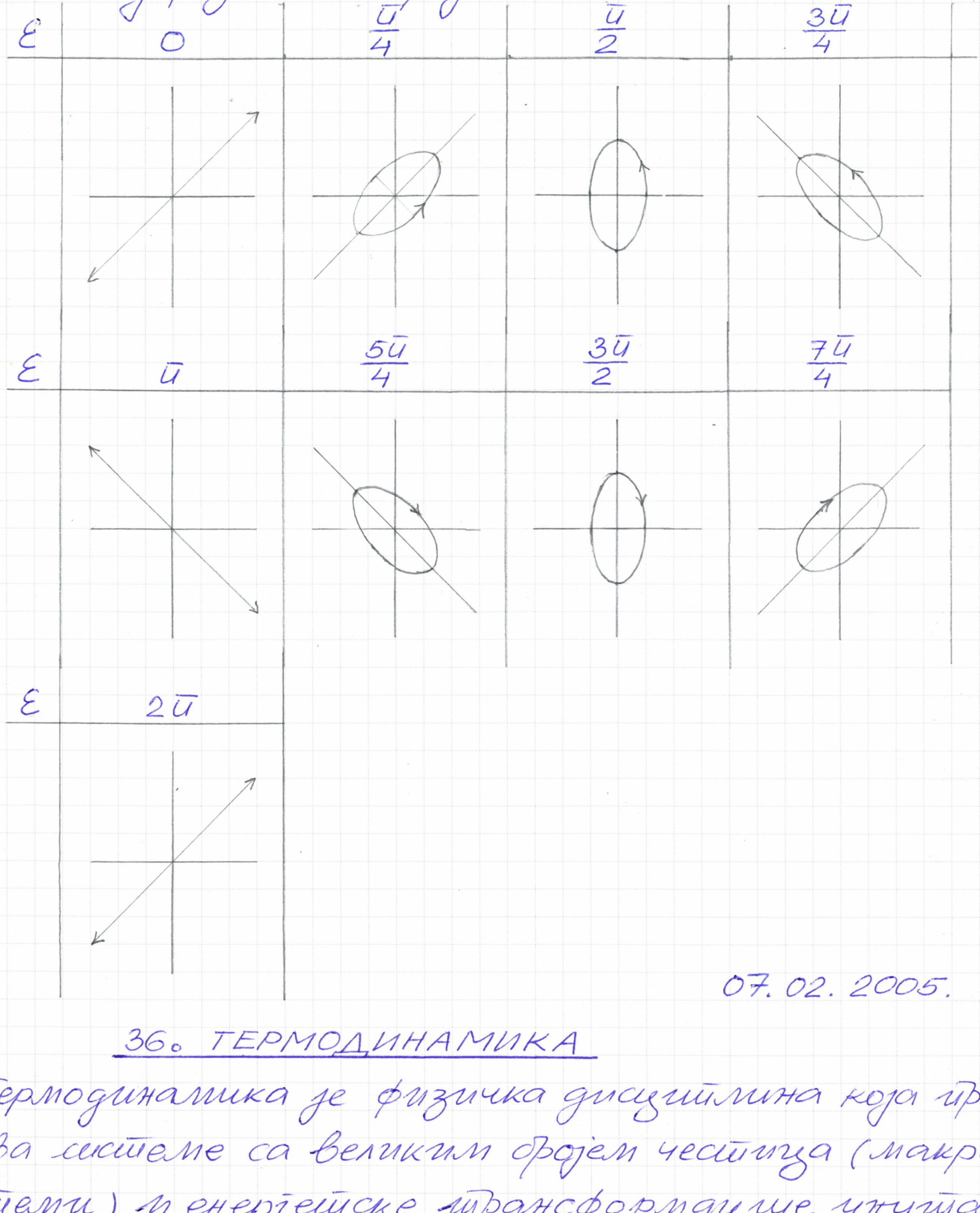
сности од фазног помераја таласа.



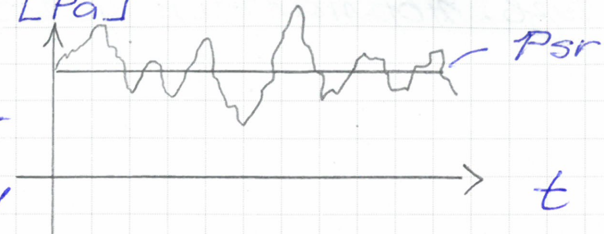
07. 02. 2005.

36. ТЕРМОДИНАМИКА

Термодинамика је физичка дисциплина која проучава системе са великим бројем честица (макросистеми) и енергетске трансформације унутар њих. Због бројности и природе интеракција описивање ових система није могуће на бази познавања кретања појединачних атома (молекула), већ се уводе тзв. макроскопски параметри као што су температура, притисак или запремина. Ради илустрације сложености макросистема узмимо нпр. $1 cm^3$ гаса

при тзв. нормалним условима (притиску од 101325 Pa и температури од 0°C (273,15 K)), у којем има 10^{18} молекула гаса, који се међусобно сударају (сваки молекул у просеку у току 1 секунде доживи милијарду судара).
То је веома сложен физички систем, да би се могао описати са аспекта кретања једне честице (једног произвољног молекула), али ако нас интересују карактеристике одређеног подскупа честица, развијена је теорија која успешно одговара на ова питања. На пример, колико молекула (од 10^{18} молекула) има брзину, импулс, енергију у неком познатом интервалу. Такође, можемо да одредимо и притисак гаса који настаје као последица удара молекула у зидове суда, као и температуру гаса. Приликом судара, молекули (атоми) нагло мењају брзину и убрзање, а закони који на најбољи начин описују ове сударе дају само вероватноћу да након судара молекул има одређени правац и брзину кретања. Дакле, морамо користити законе вероватноће и статистике. У термодинамици су стварне вредности притиска гаса, кинетичке енергије молекула гаса, итд. су врло брзо променљиве функције (услед великог броја судара у јединици времена) и јављају се као флуктуације са добро дефинисаним средњим вредностима. Управо ове средње вредности ми користимо за опис стања, док флуктуације занемарујемо. На графику су приказане флуктуације притиска гаса на зидове суда у функцији времена као и средња вр-

едност притиска.



За описивање термодинамичких система развијени су теоријски модели (физички закони), који дају расподеле физичких карактеристика атома према броју атома (молекула) који поседују те карактеристике. Ове функције нам омогућавају да израчунамо број молекула (атома) од укупног броја молекула (N) који нпр. имају брзине у интервалу од (v, $v+\Delta v$). Ова функција се назива Maxwell-Boltzmann-ова расподела и гласи:

$$f(v) = N\cdot\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m}{2k_B}\cdot\frac{v^2}{T}}$$

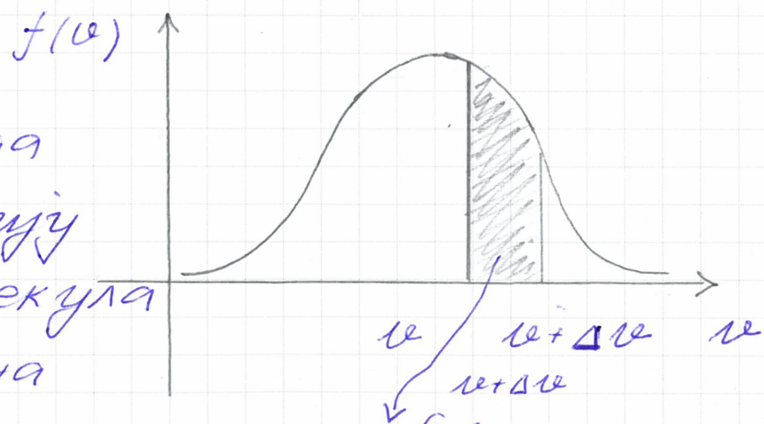
---

m - маса молекула (атома)

T - температура гаса

k_B - Boltzmann-ова константа

v - брзина молекула (атома) гаса



Претходна функција расподеле важи само када гас не размењује енергију са околином и број молекула гаса је константан. Она приближно важи ако гас размењује енергију са

$$N_{v,v+\Delta v} = \int_{v}^{v+\Delta v} f(v)\,dv$$

околином споро, тј. знатно дуже од временске константе система, која, за типичне системе у пракси, износи неколико ns. Такође, ова формула се сме применити само на честице чији је спин 0, а то су сви неутрални атоми и молекули. Ако посматрамо гас наелектрисаних честица (рецимо електронски гас) у таквој ситуацији ћемо за описивање система од N честица користити тзв. Fermi-Dirac-ову расподелу, која нам говори колики број честица које расподелом описујемо имају енергију у уском интервалу око унапред задате енергије E.

$$f(E) = \frac{N}{1 + e^{-\frac{E - E_F}{k_B \cdot T}}}$$

E_F - Fermi-јева енергија (она је константна за један систем)

N - укупан број честица

37. ТЕМПЕРАТУРА

Термодинамичка температура је макроскопски параметар (односи се на велики број честица) и представља меру унутрашње енергије система, тј. унутрашња енергија зависи од температуре. Код гасова сразмера је линеарна, а код чврстих тела експоненцијална. То практично значи да је средња кинетичка енергија тела на вишој температури већа од оне на нижој, односно честице топлијег тела имају већу средњу брзину кретања или осциловања од хладнијих. Температуру има смисла дефинисати (мерити) само за она физичка стања система, чија се расподела честица по брзинама или енергијама може описати функцијама расподеле, тј. систем мора бити изолован од околине. За мерење температуре користе се термометри, а принцип мерења се своди на довођење честица тер мометра (најчешће молекули течности која се користи у термометру, или атоми живе) у физички контакт са честицама система (молекули гаса). У сударима ових честица долази до размене енергије, па се термометар хлади или греје и када се тај процес заврши могуће је очитати температуру. Тада иста расподела (иста функција расподеле) важи како за честице термометра, тако и за честице система. Питање термодинамичке равнотеже између различитих система дефинише нулти принцип термодинамике:

Ако су системи A и B у термодинамичкој равнотежи са системом C, онда су они и у међусобној термодинамичкој равнотежи. Термодинамичка равнотежа значи да су системи између којих је успостављена на истој температури као и да важе исте функције расподеле за њихове честице (атоме, молекуле, јоне, ...).

Кроз историју су за мерење температуре коришћене различите температурне скале, а данас се користе следеће температурне скале: а) Келвинова, б) Целзијусова у Европи, в) Фаренхајтова у Америци, г) Реомирова. Свака скала има дефинисану 0. Келвиновој (која се назива и апсолутна нула јер се температура изражена у K назива апсолутном температуром) одговара стање потпуног мировања атома (0-та кинетичка енергија атома), Целзијусовој одговара тачка топљења леда при нормалним условима), док Фаренхајтова и Реомиро-

ва имају нуле које се изражавају преко келвино-
ве и Целзијусове нуле.
Практична реализација 0°C се остварује довођење-
м у контакт живиног термометра са смешом воде,
њене засићене паре и леда, када су све три нафроја-
не агрегатне фазе воде у међусобној термодинами-
чкој равнотежи (колико се леда отопи, толико се
воде заледи, колико воде испари, толико се паре ко-
ндензује). када се то дешава, сматрамо да је темп-
ература 0°C. Температура од нула келвина (0K)
одговара температури од -273,15 °C.
Веза између ове две скале је дата формулом:

$$t\,[°C] = T\,[K] - 273{,}15$$

док је веза између Фаренхајтове и Целзијусове
скале дата релацијом:

$$t\,[F] = \frac{9}{5}\,t\,[°C] + 32$$

38. ТЕРМИЧКО ШИРЕЊЕ

Све супстанце се шире при загревању (сем воде кој-
а се у интервалу од 0-4°C скупља при загревању, во-
да је најгушћа на 4°C). Експериментално је утврђе-
но да промена димензија тела зависи од:
1) првобитне димензије (пре загревања);
2) температурског интервала за који загревано;
3) врсте материјала од кога је тело израђено.
До ширења при загревању долази јер се средње раст-
ојање између атома повећава зато што атоми
имају веће кинетичке енергије и више се удаља-
вају један од другог при хаотичном кретању. Нека
је Δl промена дужине до које долази услед загрева-

ња. Као што смо навели Δl ће бити:

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta t \,,$$

α - линеарни коефицијент термичког ширења, (зависи од врсте материјала, а назива се и термички коефицијент линеарног ширења);

l_0 - дужина тела на $0°C$;

Δt - температурски интервал загревања.

Нека је $l(t)$ дужина тела на температури t.

Тада је Δl:

$$\Delta l = l(t) - l_0 = l(t) - l(0°C)$$

$$l(t) = l_0 + \alpha l_0 \Delta t = l_0(1+\alpha\Delta t)$$

$$\Delta t = t - 0°C = t$$

$\underline{l(t) = l_0(1+\alpha t)}$ / - зависност дужине тела од температуре и дужине на $0°C$.

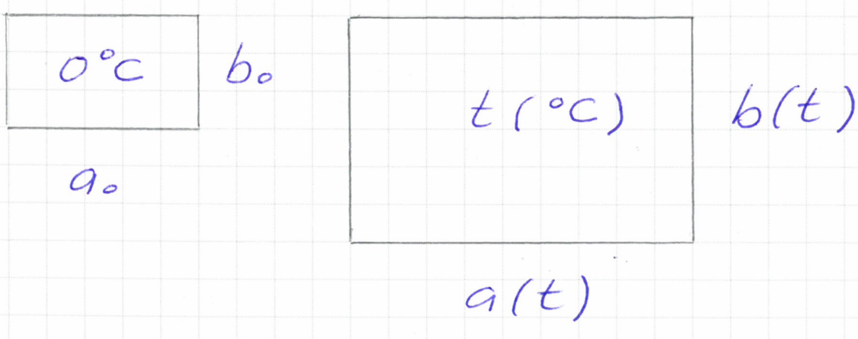
Ова формула важи у ограниченом интервалу температура. За шири опсег важи:

$l(t) = l_0(1+\alpha t+\alpha_1 t^2+\alpha_2 t^3+\dots)$, где су $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ коефицијенти који се експериментално утврђују.

Сада нас интересује како од температуре тела зависе његова површина и запремина:

Посматрамо равну плочу димензија a_0 и b_0 на $0°C$.

Површина плоче на $0°C$ је $S_0 = a_0 \cdot b_0$



Ако је закон промене дужине линеарна функција температуре, тада је површина плоче на температури t

$$S(t) = (1+\alpha t)^2 a_0 b_0 = a_0 b_0 (1+\alpha t)^2 = S_0 (1+\alpha t)^2$$

$$S(t) = S_0 (1 + 2\alpha t + \alpha^2 t^2)$$

Како је за метале и већину чврстих материјала $\alpha \sim 10^{-5} - 10^{-6} \frac{1}{°C} \Rightarrow \alpha^2 \sim 10^{-10} - 10^{-12} \frac{1}{°C^2}$ па је $2\alpha \gg \alpha^2$ тј. $2\alpha t \gg \alpha^2 t^2$, ако је $t \sim 10^2 °C$ па се члан $\alpha^2 t^2$ занемарује у односу на $2\alpha t$ тј.

$$S(t) = S_0 (1 + 2\alpha t), \quad 2\alpha = \beta$$

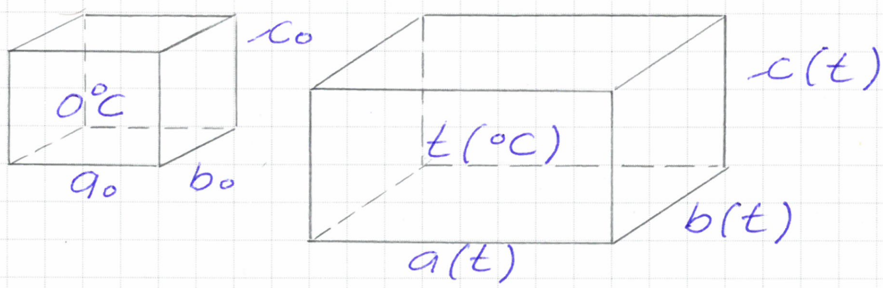
$\underline{S(t) = S_0 (1+\beta t)}$ - зависност површине тела од температуре и површине на $0°C$

$\beta = 2\alpha$ - површински коефицијент термичког ширења

Напомена:

Површина шупљине се такође повећава по истом закону (нпр. код прстена).

Сада посматрајмо тело димензија a_0, b_0, c_0 на температури $0°C$, чија је запремина на истој температури $V_0 = a_0 \cdot b_0 \cdot c_0$



Загревањем тела до температуре t (°C) добијамо да су димензије тела на температури t, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, а запремина на истој температури постаје:

$$V(t) = a(t)\, b(t) \cdot c(t)$$

Поново претпостављајући линеарну везу између температуре и димензија, добијамо да је:

$$V(t) = \underbrace{a_0(1+\alpha t)}_{a(t)} \underbrace{b_0(1+\alpha t)}_{b(t)} \cdot \underbrace{c_0(1+\alpha t)}_{c(t)}$$

$$V(t) = a_0 b_0 c_0 (1+\alpha t)^3 = V_0(1+3\alpha t+3\alpha^2 t^2+\alpha^3 t^3)$$

Из истих разлога као и код површине чланови $3\alpha^2 t^2$ и $\alpha^3 t^3$ су занемарљиви у односу на $3\alpha t$ па имамо:

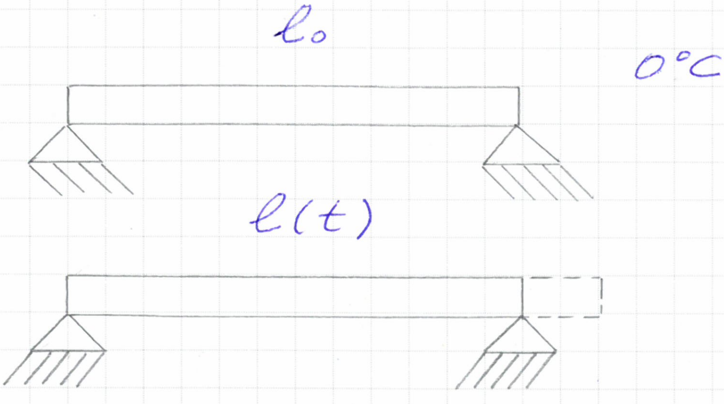
$$V(t) = V_0(1+3\alpha t) = V_0(1+\gamma t), \quad \gamma = 3\alpha$$

γ - запремински коефицијент термичког ширења

$$\underline{V(t) = V_0(1+\gamma t)}$$

39. ТЕРМИЧКО НАПРЕЗАЊЕ

Посматрамо идеално еластичну шипку дужине l_0 на 0°C, која је фиксирана на својим крајевима за непокретне ослонце.



Сила у шипки на 0°C је нула. Када се шипка загреје до температуре t, у њој се јавља напрезање на сабијање. Нека је $l(t)$ дужина коју би шипка имала на температури t да није укљештена. Пошто је њена стварна дужина за $\Delta l = l(t) - l_0$ краћа због дејства ослонаца, у њој се, према Hooke-овом закону, јавља нормално затезање

$$\sigma = E_y \frac{\Delta l}{l_0} = E_y \frac{l_0(1+\alpha t) - l_0}{l_0} = E_y \frac{l_0 \alpha t}{l_0}$$

$$\underline{\sigma = E_y \alpha t}$$

$F = \sigma \cdot S = SE_y \alpha t$ - сила у шипки је линеарно сразмерна температури и површини попречног пресека

40. ТЕРМИЧКО ШИРЕЊЕ ТЕЧНОСТИ

За разлику од чврстих тела, течности немају сталан облик, већ облик суда у коме се налази. Зато није погодно описивати ширење течности преко линеарних димензија њеног облика. Зато пратимо промену густине са температуром:

$\rho = \dfrac{m}{V(t)}$, $V(t)$ - температурна зависност запремине

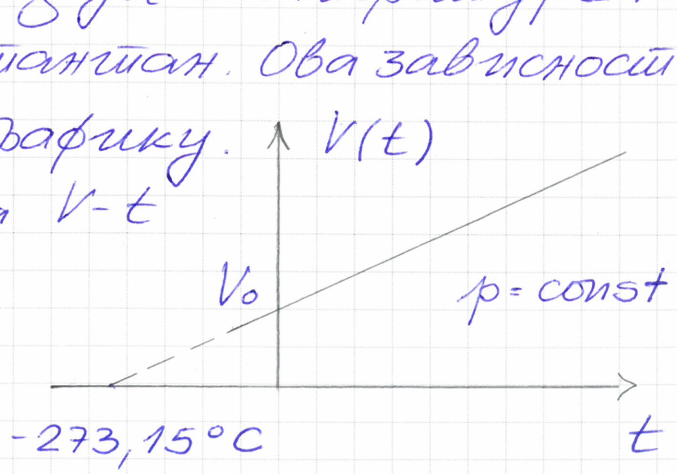
m - маса течности

$$\rho = \frac{m}{V_0(1+3\alpha t)} = \frac{\frac{m}{V_0}}{1+\mu t} = \frac{\rho_0}{1+\mu t}, \quad \rho_0 = \rho(0°C)$$

$$\mu = 3\alpha$$

41. ТЕРМИЧКО ШИРЕЊЕ ГАСОВА

Као и код течности, за праћење промена гаса при загревању уводе се температурске зависности притиска и запремине гаса. Године 1787. Шарл је открио експерименталним путем законитост промене запремине гаса у функцији температуре када је притисак гаса константан. Ова зависност је приказана на следећем графику.



Једначина праве линије на V-t дијаграму:

$V(t) = V_0 \left(1 + \dfrac{1}{273,15} \cdot t\right)$,

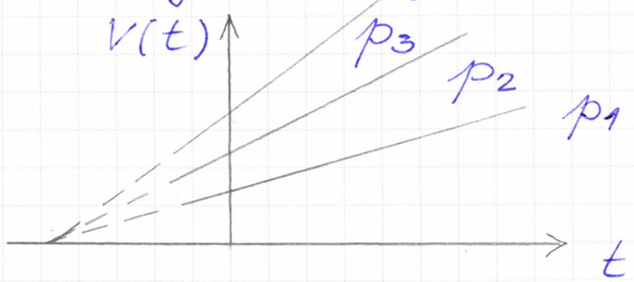
где је V_0 запремина гаса на 0°C. Запремина гаса падне на 0°C на температури $t = -273,15\ °C$. Преуредимо мало претходни израз:

$$V(t) = \frac{V_0}{273}(273 + t)$$

$$V(T) = \frac{V_0}{273} \cdot T\ (K)$$

$$V \sim T$$

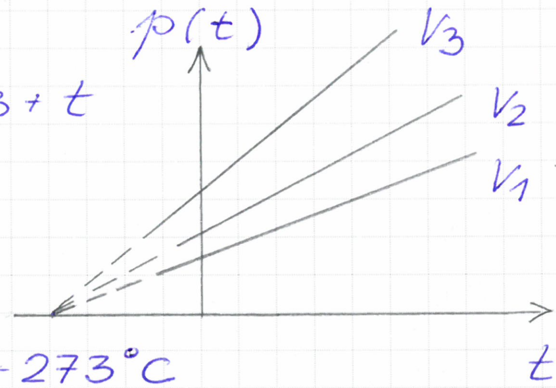
Ако се експеримент изводи са истим гасом, али при различитим притисцима p_1, p_2 и p_3, резултати се могу приказати на следећи начин:



$p_1 > p_2 > p_3$

Ако у експерименту гасу одржавамо константну запремину гаса и пратимо промене притиска у зависности од температуре, долазимо до следеће, експериментално установљене, зависности између ових величина.

$$p(t) = p_0\left(1 + \frac{1}{273}t\right) \qquad T = 273 + t$$



$$p(T) = \frac{p_0}{273} \cdot T$$

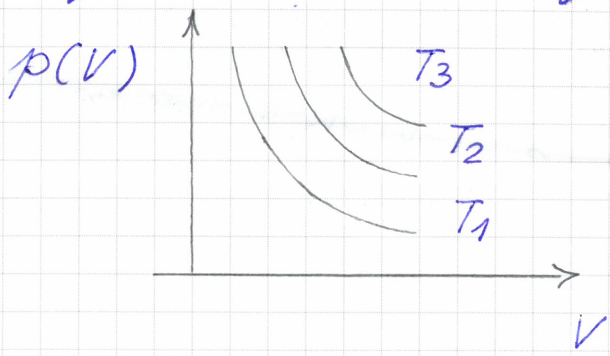
$$p(T) \sim T \qquad p_0 = p(0°C)$$

$V_1 > V_2 > V_3$

Дакле, притисак је сразмеран температури.

42. BOYLE-MARIOTTE-ОВ ЗАКОН

Boyle-Mariotte-ов закон представља експериментално откривен закон који даје зависност притиска и запремине гаса када је температура const. На слици је дата ова зависност за три различите температуре гаса. Криве су хиперболе што указује да је притисак $p = \frac{const}{V}$, односно $p \sim \frac{1}{V}$ односно $V \sim \frac{1}{p}$.



$T_3 > T_2 > T_1$

43. АВОГАДРОВ ЗАКОН

Сви гасови на температури $T_0 = 273,15\,K$, притиску од $p_0 = 101325\,Pa$ и запремини од $V_0 = 22,415 \cdot 10^{-3}\,m^3$ (нормални услови) имају исти број молекула, и тај број износи

$$N_A = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ молекула (атома)}$$

Авогадров број (Амадео Авогадро)

Из овог закона се може извести следећа зависност између запремине и броја честица: При нормалним условима (p_0, T_0) запремина гаса је управо сразмерна броју молекула.

Ово можемо закључити из примера. Нека имамо две запремине истог гаса, тј. $2V_0$, у којој ће бити $2N_A$ молекула гаса. Ако уведемо појам mol-а: $n \overset{def}{=} \frac{N}{N_A}$ N - број молекула, онда претходно изведен закључак гласи: $V \sim n$.

ЈЕДНАЧИНА СТАЊА ИДЕАЛНОГ ГАСА:

У претходним лекцијама смо видели какве су зависности између термодинамичких параметара p, V, T које су установљене експерименталним путем. Ове зависности се могу представити само једном формулом, која се назива једначина стања идеалног гаса. Наиме,

$$V \sim (n, T, \frac{1}{p})$$

$$p \sim T$$

$$V = \frac{const\, n\, T}{p}$$ Непознату константу одређујемо помоћу Авогадровог закона, доводећи гас на нормалне услове. Тада важи:

$$V_0 = \frac{const\, n \cdot T_0}{p_0} \Rightarrow const = \frac{p_0 V_0}{n T_0}$$

У Авогадровом закону $n = 1$ па је

$$const = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{22{,}415 \cdot 10^{-3}\, 101325}{273{,}15} \frac{J}{mol\, K}$$

$const = 8.314 \frac{J}{mol\, K}$ и назива се универзална гасна константа и обележава се са $R = 8.314 \frac{J}{mol\, K}$

Коначно:

$$V = \frac{nRT}{p} \quad \text{односно} \quad pV = nRT$$

14. 02. 2005.

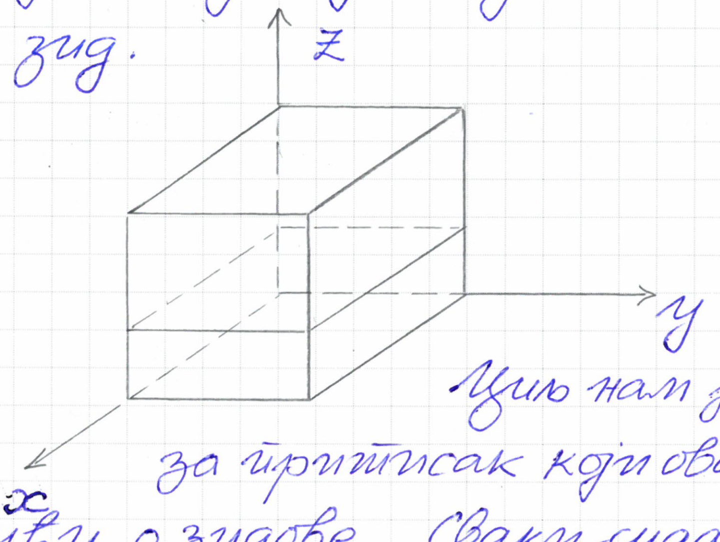
44. ПРИТИСАК ГАСА СА МИКРОСКОПСКЕ ТАЧКЕ ГЛЕДИШТА. СРЕДЊА БРЗИНА МОЛЕКУЛА

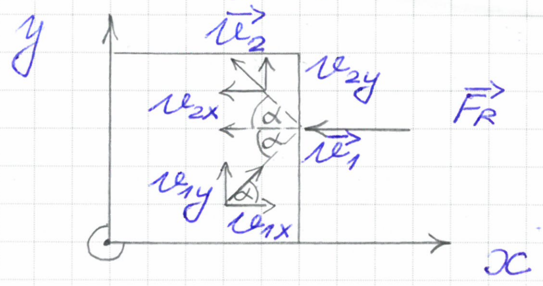
Гасови су супстанце чији се молекули слободно крећу између два узастопна судара при чему прелазе растојања која су просечно 10 пута већа од њихових димензија.

Средња кинетичка енергија им је довољно велика (судари су довољно снажни) да се надвлада привлачна Ван дер Валсова сила која тежи да споји молекуле и изазове кондензацију гаса (паре).

Посматрајмо молекуле гаса затворене у коцки, запремине L^3, која има идеално круте зидове са аспекта судара молекула гаса са зидовима суда.

Уочимо једну раван која сече коцку паралелно xOy равни и замислимо кретање једног јединог моле кула које се одвија у тој равни. Ово је сасвим реал-на претпоставка, ако су судари молекула са зидовима суда идеално еластични, јер тада молекул и пре и после судара има исти интензитет брзине, и одбија се од зида под истим углом под којим пада на зид.





Циљ нам је да изведемо израз за притисак који овај молекул ствара ударајући о зидове. Сваки судар са зидом суда можемо замислити као дејство зида на молекул силом реакције F_R, која мења импулс молекулу за износ утврђен II Newton-овим законом тј. $\vec{F_R} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \tau}$ $\Rightarrow$ $\Delta \vec{p} = \vec{F_R} \cdot \Delta \tau$, $\Delta \tau$ - време трајања судара, $\Delta \vec{p}$ је промена вектора импулса молекула. По дефиницији:

$$\Delta \vec{p} = m\vec{v_2} - m\vec{v_1} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$

Пошто сила $\vec{F_R}$ делује дуж x-осе, она мења импулс молекулу само дуж тог правца (погледати II Newton-ов закон, $\vec{F_R} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta \tau}$). Дакле,

$$\Delta p_x = m(\underbrace{-}_{\text{смер супротан смеру x-осе}} v_{2x} - v_{1x})$$

Како је $v_{1x} = v_1 \cos\alpha$, а $v_{2x} = v_2 \cos\alpha$ $\Rightarrow$ $|v_{1x}| = |v_{2x}|$ јер је $|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}|$ па је:

$$\Delta p_x = m(-v_{1x} - v_{1x}) = -2m v_{1x}$$

Пошто је вектор $\Delta \vec{p}$ орјентисан у супротном смеру од x-осе, то је и његова пројекција на x-осу

$\Delta p_x < 0$, па је

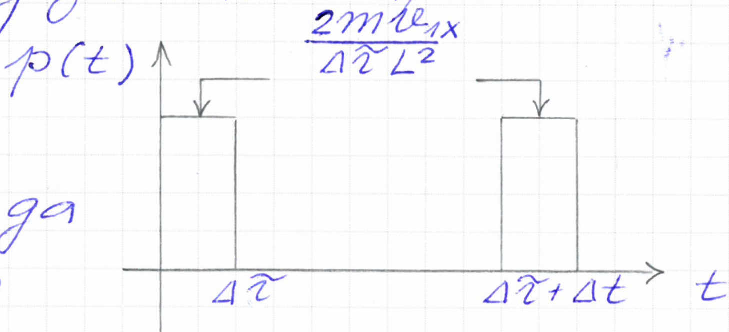
$-\Delta p_x = -2mv_{1x}$

$\Delta p_x = 2mv_{1x}$ / Сада је сила: $F_R = \dfrac{\Delta p_x}{\Delta \tau} = \dfrac{2mv_{1x}}{\Delta \tau}$

а притисак $p = \dfrac{F_R}{S} = \dfrac{2mv_{1x}}{\Delta \tau \cdot L^2}$

$p = \dfrac{2mv_{1x}}{\Delta \tau \cdot L^2}$ ~ притисак једног молекула на зид суда при једном удару

Нацртајмо временску зависност притиска на један зид суда:



Δt - време које је потребно молекулу да се поново врати до истог зида након одбијања

Након удара молекул се удаљава од зида дуж правца нормале брзином v_{2x} и та брзина се неће променити ни после удара у наредни зид насмици, јер тада сила F_R делује дуж y-осе и мења y-компоненту импулса. После удара о насрамни зид поново се очувава x-компонента брзине ($v_{1x} = v_{2x}$) што значи да се молекул креће тако да му је све време x-компонента брзине иста. v_{1x} је заправо брзина директног удаљавања од зида (по правцу управном на раван зида). Молекул се, наравно, не креће на описани начин, али са аспекта времена Δt испада да је тако, тј. као да се удаљава и приближава нашем зиду директном брзином $v_{1x} = const$. Дакле $\Delta t = \dfrac{2L}{v_{1x}}$ јер молекул два пута пређе дужину коцке крећући се брзином директно од и ка зиду v_{1x}, која се не мења услед судара.

Типичне брзине молекула у гасовима су реда величине $\sim 10^3 \frac{m}{s}$. Пошто су димензије посуде (суда) реда величине 1 m то значи да ће наш молекул 1000 пута да удари у зидове за време од 1 s и тако направи 1000 импулса из претходног излагања. Дакле, има смисла одредити средњи притисак у дужем временском интервалу и сматрати да је тај притисак перманентан тј. константан, а не импулсан. Нађимо средњу вредност притиска са слике:

$$p_{sr} = \frac{1}{\Delta\tilde{t} + \Delta t} \int_0^{\Delta\tilde{t}+\Delta t} p(t)\,dt$$

$$p_{sr} = \frac{1}{\Delta\tilde{t} + \Delta t} \left(\int_0^{\Delta\tilde{t}} p(t)\,dt + \cancel{\int_{\Delta\tilde{t}}^{\Delta\tilde{t}+\Delta t} p(t)\,dt} \right) \quad \equiv 0$$

$$p_{sr} = \frac{1}{\Delta\tilde{t} + \Delta t} \cdot \frac{2mv_{1x}}{\Delta\tilde{t}\, L^2} \int_0^{\Delta\tilde{t}} dt = \frac{2mv_{1x}}{\Delta\tilde{t} + \Delta t} \cdot \frac{\Delta\tilde{t}}{\Delta\tilde{t} \cdot L^2}$$

$\Delta\tilde{t} + \Delta t \cong \Delta t$, $\Delta t >>> \Delta\tilde{t}$ судар много краће траје него интервал који протекне између два судара

$$\boxed{p_{sr} = \frac{2mv_{1x}}{\Delta t \cdot L^2}}$$ — средњи притисак једног молекула на један зид у дужем временском интервалу (може 1 s)

$$\Delta t = \frac{2L}{v_{1x}} \qquad p_{sr} = \frac{2mv_{1x}}{\frac{2L}{v_{1x}} \cdot L^2} = \frac{mv_{1x}^2}{L^3} = \frac{mv_{1x}^2}{V}$$

$$\boxed{p_{sr} = \frac{mv_{1x}^2}{V}}$$ Нека се у посуди налази N молекула и нека се они крећу у већ поменутој равни. По аналогији у односу на формулу за средњи притисак једног молекула њих N ће правити <u>N пута већи средњи притисак</u>,

$$p_N = \frac{m}{V} \left(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \ldots + v_{Nx}^2 \right)$$

где су $v_{1x}, v_{2x}, \ldots, v_{Nx}$ компоненте брзина 1, 2, .., N-тог молекула дуж x-правца => молекули се крећу разлистим брзинама.

$$p_N = \frac{mN}{V} \cdot \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \ldots + v_{Nx}^2}{N}$$ $\langle v_x^2 \rangle$ средња вредност квадрата компонената брзина дуж x-правца за N молекула

$$p_N = \frac{mN}{V} \langle v_x^2 \rangle$$

Сада дозволимо молекулима да се крећу по читавој коцки па поново одредимо притисак. Због тога вектор брзине у овом случају поседује три компоненте v_x, v_y, v_z, а интензитет вектора брзине задовољава релацију $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Услед хаотичног кретања молекула (подједнако су вероватна кретања дуж x, y и z осе) средње вредности квадрата компонената брзине морају бити једнаке тј. $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. Дакле,

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

$$p_N = \frac{mN}{3V} \langle v^2 \rangle$$

$$p_N = \frac{m \cdot n \cdot N_A}{3V} \langle v^2 \rangle$$

Овим смо доказали Boyle-Mariotte-ов закон, јер видимо да је $p_N \sim 1/V$

$$p_N \cdot V = \frac{m \cdot n \cdot N_A}{3} \langle v^2 \rangle$$

$$pV = \frac{m n N_A}{3} \langle v^2 \rangle = nRT$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3RT}{m \cdot N_A}$$ – M - моларна маса

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Дакле средња брзина молекула је сразмерна квадратном корену температуре $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$

* Средњи притисак ће бити N пута већи када се сматра да се сви молекули крећу истом брзином тј. када се брзине $v_{1x}, v_{2x}, \ldots, v_{Nx}$ тј. њихови квадрати усре-

ђње

45. ТОПЛОТА

Топлота представља вид енергије који се размењује између система и околине путем хаотичних судара (хаотична интеракција), на граници система са околином, између молекула система и молекула околине.

Пошто су судари потпуно хаотични и у њима учествује енормно велики број молекула, теоријски је немогуће у сваком тренутку предвидети колики је размењени износ енергије између ових молекула. При свему томе ни макроскопски параметри који описују систем (P, V, T) не могу бити дефинисани док траје процес размене топлоте јер и они флуктуирају (мењају се). Оно што можемо да одредимо је износ размењене енергије (количину топлоте) анализом стања система пре и после размене, узимајући као параметре система средње вредности притиска и запремине, као и почетну и крајњу температуру. На пример, размењена топлота $\Delta Q = n c_v \Delta T$, ΔT - промена температуре, док су n и c_v константе које зависе од система.

У физици се уобичајно каже да топлота није функција стања физичког система, већ зависи од процеса. Ово значи да од читавог тока интеракције између система и околине зависи колика ће се енергија разменити у току самог процеса. Параметри стања система (нпр. притисак) све време док се процес одиграва флуктуир а и непознат је, па не можемо одредити размењену енергију у неком кратком временском интервалу.

Према усвојеној конвенцији, топлота доведена систему

је позитивна, а одведена топлота је негативна.
Топлота спонтано прелази са тела више на тело ниже температуре, што се објашњава чињеницом да у сударима брзих атома једне врсте са спорим атомима друге врсте, први успоравају, а други бивају убрзани што је последица закона одржања енергије и импулса, као и закона вероватноће.
Тела НЕ ПОСЕДУЈУ топлоту, већ унутрашњу енергију.
Топлота представља енергију коју тело размени са околином.

46. УНУТРАШЊА ЕНЕРГИЈА СИСТЕМА

је енергија садржана у систему и представља кинетичку енергију ХАОТИЧНОГ КРЕТАЊА молекула (кинетичку енергију сва три вида кретања молекула тј. транслације, ротације и вибрације). Дакле, у унутрашњу енергију не улази кинетичка енергија уређеног облика кретања молекула, тј. кретање молекула по правилним путањама. Наиме, тело као целина може да се креће по познатој путањи и да има кинетичку енергију дату изразом $E_k = \frac{mv^2}{2}$, али она не улази у биланс унутрашње енергије, јер то није хаотично кретање.
За разлику од топлоте, унутрашња енергија јесте функција стања система, јер је можемо теоријски израчунати ако знамо параметре система (P и V рецимо), иако се молекули хаотично крећу. Ово је могуће на основу средњих вредности ових величина. За идеалне гасове (касније ћемо видети какви су то гасови) унутрашња енергија је функција само темпера-

туре. Код реалних гасова она је функција и притиска и запремине. Идеални гасови имају велики значај у физици и техници и поседују следеће особине:

1) молекули су им идеално круте сфере занемарљивих запремина (занемарујемо сопствену запремину молекула);

2) молекули међусобно интерагују искључиво путем судара (не привлаче се и не одбијају на даљину, тј. занемарујемо међумолекуларне силе, јер сматрамо да су молекули прилично удаљени једни од других);

3) густина молекула у простору је иста у свакој тачки гаса;

4) судари између молекула су идеално еластични (важи закон одржања енергије $E_{пре\ судара} = E_{после\ судара}$).

Промена унутрашње енергије може бити условљена било разменом топлоте система са околином било вршењем механичког рада над околином, или системом. Утврђено је да се промена унутрашње енергије идеалног гаса, без обзира шта је њен узрок и без обзира на начин одвијања процеса увек може израчунати по формули:

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$, где су:

c_v - специфична топлота гаса при константној запремини,

n - број молова гаса,

ΔT - промена температуре.

Унутрашњу енергију, према дефиницији одређујемо као суму свих кинетичких енергија хаотичног кретања свих молекула (кинетичке енергије транслације, ротације и вибрације):

$$U = \sum_{i=1}^{N} E_{ki}^{(T)} + 2\sum_{i=1}^{N} E_{ki}^{(V)} + \sum_{i=1}^{N} E_{ki}^{(R)}$$

код вибрације имамо два вида енергије: кинетичку енергију вибрације и потенцијалну енергију интеракције између атома у молекулу. Њихове средње вредности су исте па се зато у горњем изразу испред сабирка који одговара кинетичкој енергији вибрације ставља 2.

21.02.2005.

47. СПЕЦИФИЧНА ТОПЛОТА

се дефинише као количник топлоте коју треба довести супстанци (јединици количине супстанце) да би се она загрејала за 1K (1°C).

$$C \stackrel{def}{=} \frac{\delta Q}{dT} \quad \left[\frac{J}{mol K}\right] \quad \text{или} \quad \left[\frac{J}{kg K}\right]$$

моларна специфична топлота ($n = 1 mol$) масена специфична топлота ($m = 1 kg$)

$c = \frac{\delta Q}{m dT}$ ~ топлота која загреје m килограма супстанце за 1K

$C = \frac{\delta Q}{n dT}$ ~ топлота која загреје n молова супстанце за 1K

Специфична топлота супстанце зависи од:

1) физичких услова загревања ($p = const$, $V = const$, итд);

2) од врсте супстанце (атомске структуре молекула;

3) од температуре.

1) При експерименталном одређивању специфичне топлоте (нпр. код гасова) морају се специфицирати услови загревања да би вредност специфичне топлоте

била стандардна (при датим условима она је иста у Јапану, Америци, Србији, итд). Обично дефинишемо два услова: загревање при константном притиску или при константној запремини и говоримо о специфичним топлотама при константном притиску (c_p) и при константној запремини (c_v):

$$c_p \overset{def}{=} \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{p=const} \qquad c_v \overset{def}{=} \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{v=const} \qquad \left[\frac{J}{mol\,K}\right]$$

подразумевамо $n = 1\,mol$ или $m = 1\,kg$

$[c_p] \,(=)\, \frac{J}{kg\,K}$ $\quad$ (=) - димензиона једнакост

$[c_v] \,(=)\, \frac{J}{kg\,K}$ $\quad$ Специфичне топлоте c_p и c_v се међусобно разликују по бројној вредности за сваку супстанцу из следећих разлога:

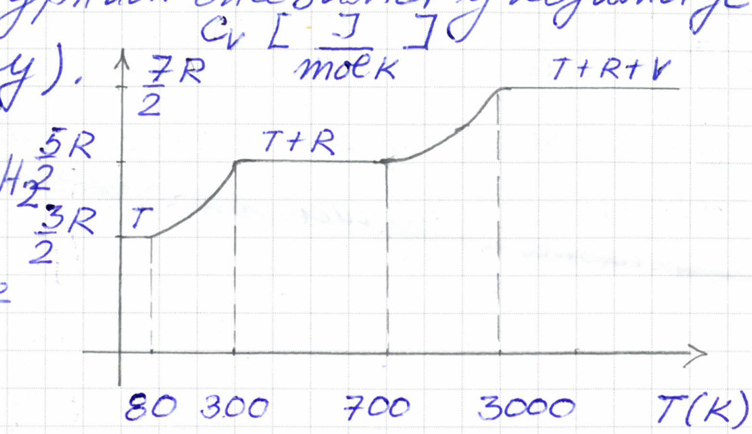
Ако доводимо δQ при константном притиску онда супстанци морамо дозволити да се шири иначе би јој притисак растао због повећања брзине молекула (доводимо топлоту). Пошто ширење тела можемо да схватимо као сабијање околине па је потребно утрошити енергију сабијања која иде на рачун доведене топлоте δQ. Обзиром да се топлота сада троши и на овај вид енергије (сабијање околине) потребно је уложити више топлоте него у случају када не би било ширења. Овај други случај одговара условима $V = const$ из чега закључујемо да је $c_p > c_v$. У овом случају ($V = const$) сва доведена топлота се троши само на загревање супстанце.

2) зависност специфичне топлоте од врсте супстанце:

Овде ћемо да одговоримо на следеће питање: Који је молекуларни механизам апсорпције топлоте неке суп-

стање и зашто се специфична топлота разликује од супстанце до супстанце?
Видели смо да загревањем повећавамо и унутрашњу енергију тела што значи да расте кинетичка енергија кретања молекула. Међутим, супстанца може да апсорбује топлоту, а да се при томе не повећава средња брзина кретања молекула, тј. средња кинетичка енергија транслаторног кретања молекула. Осим транслаторног, молекули могу да врше како ротационо тако и вибрационо кретање и за та кретања се каже да представљају унутрашње степене слободе молекула.
Ротацију и вибрацију молекула ни у ком случају не треба поистоветити са ротацијом и вибрацијом макротела. Наиме, и са бесконачно малим износом енергије можемо неко макротело заротирати (малом угаоном брзином). Међутим, за ротацију молекула је потребно уложити (обезбедити) извесну минималну количину енергије (то је тачно одређена вредност). Дакле, да би молекул започео и ротационо кретање мора му се довести минимум праг енергије за ротацију. Исто важи и за вибрацију. Што је сложенија структура молекула сложенији су и механизми апсорпције енергије кроз ротацију и вибрацију тј. број унутрашњих степени слободе расте.
3) Зависност специфичне топлоте од температуре:
На дијаграму је дата експериментално установљена зависност специфичне топлоте једног мола водоника од температуре при константној запремини. Са графика видимо да c_v зависи од температуре. Ова

зависности се објашњава различитим врстама кретања молекула гаса у температурним опсезима у којима је C_V константно (види слику).



Судари молекула су хаотични и након њих молекули имају различите кинетичке енергије (неко већу, неко мању). Значи молекул стиче или губи енергију сударајући се и ти износи су такође случајни. Ако се деси да молекул стекне довољно енергије да започне и ротационо кретање онда ће он то учинити са извесном вероватноћом. Већи износ енергије повећава вероватноћу започињања новог облика кретања молекула. За молекуле водоника температурни праг за започињање ротације је 80K. Сада молекул апсорбује топлоту у судару без повећања своје средње кинетичке енергије транслације, апсорбујући је у виду ротације. То се дешава до температуре од 300K када судари постају довољно „јаки" да сваки молекул гаса пре и после судара обавља ротацију. Дакле у интервалу 300-700K сви молекули водоника и транслирају и ротирају. Дакле, да би их загрејали за 1K морамо да утрошимо више енергије него када само транслирају. Од 700-3000K судари су толико снажни да поједини молекули почињу да вибрирају, па се доведена топлота троши и на овај вид унутрашње енергије (унутрашњег кретања, а не на загревање). Изнад 3000K сви молекули транслирају, ротирају и вибрирају па се доведена топлота

троши и на ове видове кретања тј. сада нам треба још више енергије да бисмо гас загрејали за 1K.
Једноатомни молекули (племенити гасови) немају вибрационе и ротационе степене слободе па им специфична топлота не зависи од температуре, као код двоатомних молекула.

48. СТЕПЕН СЛОБОДЕ КРЕТАЊА МОЛЕКУЛА И ТЕОРЕМА О ЕКВИПАРТИЦИЈИ ЕНЕРГИЈЕ

Степен слободе молекула у термодинамици повезујемо са бројем различитих начина кретања молекула преко којих они апсорбују топлоту (транслација, ротација, вибрација). Теорема о еквипартицији енергије каже да је у просеку, у скупу великог броја молекула, потребно утрошити исти износ енергије за сваки облик кретања. Дакле, за успостављање ротације свих молекула (један тип ротације) потребно је утрошити исту количину енергије као и када би они ротирали на неки други начин, или се кретали транслаторно дуж уоченог правца, или пак вибрирали на одређен начин. Одредићемо овај карактеристичан износ енергије који се односи на поменута кретања. Урадићемо то на примеру транслације тј. одредићемо кинетичку енергију молекула који се креће дуж x-осе. Полазимо од изведеног израза за притисак молекула на зидове суда

$$p = \frac{1}{3}\frac{nM}{V}\langle v^2\rangle$$

$$pV = \frac{1}{3} nM \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle \cdot \frac{2}{2}$$

$$PV = \frac{2}{3} nM < \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} >$$

$$PV = \frac{2}{3} n < \frac{Mv_x^2}{2} + \frac{Mv_y^2}{2} + \frac{Mv_z^2}{2} >$$

$$PV = \frac{2}{3} n \left(\underbrace{< \frac{Mv_x^2}{2} >}_{<E_{kx}>} + \underbrace{< \frac{Mv_y^2}{2} >}_{<E_{ky}>} + \underbrace{< \frac{Mv_z^2}{2} >}_{<E_{kz}>} \right)$$

$<E_{kx}>, <E_{ky}>, <E_{kz}>$ - средње кинетичке енергије 1 mol-a молекула (N_A броја молекула)

Како је $<v_x^2> = <v_y^2> = <v_z^2> \Rightarrow <E_{kx}> = <E_{ky}> = <E_{kz}>$

па је:

$$PV = \frac{2}{3} n \cdot 3 <E_{kx}>$$

$$nRT = 2n <E_{kx}>$$

$$<E_{kx}> = \frac{RT}{2} \quad / : N_A$$

$$<E_{kx}>_{1\ \text{молекула}} = \frac{1}{2} \frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{1}{2} kT$$

$k = \frac{R}{N_A}$ - тзв. Boltzmann-ова константа

$$\underline{<E_{kx}> = \frac{1}{2} kT}$$

Аналогно се добија да важи:

$<E_{ky}> = <E_{kz}> = \frac{1}{2} kT$ па сабирањем добијамо

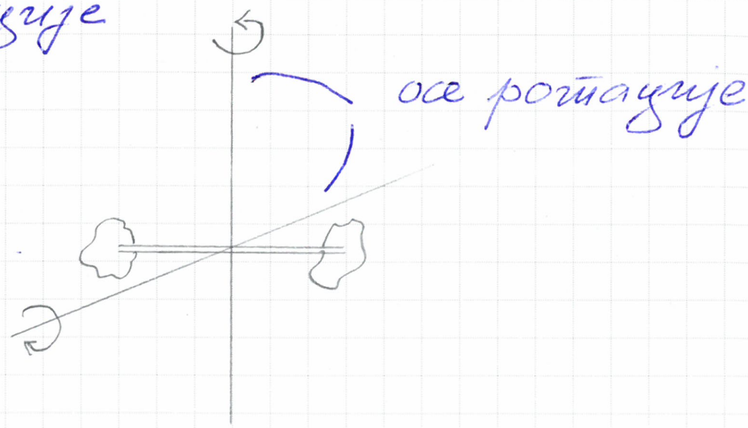
$$\underline{<E_k> = \frac{3}{2} kT}$$

- средња кинетичка енергија једног молекула

Дакле, на један степен слободе кретања отпада $\frac{1}{2} kT$ енергије. Теорема о еквипартицији тврди да и за друге видове кретања молекула (ротацију и вибрацију) по сваком степену слободе отпада исти износ енергије тј. $\frac{1}{2} kT$. Дакле, ако неки молекул транслира и ротира на два начина он има 5 степени слободе (транслација даје три степена слободе, а свака од ротација по један), па је средња кинетичка енергија таквог молекула $\frac{5}{2} kT$. Молекули са j степени слободе имају средњу кинетичку енергију од $\frac{j}{2} kT$.

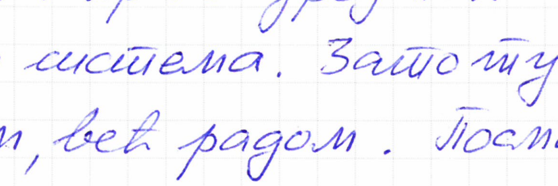
степен слободе j (њихов број) зависи од температуре и структуре молекула.

Пример: Двоатомни молекул гаса на собној температури: 2 начина ротације + 3 транслације



49. МЕХАНИЧКИ РАД У ТЕРМОДИНАМИЦИ

Када два термодинамичка система размењују енергију путем механичког рада, онда се сматра да је размена енергије извршена преко уређених облика кретања делова ова два система. Зато ту енергију не називамо топлотом, већ радом. Посматрамо гас затворен у хоризонталном цилиндру и лагани клип који може да клизи по ивицама цилиндра без трења. Молекули гаса га померају у десно, сударајући се са њим. Дакле енергија хаотичног кретања молекула се на описани начин преводи у уређено кретање молекула клипа. Предата енергија се назива рад гаса.



Рад сматрамо позитивним ако систем (гас) врши рад над околином (гас се шири), а негативним у случају да се рад врши над системом (гасом).

$p_1 > p_2$

По дефиницији рад представља скаларни производ силе и помераја $dA \overset{def}{=} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Ако је $\vec{F} \parallel d\vec{r}$ као

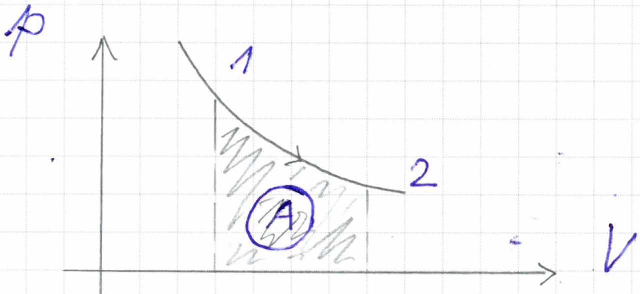
у случају нашег клипа, онда је $dA = F \cdot dr$. како је
$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S$ па је $dA = p \cdot \underbrace{S dr}_{dV} = p dV$

dV - инфинитезимална (бесконачно мала) промена запремине гаса

dA - инфинитезимално мали рад који је узрокује

Најопштије, притисак гаса се мења са запремином па је рад који гас изврши при ширењу од запремине V_1 до запремине V_2 једнак:

$$dA = p\,dV \quad \int$$
$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$



Рад има своју графичку интерпретацију на pV дијаграму. Рад је једнак шрафираној површини на pV дијаграму. Ако је $V_2 > V_1$, $A_{12} > 0$, а ако је $V_2 < V_1$, $A_{12} < 0$

Рад зависи од начина промене стања гаса (од облика криве $p(V)$). За рад важи исто што и за топлоту, тј. рад није ф-ја стања (не зависи од параметара стања p, V, T) већ од процеса (кретање клипа је последица случајних удара молекула и није могуће предвидети износ енергије коју молекули предају клипу.

50. ПРВИ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМИКЕ

Први принцип термодинамике је последица закона одржања енергије и импулса у природи примењених на термодинамичке системе. Он указује на могуће (физички дозвољене) трансформације следећих видова енергије из једног облика у други: топлоте, унутрашње енергије и рада. Први принцип термодинамике гласи: Топлота коју систем размени са околином у току термодинамичког процеса је узрок (последица) промене унутрашње енергије система и извршеног рада (над системом) над околином.

$$\delta Q = dU + \delta A$$

Овај принцип нам ништа не говори о току енергије у систему. Тим проблемом се бави други принцип термодинамике. Размењена топлота се израчунава по формули:

$\delta Q = ncdT$ (Ако се тело загрева топлота се доводи, па је $\delta Q > 0$, а ако се хлади топлота се одводи па је $\delta Q < 0$) (видети тзв. Peltijev efekat termoblade-гија).

$$dU = nc_v dT \text{ (увек!)}$$

$$\delta Q = nc_p dT \quad (p = const)$$

$$\delta Q = nc_v dT \quad (V = const)$$

$\delta A = pdV$ (знак рада зависи од промене запремине)

$$ncdT = nc_v dT + pdV$$

Изведимо сада тзв. Mayer-ову једначину: Полазимо од првог принципа термодинамике уз претпоставку да се ради о изобарском процесу ($p = const$):

$ncdT = nc_v dT + pdV$ - први принцип термодинамике исказан преко параметара стања система (p, V, T) и особина супстанце (n, c_v, c).

Како је $p = const$ важиће:

$$nc_p dT = nc_v dT + pdV$$

$$(c_p - c_v) ndT = pdV$$

$$c_p - c_v = \frac{pdV}{ndT}$$

Притисак изразимо преко температуре и запремине из једначине стања идеалног гаса:

$$pV = nRT \Rightarrow p = V^{-1} nRT$$

$$c_p - c_v = \frac{\cancel{n}RT}{\cancel{n}V}\frac{dV}{dT}$$

$$c_p - c_v = R \cdot \frac{TdV}{dT\,V}$$

овај члан је једнак 1 за идеалне гасове јер је

$$pdV = nRdT$$

$$\frac{\cancel{nRT}}{V}dV = \cancel{nR}dT$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

$$c_p - c_v = R$$

Ово је Mayer-ова једначина. Она показује за колико је c_p веће од c_v за 1 mol гаса.

51. СПЕЦИФИЧНЕ ТОПЛОТЕ ГАСОВА У ФУНКЦИЈИ БРОЈА СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ

Видели смо да специфична топлота зависи од температуре и структуре саме супстанце. Изведемо формуле које дају зависност специфичне топлоте од броја степени слободе. Посматрајмо гас при константној запремини. Изводимо формулу за c_v полазећи од првог принципа термодинамике:

$$\delta Q = dU + \delta A \quad \text{из } V = const \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \delta A = 0$$

$$\delta Q = dU$$

$$\delta Q = nc_v dT \quad \text{за } n = 1 \text{ mol добијамо}$$

$$c_v = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{d\langle E_k\rangle}{dT} \overset{1\text{ mol}}{=} \frac{d}{dT}\left(\frac{j}{2}RT\right)$$

$$c_v = \frac{j}{2}R$$

Ако је сада $p = const$ c_p можемо да одредимо користећи Mayer-ову формулу:

$$c_p = R + c_v = R + \frac{j}{2}R = \frac{j+2}{j} \cdot R$$

$$c_p = \frac{j+2}{j} \cdot R$$

Често се уводи однос $\mu = \frac{c_p}{c_v}$

$$c_v = \frac{R}{\mu - 1} \qquad c_p = \frac{\mu R}{\mu - 1}$$

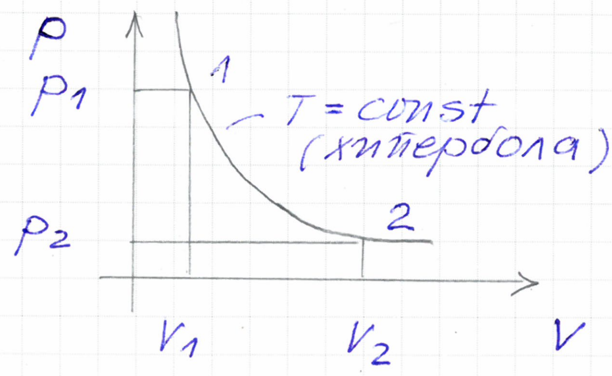
За двоатомни гас смо већ видели да је $j = 5$, па је $\mu = \frac{7}{5} = 1.4$

$$\mu = \frac{j+2}{j}$$

52. КАРАКТЕРИСТИЧНЕ ПРОМЕНЕ СТАЊА ИДЕАЛНИХ ГАСОВА

1) ИЗОТЕРМСКА ПРОМЕНА (Boyle - Mariotte -ов ЗАКОН)

$T = const$



1° ЈЕДНАЧИНА СТАЊА:

$pV = nRT = const$

$\underline{pV = const}$

$p_1V_1 = p_2V_2$

$p \sim \frac{const}{V}$

$V_2 > V_1$ изотермска експанзија (декомпресија)

$V_2 < V_1$ изотермска компресија

2° РАЗМЕЊЕНА ТОПЛОТА δQ:

$\delta Q = dU + \delta A$

$\delta Q = \cancel{nc_v dT}^{\to 0} + pdV$, $T = const \Rightarrow dT = 0$

$\underline{\delta Q = pdV}$

$Q = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \cdot dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2}$

$= nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$

$\underline{Q_{12} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}}$ $\quad V_2 > V_1 \Rightarrow Q_{12} > 0$ доводимо топлоту

$V_2 < V_1 \Rightarrow Q_{12} < 0$ одводимо топлоту

3° рад: $A_{12} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$

4° промена унутрашње енергије

$dU = 0$ јер је $dT = 0$ $\quad \underline{U_{12} = 0}$

2) ИЗОБАРСКА ПРОМЕНА СТАЊА ($p = const$)

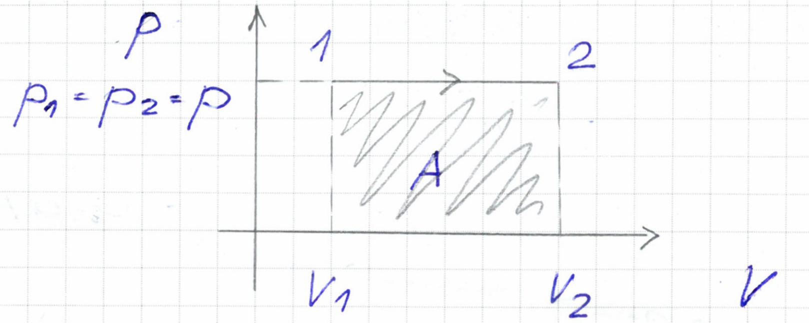
1° ЈЕДНАЧИНА СТАЊА:

$pV = nRT$, $p = const$

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = const$$

$$\frac{V}{T} = const$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$



$2°\ \delta Q$:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

$$Q_{12} = U_{12} + A_{12}$$

$$Q_{12} = U_{12} + p\int_{V_1}^{V_2} dV$$

$$Q_{12} = nC_v(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1)$$

$$\underline{Q_{12} = nC_p(T_2 - T_1)}$$

$3°\ \delta A$:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \qquad p = const$$

$$= p \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$$

$$\underline{A_{12} = p(V_2 - V_1)}$$

$4°\ dU$: $U_{12} = \int_{T_1}^{T_2} dU = \int_{T_1}^{T_2} nC_v\,dT = nC_v\int_{T_1}^{T_2} dT = nC_v(T_2 - T_1)$

$$\underline{U_{12} = nC_v(T_2 - T_1)}$$

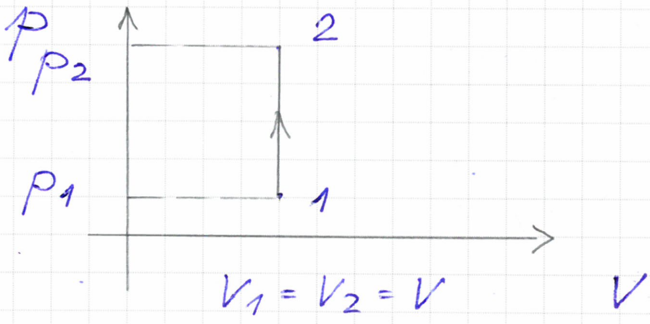
3) ИЗОХОРСКА ПРОМЕНА СТАЊА ($V = const$)

1° ЈЕДНАЧИНА СТАЊА:

$$pV = nRT$$

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V} = const$$

$$\frac{p}{T} = const \qquad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$



$2°\ \delta Q$: $\delta Q = dU + \delta A = dU + p\,dV$; $V = const \Rightarrow dV = 0$

$$\delta Q = dU = nC_v\,dT$$

$$Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} dU = \int_{T_1}^{T_2} nC_v\,dT = nC_v\int_{T_1}^{T_2} dT = nC_v(T_2 - T_1)$$

$3°\ dU$:

$$dU = \delta Q \Rightarrow \underline{U_{12} = nC_v(T_2 - T_1)}$$

$4°\ \delta A$: $\delta A = p\,dV = 0$ јер је $dV = 0$ ($V = const$)

$$\underline{A_{12} = 0}$$

4) АДИЈАБАТСКА ПРОМЕНА СТАЊА:

Када је размењена топлота једнака нули процес је адијабатски. Врло брзи процеси су обично адијабатски.

1° ЈЕДНАЧИНА СТАЊА:

Из првог принципа термодинамике:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

$$0 = dU + p\,dV$$

$$dU = n c_v\,dT$$

$$0 = n c_v\,dT + p\,dV$$

$$p\,dV = -n c_v\,dT$$

$$-n c_v\,dT = \frac{nRT}{V}\,dV$$

$$R = C_p - C_v$$

$$-c_v\,dT = \frac{(C_p - C_v)T\,dV}{V}$$

$$-c_v\frac{dT}{T} = (C_p - C_v)\frac{dV}{V} \quad \Big/ \int$$

$$-c_v\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = (C_p - C_v)\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$$

$$-c_v \ln\frac{T_2}{T_1} = (C_p - C_v)\ln\frac{V_2}{V_1} \quad /:c_v$$

$$\ln\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right)\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\ln\frac{T_1}{T_2} = (\kappa - 1)\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\ln\frac{T_1}{T_2} = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa - 1}$$

$$\underline{T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}}$$

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{nR} \qquad T_2 = \frac{p_2V_2}{nR}$$

$$\frac{p_1V_1}{nR}V_1^{\kappa-1} = \frac{p_2V_2}{nR}\cdot V_2^{\kappa-1}$$

$$\underline{p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa}}$$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1}$$

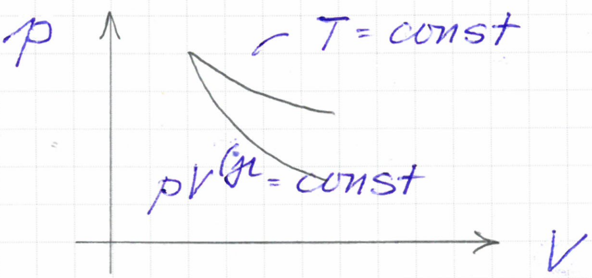
$$V_2 = \frac{nRT_2}{p_2}$$

$$p_1\left(\frac{nRT_1}{p_1}\right)^{\kappa} = p_2\left(\frac{nRT_2}{p_2}\right)^{\kappa}$$

$$\underline{p_1^{1-\kappa}T_1^{\kappa} = p_2^{1-\kappa}T_2^{\kappa}}$$

$$p \sim \frac{const}{V^{\kappa}} \qquad \kappa > 1$$

адијабата је стрмија од изотерме



2° δQ: $\quad \delta Q \overset{def}{=} 0$

3° δA: $\quad \delta A + dU = \delta Q$

$$\delta A = -dU = -n c_v\,dT$$

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} -n c_v\,dT = -n c_v(T_2 - T_1) = n c_v(T_1 - T_2)$$

$\underline{A_{12} = n c_v(T_1 - T_2)}$ за $T_2 > T_1 \Rightarrow$

$A_{12} < 0$

Ако се гас адијабатски хлади, рад који гас врши је позитиван, а ако се загрева, онда је рад негативан.

T_2 - крајња температура

T_1 - почетна температура

Ако се над гасом врши рад ($A<0$), гас се загрева (сабија), па је рад уложен у процес, тј. негативан је. Израз за рад се може добити и из саме дефиниције рада:

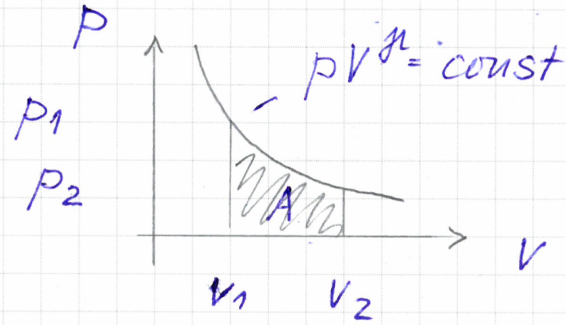
$\delta A = p dV$

$A = \int \delta A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \qquad pV^{\varkappa} = p_1 V_1^{\varkappa} \quad p_1, V_1$ - почетне вредности стања гаса $p(V) = \frac{p_1 V_1^{\varkappa}}{V^{\varkappa}}$

$$A = p_1 V_1^{\varkappa} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\varkappa}} = p_1 V_1^{\varkappa} \int_{V_1}^{V_2} V^{-\varkappa} dV = p_1 V_1^{\varkappa} \frac{V^{-\varkappa+1}}{-\varkappa+1} \Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{p_1 V_1^{\varkappa}}{1-\varkappa} \quad V_2^{1-\varkappa} - V_1^{1-\varkappa}$$

$$A = \frac{p_1 V_1^{\varkappa} V_1^{1-\varkappa}}{\varkappa - 1} \left(1 - \frac{V_2^{\varkappa-1}}{V_1^{\varkappa-1}}\right) = \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right)$$



28.02.2005.

53. ПОЛИТРОПСКА ПРОМЕНА СТАЊА ИДЕАЛНОГ ГАСА

Досада смо проучавали термодинамичке процесе код којих је нека од карактеристичних величина била константна ($p = const$, $V = const$, $T = const$ или $\delta Q = const$). Допустимо сада да се све термодинамичке величине мењају у процесу и пронађимо једначину тзв. ПОЛИТРОПСКОГ ПРОЦЕСА. Само један параметар је константан, а то је специфична топлота, тј. промене су такве да се „налазимо" на константном делу криве зависности специфичне топлоте од температуре (видети дијаграм $c_v(T)$ за водоник).

1° Најпре изводимо једначине стања политропског процеса. Како ни једна величина није константна, полазимо од првог принципа термодинамике: $\delta Q = dU + \delta A$. По дефиницији размењене топлоте, δQ и промене унутрашње енергије dU имамо:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

$$nc\,dT = nc_v\,dT + p\,dV$$

c - специфична топлота гаса, $c = const$

$$(c - c_v)\,n\,dT = p\,dV$$

Из једначине стања за идеалан гас p изразимо у функцији V и T тј. $p = \frac{nRT}{V}$, па тако добијамо једначину у којој од промењивих величина фигуришу само запремина и температура:

$$(c-c_v)\cancel{n}\,dT = \frac{\cancel{n}RT\,dV}{V} \quad \Big/ : T$$

$$(c-c_v)\frac{dT}{T} = R\frac{dV}{V} \quad \Big/ \int$$

$$(c-c_v)\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$$

$$\frac{c-c_v}{R}\ln\frac{T_2}{T_1} = \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{c-c_v}{R}} = \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{R}{c-c_v}}$$

Нама треба веза између притиска и запремине:

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} \qquad T_1 = \frac{p_1V_1}{nR}$$

$$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{R}{c-c_v}} \qquad R = c_p - c_v$$

$$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c_p-c_v}{c-c_v}} = \left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-1}\right)^{\frac{c_p-c_v}{c-c_v}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-\frac{c_p-c_v}{c-c_v}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\frac{c_p-c_v}{c-c_v}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{c-c_p}{c-c_v}}$$

$$\underline{p_1V_1^{\frac{c-c_p}{c-c_v}} = p_2V_2^{\frac{c-c_p}{c-c_v}}}$$ једначина политропског процеса

Ако ставимо да је:

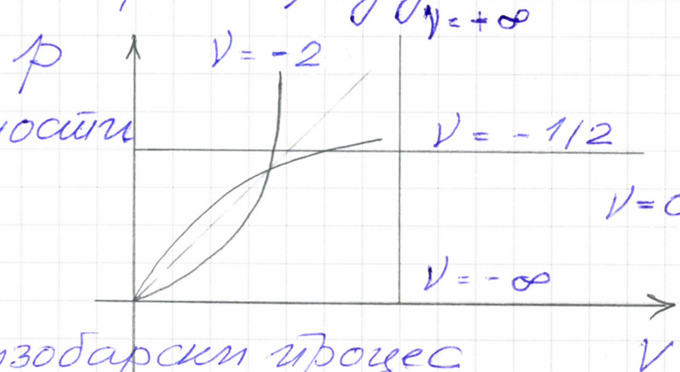
$$\nu = \frac{c - c_p}{c - c_V}$$, ν - експонент политропе

$$p_1 V_1^{\nu} = p_2 V_2^{\nu}$$ / По аналогији са адијабатским процесом једначина стања које повезују остале величине гласе:

$$T_1 V_1^{\nu - 1} = T_2 V_2^{\nu - 1}$$

$$p_1^{1-\nu} T_1^{\nu} = p_2^{1-\nu} T_2^{\nu}$$

Неке карактеристичне промене (за одређене вредности коефицијента политропе) су дате на слици:



Анализа различитих вредности за експонент политропе:

1° $\nu = 0$: $pV^0 = const$

$p = const$ - своди се на изобарски процес

$$\frac{c - c_p}{c - c_V} = 0 \Rightarrow c = c_p$$

2° $\nu = 1$: $pV^1 = const$

$pV = const$ - изотермски процес

$$\frac{c - c_p}{c - c_V} = 1 \Rightarrow c - c_p = c - c_V \text{ тј. } c_p = c_V$$

3° $\nu = \varkappa$ $pV^{\varkappa} = const$ - адијабатски процес

4° $\nu = \pm\infty$ $\frac{c - c_p}{c - c_V} \to \infty \Rightarrow c \to c_V$

$$pV^{+\infty} = const \;\Big|^{\frac{1}{\infty}}$$

$$V = \frac{const}{p^{\frac{1}{\infty}}} = \sqrt[\infty]{p} \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{p} = 1$$

$V = const$ - изохорски процес

5° $1 < \nu < \varkappa$

$$\nu = \frac{c - c_p}{c - c_V} \qquad c\nu - c_V \nu = c - c_p$$

$$c(\nu - 1) = c_V \nu - c_p$$

$$c = \frac{c_V \nu - c_p}{\nu - 1}$$

$c_V \nu < c_P$

$c_V \cdot \nu - c_P < 0 \Rightarrow c < 0$?

$c_V \cdot \nu - \varkappa c_V = c_V(\nu - \varkappa) < 0$

Коментар: C може да буде мања од нуле, ако гас при довођењу топлоте врши већи рад над околином него што је количина доведене топлоте. Разлику надокнађује из унутрашње енергије.

2° $\delta Q = ?$

$$\delta Q = n c \, dT$$

$$Q = n c (T_2 - T_1)$$

3° δA:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = p_1 V_1^{\nu} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\nu}} = p_1 V_1^{\nu} \frac{V^{1-\nu}}{1-\nu} \Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$p_1 V_1^{\nu} \frac{V_2^{1-\nu} - V_1^{1-\nu}}{1-\nu}$$

$$A = \frac{p_1 V_1^{\nu}}{\nu - 1} \left(V_1^{1-\nu} - V_2^{1-\nu} \right) = \frac{p_1}{\nu - 1} \left(V_1^{\nu} \cdot V^{1-\nu} - V_1^{\nu} V_2^{1-\nu} \right)$$

$$A = \frac{p_1 V_1}{\nu - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\nu - 1} \right)$$

4° dU.

$$dU = n c_V \, dT$$

$$\Delta U = n c_V (T_2 - T_1)$$

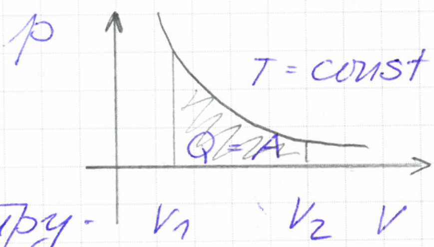
54. ДРУГИ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМИКЕ

Видели смо да први принцип термодинамике утврђује могуће трансформације енергије у термодинамичком систему (топлота се претвара у рад и унутрашњу енергију). Могући смерови одвијања трансформације енергије се не прецизирају. Рецимо, да ли је могуће сву доведену топлоту претворити у механички рад? Да ли топлота има смер простирања? На ова питања одговор даје други принцип термодинамике. Теоријски посматрано сву топлоту која се ослободи у току неког термодинамичког процеса могуће је претворити у рад у једном изотермском процесу, јер према првом принципу термодинамике важи:

$$\delta Q = dU + \delta A \quad , \quad T = const \quad dU = n c_v \underbrace{dT}_{0} = 0$$

$$\delta Q = \delta A$$

Међутим, у овом процесу радна запремина машине која претвара топлоту у рад би морала стално да расте, јер у изотермском процесу важи $Q = nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$, V_1 - почетна, V_2 - крајња запремина

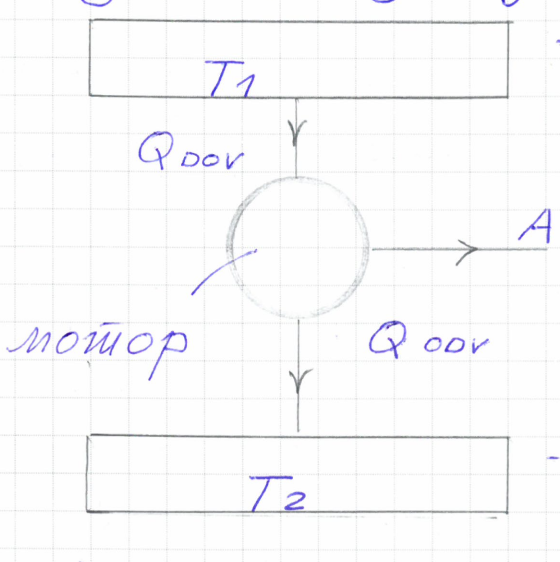


Други принцип термодинамике у вези са идеалном топлотном машином гласи: Није могуће конструисати машину која би без остатка топлоту преводила у рад, а да се не десе никакве промене у мотору и околини. Другим речима, немогућ је процес чији би се једини ефекат састојао у хлађењу топлотног резервоара за еквивалентан износ механичког рада. Ово је дефиниција која потиче од Келвина и Планка.

У нашем примеру изотермског мотора не мења се температура гаса као радног тела, али се мењају његова запремина и притисак, и то на, за нас, неповољан начин (V расте (мотор се повећава), а притисак тежи нули). Дакле, мора се омогућити циклична промена стања радног тела, тако да на крају једног циклуса p, V, T буде исто. На тај начин запремина мотора може да буде константна, а p и T се мењају у дозвољеном опсегу, који не оштећује машину. Али, други принцип термодинамике тврди да у оваквим цикличним моторима није могуће сву топлоту превести у рад.

ПРИНЦИП РАДА ТОПЛОТНОГ МОТОРА:

Топлотни мотор претвара топлоту у механички рад и мора да се састоји од бар два топлотна резервоара: једног на вишој (грејач) и једног на нижој (хладњак) температури. Принцип његовог рада је следећи: Топлоту из резервоара више температуре доводимо радном телу мотора, који даје механички рад на осовини, а део топлоте који се не претвори у рад предаје околини (топлотни губици). Принципијелна шема је дата на слици:



- резервоар на вишој температури (грејач)

- резервоар на нижој температури (хладњак)

Према принципу одржања енергије мора да важи:

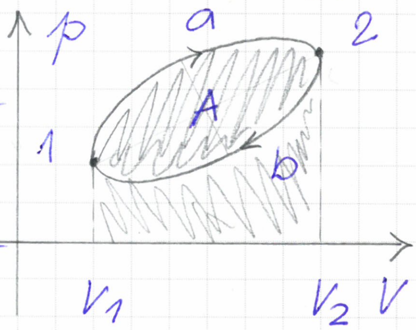
$Q_{dov} = A + |Q_{odv}|$, јер је одведена топлота по знаку негативна (тај знак је аутоматски уграђен за израчунавање одведене топлоте).

Уводимо појам ефикасности топлотне машине (тзв. коефицијент корисног дејства):

$\eta \stackrel{def}{=} \frac{A}{Q}$ — корисна претворена енергија (користан рад)
 — уложена енергија

$$\eta = \frac{Q_{dov} - |Q_{odv}|}{Q_{dov}} = 1 - \frac{|Q_{odv}|}{Q_{dov}}$$

Видимо да ефикасност топлотне машине никада није 100% (η је увек мање од 1, а веће од 0). Губици топлоте у виду Q_{odv} су неминовни јер је радно тело у контакту са конструкцијом мотора и због обично високих температура, оно греје и саму конструкцију мотора. Мотори врше цикличну промену стања радног тела, која се приказује на pV дијаграму на следећи начин:



Топлотни мотор обавља тзв. десно-кретни циклус.
Посматрано почетно стање радног тела у тачки 1, са притиском p_1 и запремином V_1 (V_1 - минимална запремина процеса) и у тачки 2, са запремином V_2 (V_2 - максимална запремина процеса) и притиском p_2. На делу циклуса од тачке 1 до 2 (преко a) врши се експанзија (ширење), а од тачке 2 до 1 (преко b) компресија (сабијање). На првом делу циклуса 1-a-2, рад радног тела је позитиван јер се повећава запремина (сабија се околина) (покреће се осовина), а он је на графику представљен шрафираном површином (испод дела криве 1-a-2, а изнад x-осе) и важи:

$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$, $dV > 0 \Rightarrow A_{12} > 0$. На делу од 2 до 1 рад је негативан јер је $dV < 0$ (на графику је он приказан шрафуром између дела криве 2-b-1 и x-осе) и дат је формулом:

$$A_{21} = \int_{V_2}^{V_1} p\,dV \quad , \; dV < 0 \;\Rightarrow\; A_{21} < 0$$

Укупан рад мотора у једном циклусу је
$A = A_{12} + A_{21}$ и једнак је површини ограниченој затвореном кривом 1-a-2-b-1. Дакле, користан рад који даје мотор у једном циклусу једнак је површини оивиченој кривом којом је циклус представљен на pV дијаграму. Треба уочити да код цикличних мотора постоји фаза (део циклуса) када се код њих улаже механички рад (површина оивичена делом криве од 2-b-1 и x-осом), али је укупан користан рад мотора већи од нуле, јер важи $A_{12} > |A_{21}|$. Укупна размењена топлота између мотора и околине се израчунава из првог принципа термодинамике:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

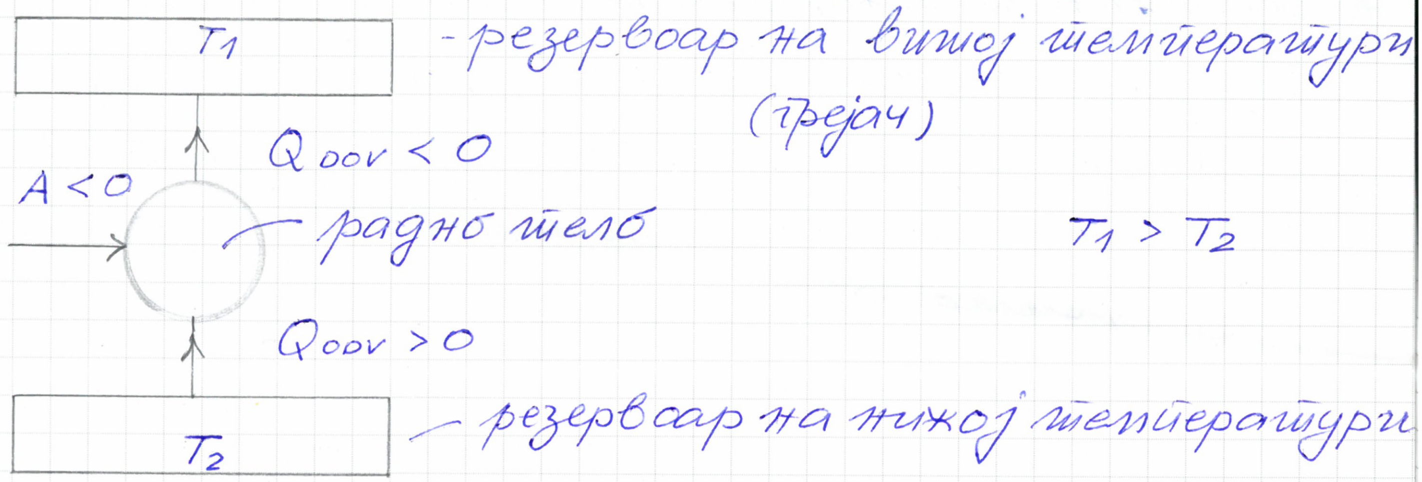
криволинијски интеграл II врсте

$$\oint \delta Q = \oint dU + \oint \delta A \;, \quad \oint dU = U_1 - U_1 = 0$$

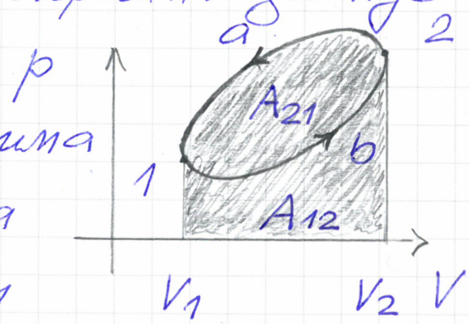
$$Q_{dov} - |Q_{odv}| = A$$

ТОПЛОТНА ПУМПА И ДРУГИ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМИКЕ:

Други принцип термодинамике се може дефинисати и преко појма идеалне топлотне пумпе: Не постоји идеална топлотна пумпа, која без уложеног рада транспортује топлоту од резервоара на нижој (хладњак) до резервоара на вишој температури (грејач). Ова дефиниција се приписује Клаузијусу. Принцип рада топлотне пумпе је дат на следећој слици:



Топлотна пумпа користи механички рад који се у њу улаже (A) да би формирала левокретни циклус над радним телом. На делу циклуса од 1 до 2 радно тело одузима топлоту расхладној комори, а на делу од 2 до 1 се радно тело (неки гас) сабија, загрева и одаје топлоту резервоару на вишој температури. На тај начин (уз помоћ механичког рада (A) топлота струји од ка топлијем телу. Површина ограничена кривом 1-b-2-a-1 је негативна и представља уложени рад у току једног циклуса:



$$A = A_{12} + A_{21} < 0$$

Ефикасност топлотне пумпе се дефинише уз помоћ два коефицијента: коефицијента грејања (β_G) и коефицијента хлађења (β_H):

$$\beta_G \overset{def}{=} \frac{|Q_{oov}|}{|A|} = \frac{|Q_{oov}|}{|Q_{oov}| - Q_{oov}}$$

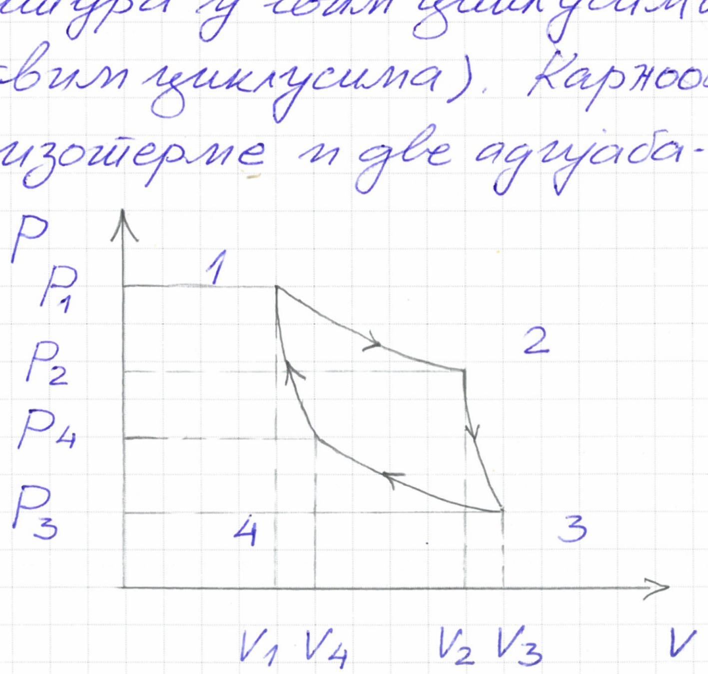
$$\beta_H \overset{def}{=} \frac{Q_{oov}}{|A|} = \frac{Q_{oov}}{|Q_{oov}| - Q_{oov}}$$

Коефицијенти хлађења и грејања су већи од јединице и описују ефикасност рада топлотних пумпи када оне хладе и греју. Топлотне пумпе су фрижидери ако је је резервоар на нижој температури расхладна комора. Ако је резервоар на вишој температури просторија коју треба загревати, онда су топлотне пумпе системи за загревање. Оне се данас широко користе за загревање просторија у зимском периоду тако што се топлота транспортује из хладне околине у загрејане просторије уз утрошак механичког рада који представља погон за ове уређује. Како је $\beta_G > 1$, доведена топлота у просторију када се загрева $|Q_{dov}| = \beta_G \cdot |A|$, што значи да се више топлоте добија него што се рада улаже (више се топлоте добије од уложене електричне енергије).

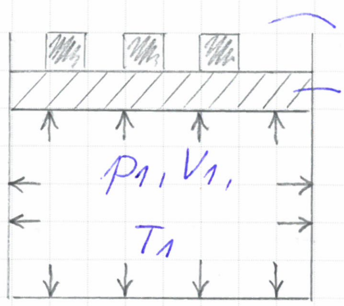
Carnot-ов циклус: 07. 03. 2005.

САДИ КАРНО ~ ФРАНЦУСКИ ИНЖЕЊЕР 1824.

Од свих могућих термодинамичких циклуса Карноов циклус има највећи коефицијент корисног дејства. При томе сматрамо да сви циклуси које смо поредили са Карноовим раде између два топлотна резервоара, једног на вишој, а другог на нижој температури (које су за све ове циклусе једнаке, T_1 - виша температура у свим циклусима, T_2 - нижа температура у свим циклусима). Карноов циклус се састоји из две изотерме и две адијабате:

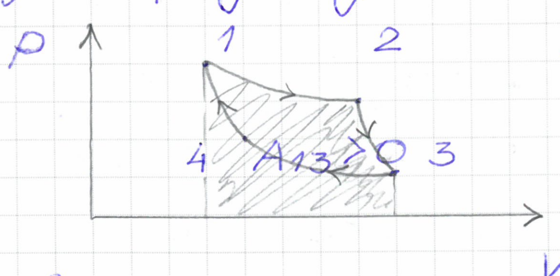


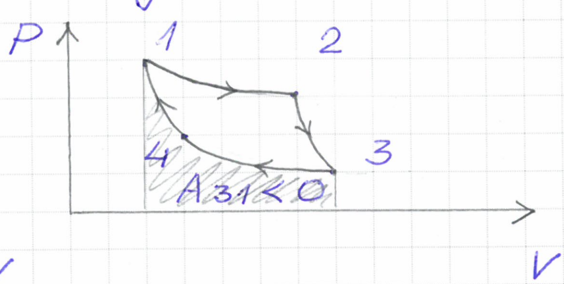
Ефикасност Карноове машине не зависи од избора радног тела. Нека је радно тело идеалан гас затворен у цилиндру (вертикалан цилиндар је у питању), чији су бочни зидови идеално топлотно изоловани, а са горње стране се налази клип са теговима који не проводи топлоту. Дно цилиндра идеално проводи топлоту, тј. има нулту термичку ~~от~~отпорност. Нека је гас на притиску p_1 температури T_1 и запремини V_1. Клип може да клизи без трења по унутрашњости цилиндра и на почетку мирује, јер је његова тежина заједно са теговима уравнотежена силом притиска молекула гаса који одоздо ударају у клип.



Нека је почетно стање гаса означено бројем 1 на pV дијаграму.

Преводимо гас изотермски у стање 2. На дно цилиндра прислањамо топлотни резервоар температуре T_1 (исте температуре као и гас) и постепено скидамо тегове. Клип се помера навише, запремина гаса расте, а притисак опада. Гас има тенденцију да се хлади јер врши рад. Међутим, доводи га топлотни резервоар и одржава му температуру константном. Процес се одвија врло споро. Овим смо гас довели у стање 2 (параметри p_2, V_2, T_1). Сада уклонимо топлотни резервоар и заменимо га идеалним топлотним изолатором. Настављамо са скидањем тегова али се експанзија (ширење) гаса одвија по адијабатском процесу, јер је гас термички изолован од околине. Његова температура у току процеса 1->2 опада, јер гас врши рад (подиже клип и тегове) на рачун своје унутрашње енергије, услед чега се молекули успоравају. Стигли смо у тачку 3. Сада је гас на притиску p_3, температури T_2 и запремини V_3. До ове тачке гас је вршио рад (подизао клип и тегове). Сада гас морамо да вратимо у почетно стање. Зато морамо да улажемо рад у циклус. Најпре гас сабијамо изотермски на делу 3 → 4. Дно цилиндра (након што смо уклонили топлотни изолатор) доводимо у контакт са резервоаром топлоте на нижој температури T_2. Додавањем тегова лагано сабијамо гас да се не загреје. Топлота из гаса струји у резервоар јер мора постојати бар бесконачно мало загревање, односно гас је на бесконачно мало вишој температури од температуре резервоара. Стижемо до тачке 4 када дно цилиндра поново прекривамо топлотним изолатором и сабијање настављамо даљим додавањем тегова, али сада адијабатски, што доводи до загревања гаса, даљег повећања притиска и довођења гаса у почетно стање 1. Рад уложен на сабијање гаса од 3 – 4 – 1 је мањи од добијеног рада од 1-2-3. Објашњење:





Добијени рад од машине у једном циклусу је A_{13}, а уложени рад је A_{31} и по апсолутном износу је $|A_{31}| < A_{13}$ тј. уложени рад је мањи од добијеног. Израчунајмо коефицијент корисног дејства ове машине.

$$\eta = \frac{A}{Q_{dov}} = \frac{Q_{dov} - |Q_{odv}|}{Q_{dov}} = 1 - \frac{|Q_{odv}|}{Q_{dov}}$$

1-2: $Q_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$, како је $V_2 > V_1$ то је $Q_{12} > 0$, Q_{12} је доведена топлота;

2-3: процес је адијабатски па је $Q_{23} = 0$;

3-4: $Q_{34} = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$, како је $V_4 < V_3$ то је $Q_{34} < 0$, Q_{34} је одведена топлота;

4-1: $Q_{41} = 0$, процес је адијабатски.

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{odv}|}{Q_{dov}} = 1 - \frac{|nRT_2 \ln V_4/V_3|}{nRT_1 \ln V_2/V_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \frac{\ln V_3/V_4}{\ln V_2/V_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \frac{\ln \frac{V_3}{V_4}}{\ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Анализирајмо све делове циклуса

1-2: $p_1 V_1 = p_2 V_2$

2-3: $p_2 V_2^{\kappa} = p_3 V_3^{\kappa}$

3-4: $p_3 V_3 = p_4 V_4$

4-1: $p_4 V_4^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$

Множењем израза на левим и десним странама ових једнакости добијамо:

$$\cancel{p_1 V_1}\, \cancel{p_2} V_2^{\kappa-1}\, \cancel{p_3 V_3}\, \cancel{p_4} V_4^{\kappa-1} = \cancel{p_2 V_2}\, \cancel{p_3} V_3^{\kappa-1}\, \cancel{p_4 V_4}\, \cancel{p_1} V_1^{\kappa-1}$$

$$(V_2 V_4)^{\kappa-1} = (V_1 V_3)^{\kappa-1}$$

$$V_1 V_3 = V_2 V_4 \Rightarrow \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$$

па је $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

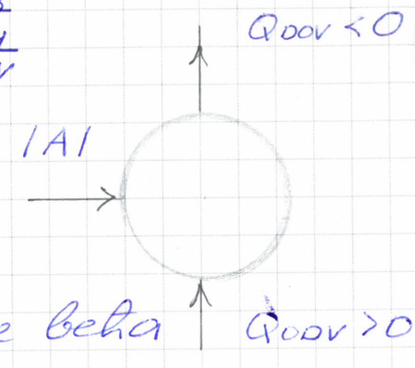
КОЕФИЦИЈЕНТ ХЛАЂЕЊА Carnot-ОВЕ ТОПЛОТНЕ ПУМПЕ

Анализирајмо топлотну пумпу која функционише као Carnot-ов левокретни циклус.

На делу циклуса од 2-1 се топлота одводи и предаје околини у износу који је одређен формулом $Q_{21} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$, $Q_{21} < 0$ јер је $V_2 < V_1$

На делу 4-3 топлота се гасу доводи од расхладне коморе или резервоара на нижој температури:

$Q_{43} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$, $Q_{43} > 0$, $V_3 > V_4$. Коефицијент хлађења $\beta_H \overset{def}{=} \frac{Q_{oov}}{|A|} = \frac{Q_{43}}{|A|} = \frac{nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{|Q_{oov}| - Q_{oov}}$



$$\beta_H = \frac{nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{|nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}| - nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}$$

$\beta_H = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ Ефикасност хлађења је већа што је разлика температура ближа нули.

Коефицијент грејања просторије топлотном пумпом:

$\beta_G \overset{def}{=} \frac{|Q_{oov}|}{|A|}$ – одводи се од процеса али се нама доводи

$$\beta_G \overset{def}{=} \frac{|Q_{21}|}{|Q_{21}| - Q_{43}} = \frac{|nRT_1 \ln V_1/V_2|}{|nRT_1 \ln V_1/V_2| - nRT_2 \ln V_3/V_4}$$

$\beta_G = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta}$ За коефицијент грејања важи да је он већи утолико уколико су температуре T_1 и T_2 ближе једна другој, тј. уколико $T_1 - T_2 \to 0$ и може да има вредност око 10 за спољашњу температуру 0°C, а 20° за собну температуру.

Резимирајмо дефиниције другог принципа термодинамике које се уводе преко топлотне машине и топлотне пумпе:

1. Није могуће конструисати машину која сву топлоту преводи у механички рад (без остатка);
2. Није могуће конструисати топлотну пумпу која ће без утрошка рада преводити топлоту од тела ниже температуре до тела више температуре. Други принцип термодинамике се може дефинисати преко физичке величине која се назива ентропија и појма Клаузијусовог интеграла, што је тема наредних лекција.

(у $z = d$, $p(z) = p_2$)

$$\frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{J_p \cdot d}{D\eta}$$

$$J_p = \frac{D\eta}{d} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{D\eta}{d} \frac{\Delta p}{p_1}$$

$$J_p = \frac{\Delta p}{\frac{p_1 d}{D\eta}}$$ – R_{dif} – дифузиони отпор који пружа зид (супротставља се дифузији водене паре)

05. 05. 2005.

76. УВОД У ЕЛЕКТРОСТАТИКУ

Електростатика је физичка дисциплина (део физике) која проучава međусобне интеракције (узајамна деловања) наелектрисаних честица које релативно мирују. Интеракција се одвија путем посебне врсте физичког поља које се назива електростатичко. Њега стварају наелектрисања и оно зависи од количине и просторног распореда самих наелектрисања, али и од електростатичких (електричних) особина саме средине. Свака промена положаја и количине наелектрисања утиче на промену поља и та промена се простире брзином светлости. Промене у пољу се преносе коначном брзином, јер је брзина електромагнетних таласа (ма колико нам се великом чинила њена вредност) коначна.

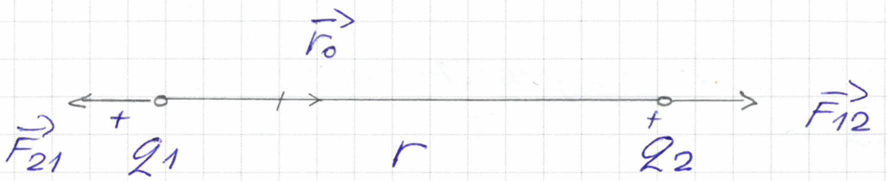
77. COULOMB-ОВ ЗАКОН

- овај закон је назван по француском физичару Charles-у Coulomb-у (Шарл Кулон), који је експериментaлним путем установио како електростатичка сила која делује између два пунктуална наелектрисања зависи од количине наелектрисања и њиховог међусобног растоја ња. Израз за силу гласи:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot \vec{r}_0$$

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

$$|\vec{r}_0| = 1$$



Претпоставили смо да су у тачкама смештена истородна наелектрисања (истог знака) па је и сила између њих одбојна (у супротном је привлачна). $\vec{F}_{12}$ - сила којом прво тело делује на друго

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ - сила којом друго тело делује на прво.

$k \approx 9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ у вакууму $\quad k = \frac{c^2}{10^7}$ – брзина светлости у вакууму (по бројној вредности)

Чешће се пише $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}$ $\quad\varepsilon_0$ - диелектрична пропустљивост (пермеабилност) вакуума

ε_r - релативна диелектрична константа средине (за вакуум 1)

$$\varepsilon_0 \approx 8.85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}$$

$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_0}$ Видимо да вакуум поседује електрична својства. Јединица за наелектрисање је C и има врло велику вредност (1C је огромно наелектрисање):

$$1C \approx 6.22\cdot 10^{18} \text{ електрона}$$

У макроскопском свету наелектрисања се јављају у виду честица (кваната) чији је најмањи износ 1e и износи:

$$1e = 1.6\cdot 10^{-19} C$$

78. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ

је физички процес преко кога наелектрисана тела која релативно мирују преносе дејство једно на друго. Уводимо појам јачине електростатичког поља и дефинишемо вектор јачине електричног поља (електро

-статичко поље је векторско поље) на следећи начин: у тачку поља унесемо позитивно наелектрисање q_p (које није велико јер би у супротном својим пољем реметило постојеће поље) и меримо Coulomb-ову силу којом поље делује на ово наелектрисање. Количник вектора силе и позитивног наелектрисања (у општем случају ово наелектрисање не мора бити одређеног знака) је вектор јачине електричног поља:

$$\vec{E} \overset{def}{=} \frac{\vec{F}}{q_p} \qquad [E]=[V/m]$$

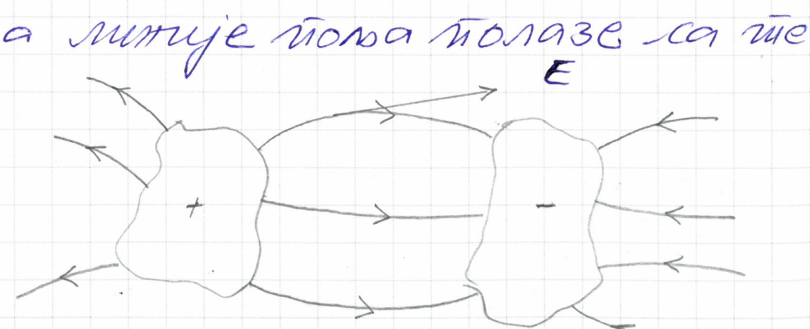
Треба приметити да су вектори силе и јачине поља колинеарни и истог смера ($q_p>0$).

Поље визуелизујемо увођењем фиктивних линија које се називају линије поља и имају следеће особине:

1) вектор поља у произвољној тачки поља има правац тангенте на линију поља повучену у тој тачки;

2) линије поља су оријентисане од наелектрисања које изазива поље, ако је оно позитивно, а ка наелектрисању, ако је негативно (каже се да линије извиру из позитивног наелектрисања, а увиру у негативно).

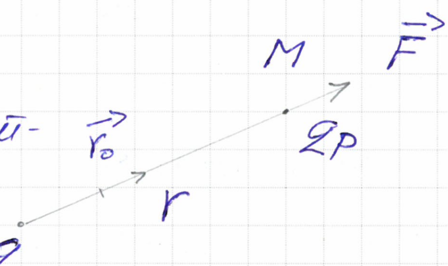
3) линије поља које потичу од једног наелектрисања се међусобно не секу, а њихово међусобно растојање обрнуто је сразмерно јачини поља (јаче поље, линије су гушће распоређене у простору). На слици је дат приказ линија поља два блиска наелектрисана тела. Треба приметити да линије поља полазе са тела под правим углом.



79. ВЕКТОР ЈАЧИНЕ ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА ТАЧКАСТОГ НАЕЛЕКТРИСАЊА

Посматрамо тачкасто наелектрисање Q које се налази у вакууму. Одредићемо интензитет вектора електричног поља у околини те тачке (тј. у произвољно одабраној тачки M у близини тог наелектрисања. Тачка M се налази на растојању r од наелектрисања и на њено место постављамо пробно тачкасто наелектрисање Q_p. На њега делује Coulomb-ова сила:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q Q_p}{r^2}\cdot\vec{r_0}$$



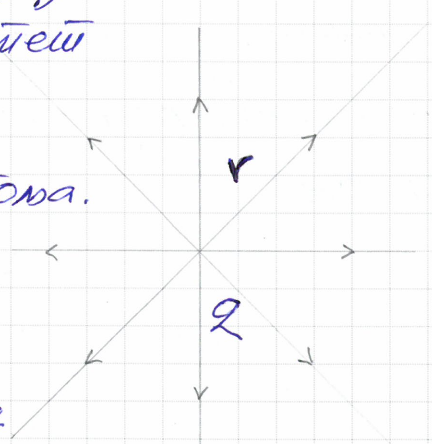
По дефиницији, јачина електростатичког (електричног) поља у M је:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\,\vec{r_0}$$

$$E(r) = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

Треба запазити да јачина електричног поља опада са квадратом растојања. Можемо да закључимо да је поље тачкастог наелектрисања радијално.

Поље има константан интензитет у свим тачкама са површине сфере чији је центар у извору поља. За јачину електричног поља важи тзв. принцип суперпозиције, тј резултујуће



поље два или више наелектрисања добијамо векторским сабирањем поља која воде порекло од појединачних наелектрисања. Нажалост, овај принцип не важи у случају линија поља, тј. ако знамо линије поља појединих наелектриса

$$2ES = \frac{q}{\varepsilon} \text{ (Gauss)}$$

$$E = \frac{q}{2\varepsilon S} \quad \sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Примећујемо да је поље исто у свакој тачки изван површи, што је последица бесконачности површине површи.

84. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКИ ПОТЕНЦИЈАЛ

је скаларна физичка величина која се користи за описивање електричног поља уместо вектора јачине електричног поља, што је у неким ситуацијама предност јер се ради о скаларној функцији (вектор поља има 3 компоненте).

Потенцијал тачке електричног поља се мери у волтима и дефинише се као количник рада електричних сила и наелектрисања:

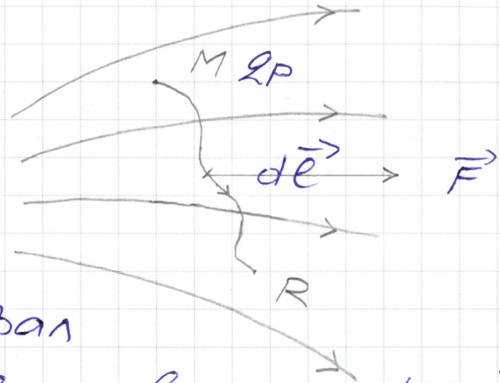
$$\varphi \overset{def}{=} \frac{A}{q_P}$$

A је рад електростатичких сила на премештању пробног позитивног наелектрисања q_P (мало наелектрисање) из тачке у којој дефинишемо потенцијал до изв. референтне тачке потенцијала. Путања премештања наелектрисања је произвољна и потенцијал не зависи од ње. У референтној тачки потенцијал је 0V и она се бира произвољно (обично бесконачно далеко од извора поља, тамо где је јачина поља занемарљиво мала (0)).

Рад електростатичких сила израчунавамо на следећи начин: уочимо произвољну путању кроз поље од тачке у којој дефинишемо потенцијал (M) до референтне тачке (R). Путању изделимо на бесконачно мале делове који дефинишу бесконачно мале векторе $d\vec{l}$. По дефиницији рад силе на бесконачно малом путу је $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}$.

Сумирањем елементарних радова на читавој путањи добијамо укупан рад:

$$A = \sum_{i=1}^{+\infty} \vec{F_i} \cdot d\vec{l_i} = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



$$A = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Дакле, рад је линијски интеграл силе по путањи. Имајући у виду везу између јачине поља и силе ($\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_p}$) добијамо да је $A = q_p \cdot \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$ па је потенцијал:

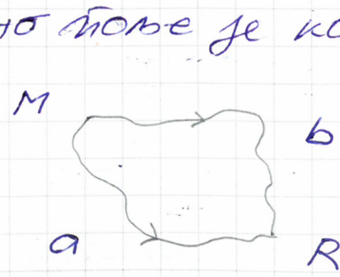
$$\varphi = \frac{A}{q_p} = \frac{q_p \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}}{q_p} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \varphi = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

[V]

Видимо да је електрични потенцијал линијски интеграл вектора јачине електричног поља по произвољној путањи, од тачке у којој дефинишемо потенцијал до референтне тачке. Напомињемо да потенцијалну енергију наелектрисања у пољу рачунамо по формули $E_p = \varphi \cdot q$ и она је једнака раду електричних сила, $E_p = A$. Потенцијал поседује једно врло важно својство, које је садржано у чињеници да му је вредност једнака нули ако се израчунава по било којој затвореној путањи у пољу, тј.

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

. То даље значи да потенцијал не зависи од путање (слично особини ентропије). Та чињеница се назива конзервација (конзервативност) поља. Дакле, електрично поље је конзервативно (као и гравитационо).



$$\int_{M \to a}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{M \to b}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ (ово треба да

докажемо). Полазимо од чињенице да је

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

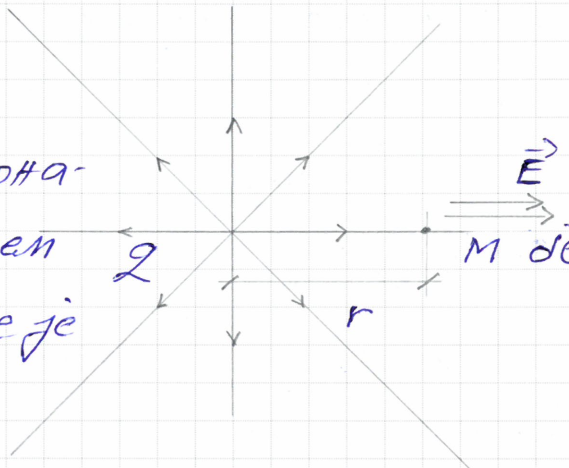
$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{M\to a}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{R\to b}^{M} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{M\to a}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{R\to b}^{M} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \int_{M\to a}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{M\to b}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\varphi_M = \int_{M\to a}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{M\to b}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

85. ПОТЕНЦИЈАЛ ПУНКТУАЛНОГ НАЕЛЕКТРИСАЊА

Израчунавамо потенцијал произвољне тачке у околини пунктуалног наелектрисања.



Одредимо потенцијал тачке M.

Бирамо референтну тачку у бесконачности, где је потенцијал по нашем избору 0V, а путања интеграције је једна линија поља.

$$\vec{E} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\,dl$$

$$\varphi_M = \int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_l E\,dl = \int_M^{R\to+\infty} E\,dl = \int_M^{+\infty} E\,dl = \int_M^{+\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot q\int_M^{+\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot -\frac{1}{r}\Big|_r^{+\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\left(\overset{0}{\cancel{-\frac{1}{+\infty}}} + \frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\varphi_M(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

Овај потенцијал ствара наелектрисање q (извор поља), а осећа га наелектрисање које се уноси у поље на месту M.

86. НАПОН У ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОМ ПОЉУ

се дефинише као разлика електричних потенцијала између две тачке поља. Дакле, напон између тачака A и B у пољу је $U_{AB} \overset{def}{=} \varphi_A - \varphi_B = \int_A^R \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_B^R \vec{E}\cdot d\vec{l} =$

$$\int_A^R \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_R^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

напон између две тачке поља представља линијски интеграл вектора поља по произвољној путањи између ових тачака. Јединица је наравно волт (V).

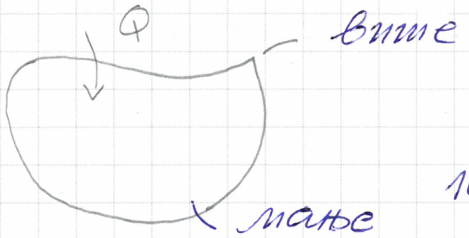
87. ВЕЗА ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА ПОЉА И ПОТЕНЦИЈАЛА

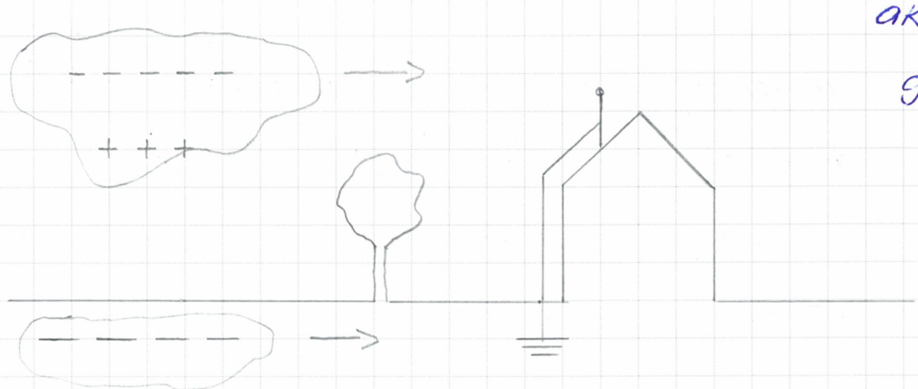
Посматрамо две бесконачно блиске тачке које се налазе у електростатичком пољу. Разлика потенцијала (напон) између ових тачака је бесконачно мала и износи $d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{e}$ ($\vec{E}$ вектор електричног поља у тачкама A и B). Формално важи $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{e}}$ тј. вектор електричног поља представља просторни извод потенцијала у правцу вектора $d\vec{e}$ (ово се у математици назива извод скаларне функције по правцу датог вектора или краће градијент те функције).

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{k}\right)$$

88. РАСПОДЕЛА НАЕЛЕКТРИСАЊА НА ПОВРШИНИ ПРОВОДНИХ ТЕЛА. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

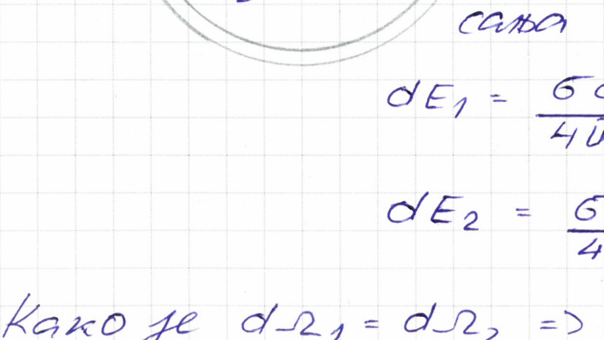
Када неутралном проводном телу (нпр. металу) доведемо наелектрисање оно се распоређује само по површини. При томе, густина расподеле наелектрисања зависи од унутне површине тела и закривљености на местима на којима одређујемо расподелу. Јако закривљене површине имају већу површинску густину наелектрисања него мање закривљене. Наелектрисања се расподељују по још једном врло важном принципу: Електрично поље унутар тела мора да буде једнако 0 (тзв. Faraday-ев кавез). Такође, електрични потенцијал произвољне тачке са површине тела је исти у односу на изабрану референтну тачку тј. површина тела је еквипотенцијална.





ако је напон већи од 90 kV и ваздух постаје проводник

Доказаћемо да је електрично поље унутар површински наелектрисаних тела 0. Ради поједностављења доказа посматрајмо танку шупљу сферу која је наелектрисана укупним наелектрисањем Q. Уочимо произвољну тачку унутар сфере и докажимо да је у њој електрично поље 0. Уочимо, у ту сврху, бесконачно мали просторни угао који исеца површине dS_1 и dS_2 на сфери. Количине наелектрисања на површинама су $dQ_1 = \sigma dS_1$ и $dQ_2 = \sigma dS_2$



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad [C/m^2]$$

Интензитети електричних поља која потичу од наелектрисања dQ_1 и dQ_2 износе:

$$dE_1 = \frac{\sigma dS_1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} d\Omega_1$$

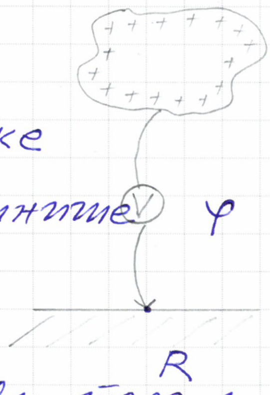
$$dE_2 = \frac{\sigma dS_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \frac{dS_2}{r_2^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} d\Omega_2$$

Како је $d\Omega_1 = d\Omega_2 \Rightarrow dE_1 = dE_2$ а како су вектори $\vec{dE_1}$ и $\vec{dE_2}$ супротно усмерени $\Rightarrow \vec{E}_{rez}^{(M)} = \vec{0}$. Дакле, поља која потичу од наелектрисања dQ_1 и dQ_2 се међусобно поништавају у свакој тачки унутар сфере, тј у свакој тачки унутар сфере резултујуће поље је једнако 0. Ово важи за тела произвољног облика.

89. КАПАЦИТИВНОСТ

Посматрамо једно усамљено наелектрисано проводно тело. На тело доводимо наелектрисање и пратимо како се мења количник укупног наелектрисања на телу и потенцијала произвољне тачке те површи, тј. $\frac{Q}{\varphi}$. Примећујемо да је овај однос константан и он се назива капацитивност тела (у ознаци C).

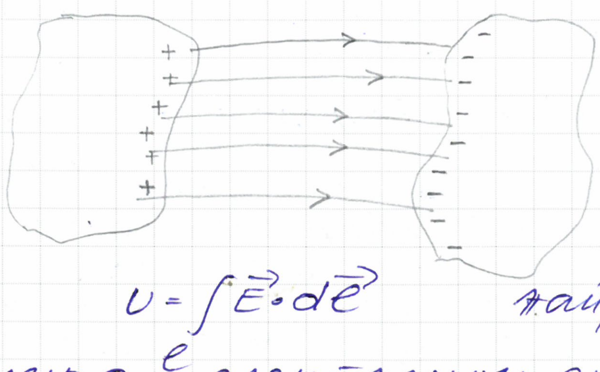
$$C \overset{def}{=} \frac{Q}{\varphi}$$



Ако је потенцијал референтне тачке 0 V, онда се капацитивност дефинише као количник наелектрисања и напона

$$C = \frac{Q}{U}$$

, U - напон између тела и референтне тачке. Јединица за капацитивност је фарад (F).



$C = \frac{Q}{U}$ где је U напон између тела

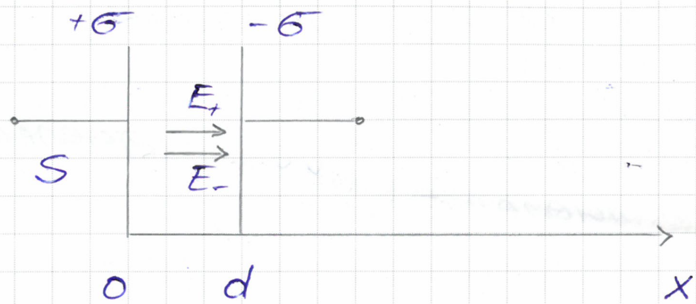
$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Кондензатор је електрична направа чији је задатак да акумулира електричну енергију у виду електричног поља између облога (електрода).

90. КАПАЦИТИВНОСТ РАВНОГ ПЛОЧАСТОГ КОНДЕНЗАТОРА

У овом случају електроде су $\parallel$ постављене равне плоче површине S које се налазе на међусобном растојању d и наелектрисане су површинским густинама наелектрисања $+\sigma$ и $-\sigma$. Изведимо израз за капацитивно-ст овог кондензатора.

$$C \overset{def}{=} \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int_0^d E(x)\,dx} = \frac{Q}{\int_0^d (E_+ + E_-)\,dx} = (*)$$



постоје два електрична поља (од позитивне и негативне електроде)

$$E_+ = \frac{+\sigma}{2\varepsilon} \qquad E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad (*) = \frac{Q}{\int_0^d \frac{2\sigma}{2\varepsilon}\,dx} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon}\int_0^d dx} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot x}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma d}{\varepsilon}} \cdot \frac{S}{S} = \varepsilon \cdot \frac{S}{d} \qquad C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$$

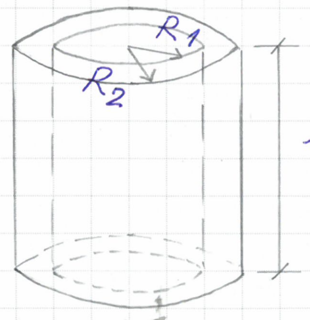
ε - диелектрична константа средине

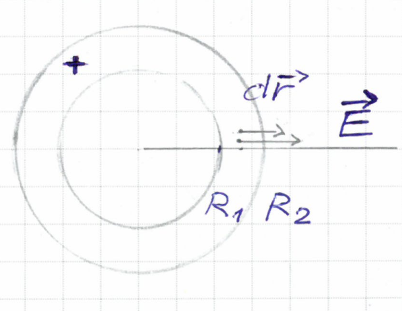
S - површина плоче

d - растојање између плоча 16.05.2005.

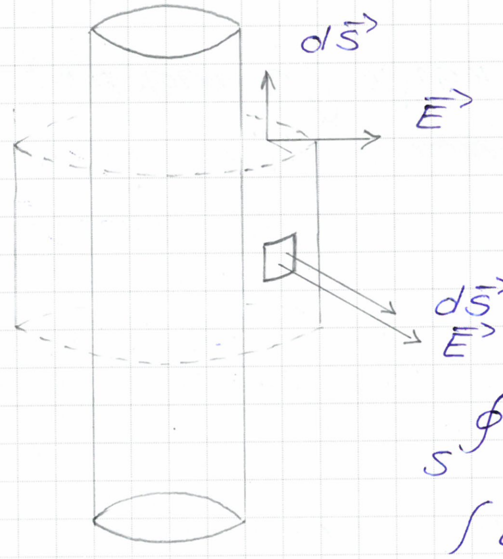
91. КАПАЦИТИВНОСТ КОАКСИЈАЛНОГ КОНДЕНЗАТОРА

Овај тип кондензатора се састоји из две коаксијалне електроде, полупречника R_1 и R_2, наелектрисане истом количином наелектрисања супротних знакова. Између електрода се налази изолатор (диелектрик) диелектричне константе ε. Електрично поље између електрода је, услед Фарадејевог ефекта, последица постојања наелектрисања на унутрашњој електроди. Изведимо израз за капацитивност овог кондензатора:





чије поље одређујемо.



Gauss-ов закон:

Флукс вектора јачине електричног поља кроз било коју затворену површ је $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{VS}}{\varepsilon}$

Интеграцију вршимо по омотачу и по базисима:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \overset{0}{\cancel{\int_{B_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}}} + \overset{0}{\cancel{\int_{B_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}}} + \int_{ОМОТАЧ} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_{ОМОТАЧ} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{VS}}{\varepsilon} \qquad \int_{ОМОТАЧ} E dS = \frac{Q_{VS}}{\varepsilon}$$

Из разлога симетрије електрично поље у свакој тачки омотача има исти интензитет, па се E понаша као константа у интеграцији и важи:

$$\int E dS = E\int dS = E\cdot 2\pi r\cdot l$$

$$E(r)\cdot 2\pi r l = \frac{Q_{VS}}{\varepsilon} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{l\cdot r} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

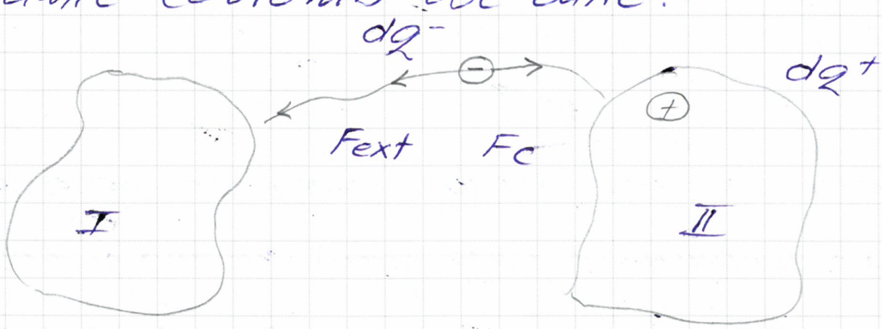
$$E(r) = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

Q' – подужна густина наелектрисања

$$Q' = \frac{Q_{VS}}{l}$$

94. ЕНЕРГИЈА ЕЛЕКТРОСТАТИЧКОГ ПОЉА

Електростатичко поље поседује електричну енергију. Овај вид енергије се ствара у процесу настанка електричног поља, а то се одиграва у процесу раздвајања разноимених наелектрисања. Пример је јонизација атома у хемији, за шта је потребно утрошити енергију. Да би се разноимена наелектрисања раздвојила мора се деловати неком спољашњом силом, која представља контра силу привлачној Coulomb-овој сили. При томе спољашња сила врши рад на раздвајању наелектрисања (троши се енергија). Што је веће растојање које желимо да постигнемо између наелектрисањ што треба да уложимо већи рад. У простору између раздвојених наелектрисања створено је електрично поље. Из закона одржања енергије следује да рад утрошен на раздвајање наелектрисања мора бити једнак енергији поља (наелектрисања релативно мирују). Поље може да смањује сопствену енергију ако силе тог поља врше рад над наелектрисањима из поља (убрзавају их). Тада се енергија поља троши на повећање кинетичке енергије наелектрисаних честица. Када се наелектрисања рекомбинују поље нестаје, а тиме и електрична енергија. Енергија поља се претворила у кинетичку енергију честица. Изведимо сада израз за енергију електростатичког поља које „постепено" настаје тако што са једног неутралног тела преносимо елементарна наелектрисања на друго неутрално тело. Рецимо да са другог тела „скидамо" електроне (оно постаје позитивно наелектрисано) и предајемо их првом телу (које постаје негативно наелектрисано). Чим издвојимо прво наелектрисање (само један електрон) са другог тела, јавља се привлачна сила између издвојеног електрона и тела које је аутоматски постало позитивно наелектрисано, па да би се оно предало неутралном телу (прво тело) мора се уложити рад на савлађивању привлачне Coulomb-ове силе.



dq премештамо на неутрално тело I по произвољној путањи. Прво тело након пријема dq постаје негативно наелектрисано, па се између тела јавља електрично поље чија је енергија једнака извршеном раду спољашње силе на премештању наелектрисања dq са тела II на тело I. Одредимо сада тај рад. Како је наелектрисање dq бесконачно мало и утрошени рад је бесконачно мали:

$$d^2A = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l}, \quad d\vec{l} \text{ - делић путање}$$

$$d^2A = -\vec{F}_c \cdot d\vec{l} = -dq\,\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$dA = \int_l d^2A = -dq \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dq \cdot U_{12} \qquad \underline{dA = -U_{12}\,dq}$$

U_{12} - напон између првог и другог тела

dA - рад спољашњих сила на читавој путањи l, при премештању бесконачно малог наелектрисања dq од тела II до тела I. Ако даље наставимо да премештамо наелектрисања, количине наелектрисања на телима I и II расту (она се све више наелектрисавају), па и јачина електричног поља између њих расте, а самим тим и напон U_{12}, који зависи од количине наелектрисања на телима. Укупан рад, утрошен при премештању количине наелектрисања Q са тела II на тело I износи:

$$A = \int_l dA = -\int_1^2 U_{12}(q)\,dq = -\int_1^2 \frac{q}{C}\,dq$$

(тела I и II схватамо као плоче кондензатора, а U_{12} је напон између тих плоча (облога, електрода)

$$A = -\frac{1}{C}\int_1^2 q\,dq = -\frac{1}{C}\cdot\frac{Q^2}{2} \qquad \underline{A = -\frac{Q^2}{2C}}$$

Видимо да рад не зависи ни од облика путање ни од облика тела. Пошто је ово рад који врше спољашње силе он је негативан (врши се против сила поља), а

ако рад врше силе електричног поља, тада пишемо $A = \dfrac{q^2}{2C}$ Дакле, енергија електричног поља које се успоставило након преноса количине наелектрисања q са тела II на тело I износи $\dfrac{q^2}{2C}$, C - капацитивност система 1-2.
Постоје (и у пракси (читај задацима) се користе) разне форме овог израза:

$$A = \frac{q^2}{2C} = \frac{(C \cdot U)^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{U} \cdot U^2 = \frac{1}{2} Q \cdot U$$

$A = \frac{1}{2} QU$ - формуле за енергију електростатичког поља

95. ЕНЕРГИЈА ПЛОЧАСТОГ КОНДЕНЗАТОРА

Овде ћемо претпоставити да је електрично поље између плоча кондензатора хомогено и извести израз за електричну енергију таквог поља. Полазимо од израза $A = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ $\quad C = \varepsilon \frac{S}{d}$ - за раван (плочасти) кондензатор

$$A = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\frac{\varepsilon S}{d}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon S}$$

Запреминска густина енергије неће зависити од растојања између плоча кондензатора јер је:

$$W = \frac{A}{V} = \frac{A}{S \cdot d} = \frac{\frac{1}{2} \frac{Q^2 \cancel{d}}{\varepsilon S}}{S \cdot \cancel{d}} = \frac{Q^2}{2 \varepsilon S^2} \qquad [W] = J/m^3$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \left(\frac{Q}{S}\right)^2 \qquad \sigma = \frac{Q}{S}$$ - површинска густина наелектрисања

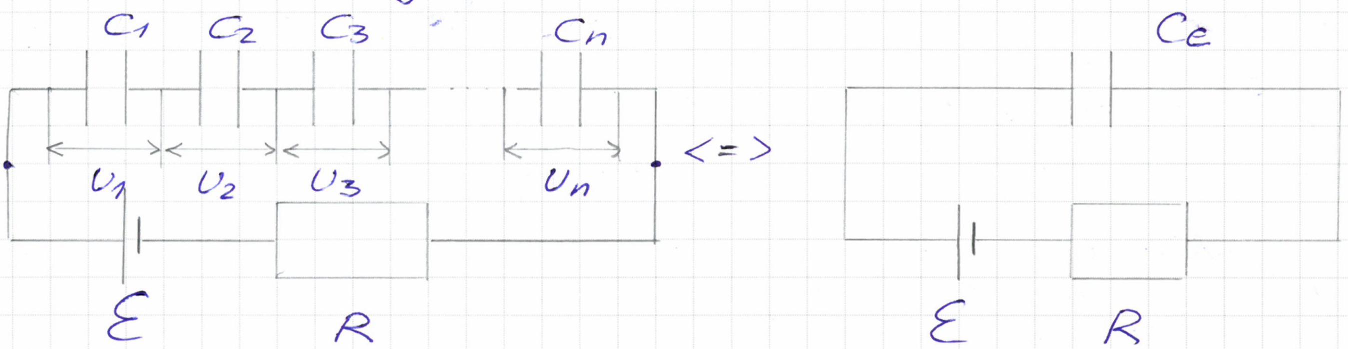
$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$ поље беск. дуге равне површи

$$W = \frac{\varepsilon E^2}{2}$$

96. ВЕЗИВАЊЕ КОНДЕНЗАТОРА. ЕКВИВАЛЕНТНА КАПАЦИТИВНОСТ

Постоје две врсте веза код кондензатора: редна (серујска) и паралелна. Изведимо изразе за еквивалентну капацитивност ових веза. Кондензатори су редно (серијски) везани ако сви припадају истој грани електричног кола. Грана кола је проводник који спаја два чвора кола. Чвор кола је место где се стичу бар 3 гране кола.

Посматрајмо редну везу кондензатора $C_1, C_2, \dots, C_n$ које пунимо помоћу извора електромоторне силе $\mathcal{E}$. Ми хоћемо да редно везане кондензаторе заменимо једним јединим кондензатором (и занима нас колики је капацитет тог кондензатора).



Приметимо да је збир напона на појединачним кондензаторима једнак напону батерије (извора тј. електромоторној сили извора) када кроз коло не тече струја.

$$U_1 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = \mathcal{E} \qquad U = \frac{Q}{C}$$

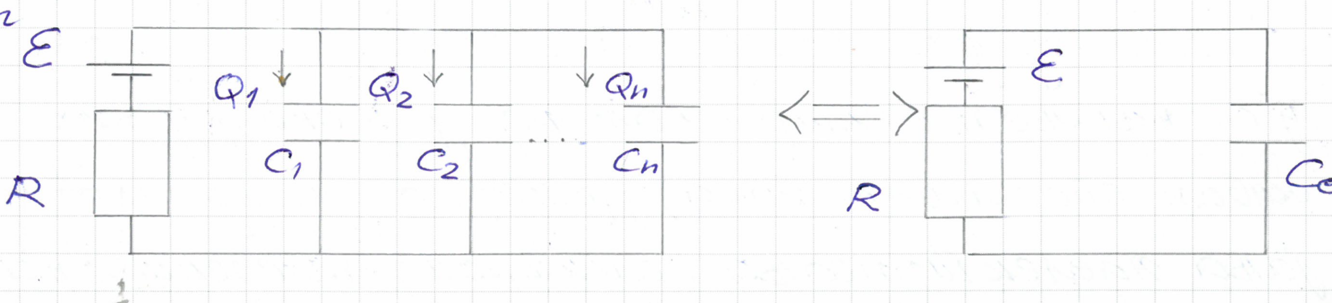
$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \mathcal{E}$$

Q - протекло наелектрисање (наелектрисање облоге)

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \frac{\mathcal{E}}{Q}$$

$$\frac{Q}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} \overset{def}{=} C_e \Rightarrow \underline{\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Посматрајмо паралелно везане кондензаторе $C_1, \dots, C_n$



$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ - протекла наелектрисања при наелектрисавању кондензатора. Напони на крајевима кондензатора су исти јер су кондензатори везани између две исте тачке.

$$Q_1 = C_1 \cdot U$$
$$Q_2 = C_2 \cdot U \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i = Q = U \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad \frac{Q}{U} = \sum_{i=1}^{n} C_i \overset{def}{=} C_e$$
$$\vdots$$
$$Q_n = C_n \cdot U \qquad\qquad \boxed{C_e = \sum_{i=1}^{n} C_i = C_1 + \dots + C_n}$$

23.05.2005.

97. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ У ДИЕЛЕКТРИЦИМА

Диелектрици су материјали (у чврстом, течном и гасовитом агрегатном стању) који не проводе електричну струју у присуству електричног поља. Разлог за то је постојање довољно јаке везе између електрона и језгра матичних атома (тзв. слаба нуклеарна интеракција) која се ни под дејством овог поља не може раскинути (електрони се не удаљавају од језгра), чиме је онемогућен ток наелектрисања, што чини електричну струју. Само под дејством врло јаких поља (за ваздух 90 $\frac{kV}{m}$) долази до одвајања електрона од атома и настанка електричне струје. Ова појава се назива пробој диелектрика и у највећем броју случајева оставља негативне последице по материјал јер доводи до појаве високих температура и деструкције материјала.

Атоми су електронеутралне честице, али када се нађу у спољашњем електричном пољу у оквиру њих (под дејством спољашњег поља) долази до делимичног раздвајања наелектрисања (електрона из електронског ом-

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$ - ово је Gauss-ов закон у материјалној средини. Флукс вектора електричне индукције $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}$ кроз произвољну затворену површину једнак је обухваћеном слободном наелектрисању.

99. ЈЕДНОСМЕРНЕ СТРУЈЕ (DC - DIRECT CURRENT)

Електрична струја представља усмерено кретање наелектрисаних честица (електрони, јони, итд). Ако струја не мења смер и интензитет са временом онда кажемо да је струја једносмерна (DC). За описивање ове појаве уводимо физичку величину која се назива јачина електричне струје (I) која по дефиницији представља количник протеклог наелектрисања кроз проводник произвољног попречног пресека и времена протицања:

$$I \overset{def}{=} \frac{dq}{dt} \qquad [I] = A$$

(Ampere - није знао за e^-, али је тачно дефинисао струју)

Ако наелектрисање протиче равномерно, у временском интервалу Δt, пишемо:

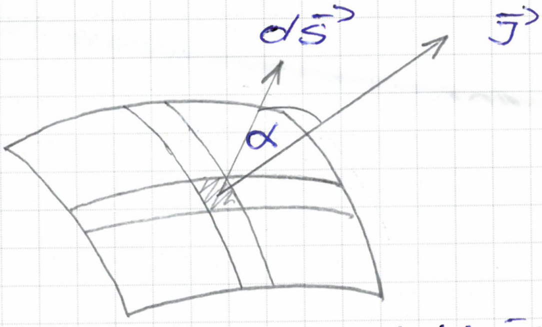
$$I = \frac{Q}{\Delta t}$$

Поред интензитета, за описивање струје дефинишемо и једну векторску величину која се назива густина електричне струје. За разумевање физичког значења ове векторске величине посматрамо једну глатку закривљену површ и на њој уочимо елементарну површину $d\vec{S}$. Вектор густине струје $\vec{J}$ уводимо тако да флукс овог вектора кроз елементарну површину dS буде једнак интензитету струје dI на том месту (како је површина инфинитезимално мала, таква је и струја).

$$dI = \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$J\, dS \cos\alpha = dI$$

$$J \overset{def}{=} \frac{dI}{dS\cos\alpha} = \frac{dI}{dS_n}$$

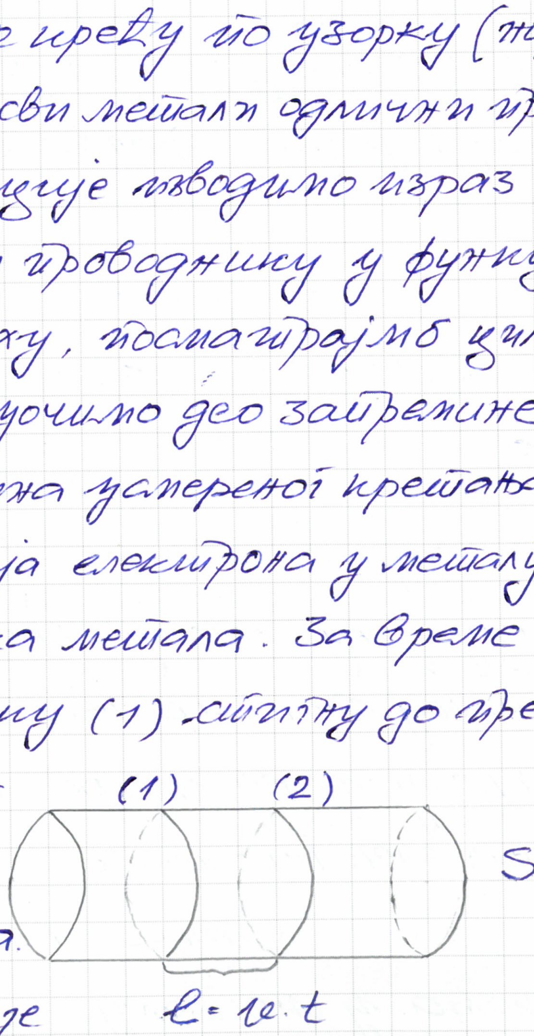


$$J = \frac{dI}{dS_n}$$

Дакле, густина струје се дефинише као количник интензитета струје и површине површи нормално постављене на правац тока наелектрисања. Јединица за густину струје је A/m^2.

100. ИНТЕНЗИТЕТ СТРУЈЕ КРОЗ МЕТАЛНИ ПРОВОДНИК

Метали имају енормно велики број скоро слободних електрона који могу слободно да се крећу по узорку (нпр. Cu има $2\cdot 10^{24}\, e/cm^3$), због чега су сви метали одлични проводници струје. У оквиру ове лекције изводимо израз за интензитет струје у металном проводнику у функцији параметара метала. У ту сврху, посматрајмо цилиндричан проводник од метала и уочимо део запремине дужине $l = v\cdot t$, при чему је v брзина усмереног кретања електрона. Нека је концентрација електрона у металу n, a S површина попречног пресека метала. За време t електрони који су били на пресеку (1) стигну до пресека (2), а посматрана запремина се испуни наелектрисањем које иде иза поменутих електрона.



Дакле, укупно наелектрисање које

, за време t, протекне кроз пресек (1) биће :

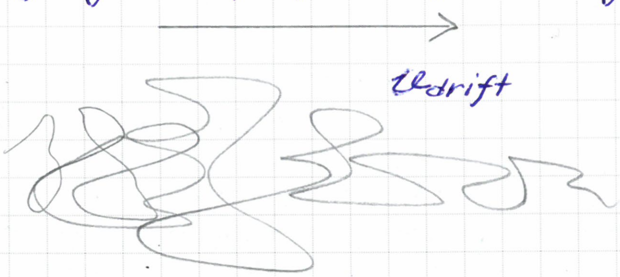
$$q = e\cdot n\cdot V = e\cdot n\cdot s\cdot l = e\cdot n\cdot s\cdot v\cdot t$$

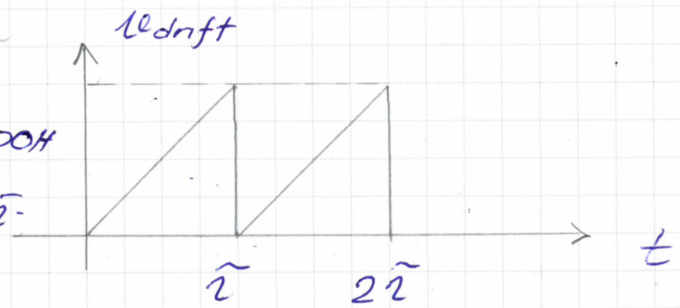
$$q = svent$$

$$I = \frac{q}{t} = sven \qquad J = \frac{I}{S} = ven$$

101. ОНМ-ОВ ЗАКОН ЗА ЕЛЕКТРИЧНИ ПРОВОДНИК

Сада изводимо израз који повезује густину струје и јачину електричног поља које ју изазива. Електрони се сударају са атомима (јонима) метала па при усмереном кретању имају две компоненте брзине. хаотичну и ону у правцу кретања (усмерена). Ту усмерену компоненту називамо брзинам дрифта (енгл. drift - померање), док хаотична компонента не доприноси струји (јер је подједнако вероватно да вектор брзине буде оријентисан са лева на десно и обратно). Компонента коју називамо брзинам дрифта је последица поља па нас једино она и интересује, јер једино она доприноси струји. На слици је дат график брзине у функцији времена:





Брзина расте док се електрон не судари и преда сву енергију јону (атому) метала.

Услед тога се метал загрева, јер атоми појачано вибрирају услед удара електрона у њих. Једначина кретања електрона је, по II Newton-овом закону, :

$$m_e a = F_{el} = e\cdot E$$, E - јачина електричног поља у металу.

$m_e \frac{dv}{dt} = e \cdot E \, / \cdot dt$

$m_e dv = e \cdot E \, dt \; / \int$

$m_e \int_0^v dv = e \cdot E \int_0^t dt$

$m_e v = eE \cdot t$

$$\boxed{v(t) = \frac{eE}{m_e} \cdot t}$$

брзина након средњег времена τ износи $v_{drift} = \frac{e \cdot E}{m_e} \cdot \tau$ и ово узимамо као дрифтовану брзину електрона.

Дефинишемо покретљивост електрона преко параметра μ на следећи начин:

$$v_{drift} = \mu \cdot E = \frac{e\tau}{m_e} \cdot E \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{e\tau}{m_e}}$$

Сада полазимо од израза за густину струје:

$$\vec{J} = ne\vec{v}_{drift} = ne\mu \cdot \vec{E} = ne \cdot \frac{e\tau}{m_e} \cdot \vec{E} = \frac{ne^2\tau}{m_e} \cdot \vec{E}$$

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, σ - коефицијент електричне проводности

Ом-ов закон за метални проводник у општем облику

$[\sigma] = \frac{S}{m}$ (Simens)

$\tau = \frac{\lambda}{v_{term}}$ — λ - средња дужина пута електрона између два судара; v_{term} - хаотична компонента брзине

Специфична отпорност метала се дефинише као

$\rho = \frac{1}{\sigma}$, $[\rho] = \Omega m$

102. JOULE-ОВ ЗАКОН

Joule-ов закон описује процес конверзије електричне енергије у друге видове тј. топлоту. Механизам претварања је следећи: посредством наелектрисаних честица енергија електричног поља се умањује на рачун њихове кинетичке енергије, а ове сударима са атомима (јонима) метала повећавају унутрашњу енергију истих тј. стварају топлоту.

Изведимо израз за брзину претварања електричне енергије у топлоту, тј. израз за електричну снагу. Полазимо од израза за рад електричних сила које убрза

, за време t, протекне кроз пресек (1) биће:

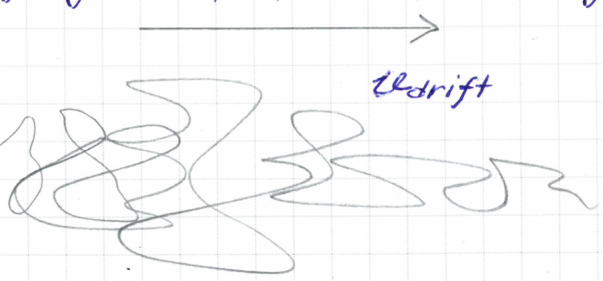
$$q = e \cdot n \cdot V = e \cdot n \cdot S \cdot l = e \cdot n \cdot S \cdot v \cdot t$$

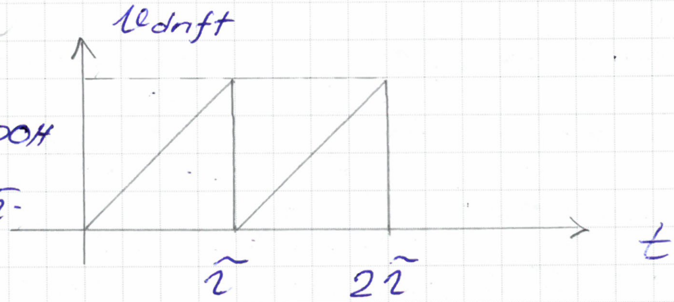
$$\underline{q = Svent}$$

$$\underline{I = \frac{q}{t} = Sven} \qquad \underline{J = \frac{I}{S} = ven}$$

101. ОНМ-ОВ ЗАКОН ЗА ЕЛЕКТРИЧНИ ПРОВОДНИК

Сада изводимо израз који повезује густину струје и јачину електричног поља које ју изазива. Електрони се сударају са атомима (јонима) метала па при усмереном кретању имају две компоненте брзине: хаотичну и ону у правцу кретања (усмерена). Ту усмерену компоненту називамо брзином дрифта (енгл. drift - померање), док хаотична компонента не доприноси струји (јер је подједнако вероватно да вектор брзине буде оријентисан са лева на десно и обратно). Компонента коју називамо брзином дрифта је последица поља па нас једино она и интересује, јер једино она доприноси струји. На слици је дат график брзине у функцији времена:





Брзина расте док се електрон не судари и преда сву енергију јону (атому) метала.

Услед тога се метал загрева, јер атоми појачано вибрирају услед удара електрона у њих. Једначина кретања електрона је, по II Newton-овом закону:

$m_e a = F_{el} = e \cdot E$, E - јачина електричног поља у металу.

жуцала на крајевима проводника. Изведимо сада израз за електричну отпорност метала облика датог на претходној слици. Полазимо од израза за напон на бесконачно кратком делу $d\vec{e}$:

$$dU = \vec{E} \circ d\vec{e} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \circ d\vec{e} = \frac{J\,de}{\sigma} = \rho \frac{dI}{dS} \cdot de$$

$$dU = \rho\, dI \frac{de}{dS}$$

Ом-ов закон

$$U = \int_S dU = \int_S dI\, \rho \frac{de}{dS} = I \cdot \int_S \rho \frac{de}{dS} = I \cdot \rho \int_S \frac{de}{dS}$$

$$R \overset{def}{=} \frac{U}{I} = \rho \int_S \frac{de}{dS}$$

Ако је геометрија проводника таква да је S константно, а проводник прав, онда је $R = \rho \frac{l}{S}$. Сада имамо и друге изразе за снагу, који се употребљавају у пракси:

$$P = U \cdot I = R \cdot I \cdot I = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

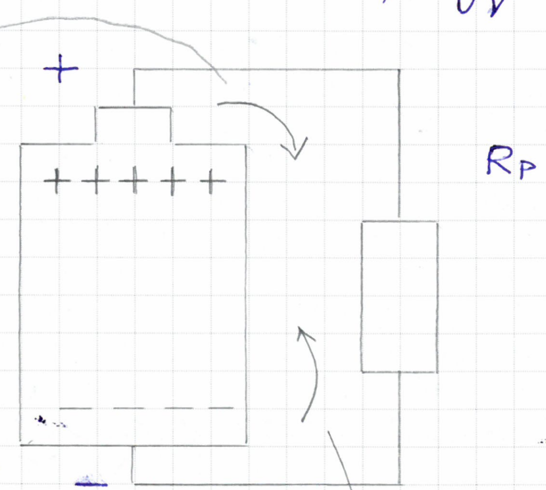
103. ЕЛЕКТРОМОТОРНА СИЛА

је појам који везујемо за изворе електричне енергије и нема димензију силе, већ напона. У изворима електричне енергије се врши трансформација неког другог вида енергије у електричну (механичка, хемијска). Ефикасност те трансформације се описује физичком величином која се назива електромоторна сила. Она представља количник утрошеног рада неелектричних сила на раздвајању наелектрисања и самог раздвојеног наелектрисања:

$$\mathcal{E} = \frac{dA}{dq} \qquad [\mathcal{E}] = \left[\frac{J}{C} = V\right]$$

описаћемо принцип рада једног електричног извора (нпр. батерије):

Унутар извора се путем хемијских процеса одвија процес раздвајања наелектрисања уз утрошак хемијске енергије, приликом чега долази до нагомилавања покретних негативних наелектрисања на – полу, док + пол остаје са мањком електрона. Дакле, унутар извора се одвија интерни транспорт електрона од + ка – полу уз утрошак хемијске енергије. Енергија се троши јер се електрони померају у смеру супротном од смера Coulomb-ове привлачне силе која тежи да их врати назад, па је потребно утрошити енергију да би се савладао рад ове силе. Такође, спречава се рекомбинација унутар извора. Када прикључимо потрошач, електрони добијају алтернативни пут до + пола, преко потрошача. Када поново достигну на + пол, батерија их поново транспортује ка – полу и на тај начин се успоставља електрична струја кроз коло и батерију.

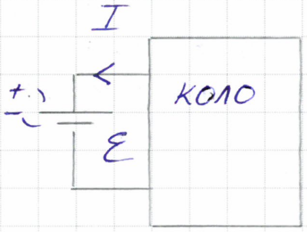


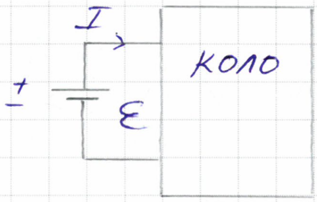
Смер струје на слици је од – ка + полу и тај смер представља тзв. физички смер струје. Међутим, у физици се усваја тзв. технички смер струје (од + ка – полу) преко потрошача, јер се намерно занемарује чињеница да је електрон негативно наелектрисана честица. Дакле, сада струја тече од тачке вишег (+) ка тачки нижег потенцијала, што је уобичајено код гравитационог потенцијала (иначе би реке текле узводно). Сада изводимо израз за снагу батерије:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathcal{E}\,dq}{dt} = \mathcal{E}\cdot I = \mathcal{E}I$$

$$\underline{P = \mathcal{E}I}$$

Снага батерије може да буде и негативна, ако остатак кола форсира струју смера супротног од техничког.



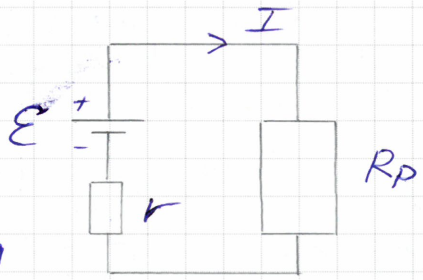


$P = \mathcal{E}\cdot I < 0$ (батерија је потрошач)

$P = \mathcal{E}\cdot I > 0$ (батерија је извор)

Реалне батерије поседују унутрашњу електричну отпорност, па је струја у колу једнака:

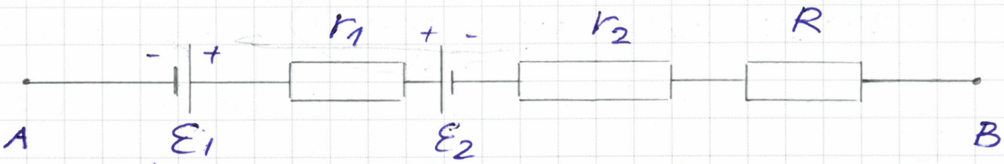
$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_p}$$



Дакле, извори треба да имају малу унутрашњу отпорност да би струја била већа.

104. РАСПОДЕЛА ЕНЕРГИЈЕ У ЕЛЕКТРИЧНОМ КОЛУ

За изворе у електричном колу кажемо да су батерије, а потрошачи су отпорници који претварају електричну енергију у топлоту. Међутим, као што смо видели, потрошачи могу бити и батерије, ако је смер струје кроз њих супротан од смера струје који би та батерија производила на неком потрошачу. Анализирајмо расподелу енергија у колу на примеру једне гране кола. Нека је потенцијал у тачки А већи од оног у тачки В и пратимо кретање једног позитивног малог наелектрисања Δq од тачке A до тачке B.



I батерија   II батерија

r_1, r_2 - унутрашње отпорности извора ε_1 и ε_2 респективно:

Енергија коју стекне наелектрисање Δq на путу од A до B дата је релацијом:

$$E_K = (\varphi_A - \varphi_B)\Delta q$$

На путу од A до B Δq најпре пролази кроз прву батерију наилазећи на њен − пол, што значи да ће батерија својим унутрашњим силама транспортовати наелектрисање на + пол. Овим је Δq стекло енергију $E_1 = \varepsilon_1 \cdot \Delta q$. Даље, Δq пролази кроз r_1, где губи кинетичку енергију у износу $r_1 I^2 \Delta t$, где је I струја коју Δq ствара својим кретањем, а Δt је временски интервал проласка кроз отпорник. Сада Δq наилази на батерију електромоторне силе ε_2 и то на њен + пол најпре. Под дејством електричног поља (електричних сила) између тачака A и B наелектрисање Δq пролази кроз батерију губећи енергију $\varepsilon_2 \cdot \Delta q = E_2$, јер се батерија својим силама супротставља оваквом транспорту. Затим Δq наилази на отпорнике r_2 и R на којима такође губи енергију. Напишимо енергетски биланс наелектрисања Δq.

$$(\varphi_A - \varphi_B)\Delta q = -\varepsilon_1 \Delta q + r_1\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)^2 \Delta t + (r_2 + R)\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)^2 \Delta t + \varepsilon_2 \Delta q \quad (*)$$

поделимо леву и десну страну са Δq

$$U_{AB} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + (r_1 + r_2 + R)I$$

$$U_{AB} = \sum_A^B (+RI, -\varepsilon)$$

(*) - колико добије, толико изгуби

Из овога извлачимо опште правило:

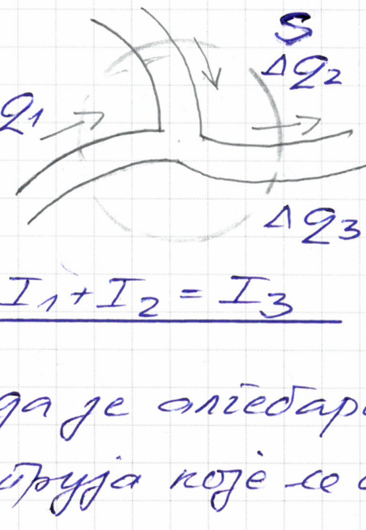
Струја тече од A до B и све производе $R\cdot I$ узимамо са $+$, а оне батерије чија је оријентација полова супротна од знака потенцијала у тачкама A и B (A на вишем „+“, а B на нижем „−“) са $-$.

105. I KIRCHHOFF-ОВ ЗАКОН

је последица једног општијег принципа. То је принцип одржања (конзервације) наелектрисања. Посматрамо један чвор електричног кола (место где се стичу бар три проводника) који је обухваћен замишљеном затвореном површи S. Принцип одржања наелектрисања каже да укупно наелектрисање које улази у S мора бити једнако укупном наелектрисању које излази из S јер се електрони понашају као недељиве и нестишљиве честице, па колико их уђе, толико их и изађе из површи (као вода, рецимо). Нека су Δq_1, Δq_2 и Δq_3 протоци наелектрисања кроз гране. Принцип одржања наелектрисања каже да ће, у нашем случају, (види слику) важити релација:

$$\Delta q_1 + \Delta q_2 = \Delta q_3 \quad /:\Delta t$$

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta t} + \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta q_3}{\Delta t}$$



$$I_1 + I_2 = I_3$$

I Kirchhoff-ов закон каже да је сума интензитета струја које увиру у један чвор кола једнака суми интензитета струја које из њега извиру или да је алгебарска сума струја тј. интензитета струја које се стичу у једном чвору једнака нули. У нашем случају:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Алгебарски знак струје се узима произвољно у смислу да знак − додељујемо струји која или извире ил увире у чвор, а + додељујемо другим струјама које се сечу у чвору (преостале струје)

24.05.2005.

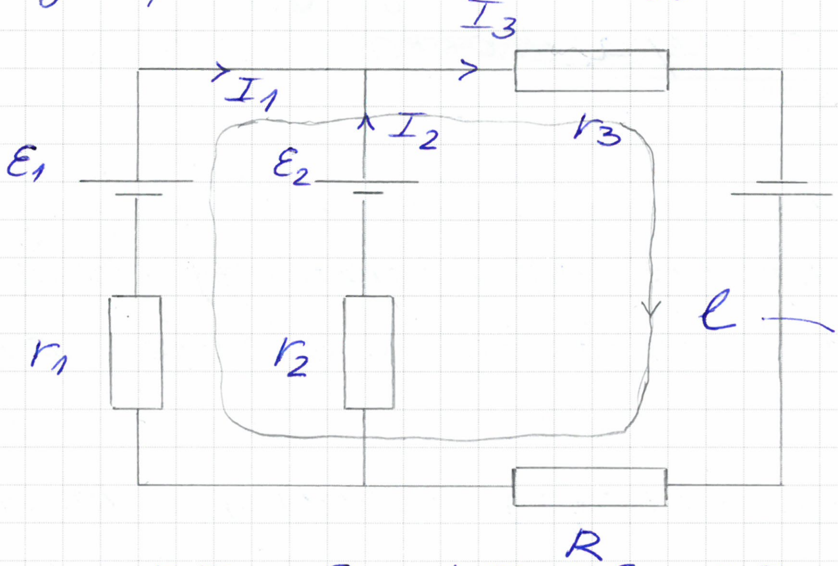
106. II KIRCHHOFF-ОВ ЗАКОН

Овај закон је последица конзервативног карактера електростатичког поља тј. особине вектора јачине електричног поља, да је на произвољној затвореној путањи $\oint_{l} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Обзиром да је физички смисао овог интеграла напон, то значи да је сума напона по произвољној затвореној путањи у колу (општије кроз електрично поље) једнака нули. Ако се електрично поље успостави у једном електричном колу, то значи да сума напона по произвољној путањи кроз коло која је затворена, као што смо видели, мора бити 0. Већ смо показали да је $\sum_{A}^{B} (RI, -\mathcal{E}) = U_{AB}$ па ако се тачке A и B поклапају (путања је затворена) па је $\sum_{A}^{A} (RI, -\mathcal{E}) = 0$. Сада дајемо правило за одређивање знака напона на елементима у електричном колу. Ти елементи су отпорници и батерије. Поменути интеграл захтева затворену путању која има свој смер обиласка (тзв. оријентисана затворена путања.

смер обиласка по путањи

Напон на отпорнику се, у случају са слике, узима као негативан. Ако пролазимо кроз батерију, као

на слици, напон на батерији сматрамо позитивним.
На наредној слици је приказано електрично коло на које је примењен II Kirchhoff-ов закон; контура је произвољно изабрана. Полазимо од отпорника r_1



ℓ — контура интеграције напона

$$-r_1 I_1 + \varepsilon_1 - r_3 I_3 + \varepsilon_3 - R \cdot I_3 = 0$$

Заједно са I Kirchhoff-овим законом, овај закон омогућава писање једначина које повезују елементе у колу са струјама и напонима, што омогућава решавање електричног кола, тј. одређивање непознатих струја у колу.

107. ПРАВИЛА РЕШАВАЊА КОЛА ЈЕДНОСМЕРНЕ СТРУЈЕ

Решити неко електрично коло значи одредити непознате струје и напоне у том колу. Топологију кола дефинишемо као скуп грана и чворова тог кола (коло посматрамо без елемената (извори, отпорници)). Чвор је место у коме се стичу бар три гране кола (>—), а грана стоји између два чвора (>——<).
Поступци који се примењују приликом решавања електричног кола су следећи (тзв. recepie how to solve any DC electric circuit):
step one: Уочимо и пребројимо све чворове у колу и обележимо њихов број са $n_č$;

step two: Уочимо и преброjимо све гране у колу и њихов броj означимо са n_a;
step three: У сваку грану кола уведемо по jедну струjу произвољног смера и означимо их са I_1 до I_{n_a}.
step four: За $n_č - 1$ чворова кола (произвољно одабраних) пишемо jедначине по I Kirchhoff-овом закону (дакле, можемо изоставити произвољан чвор);
step five: Уочимо $n_a - (n_č - 1)$ контура (затворених путева) и усвоjимо смер обиласка у сваком од њих. Избор контура НИJЕ ПРОИЗВОЉАН, већ се бираjу тзв. независне контуре (контуре су сигурно независне ако их бирамо тако да буду „везује" топологиjе кола). За сваку контуру пишемо по jедну jедначину по II Kirchhoff-овом закону.

Коментар:

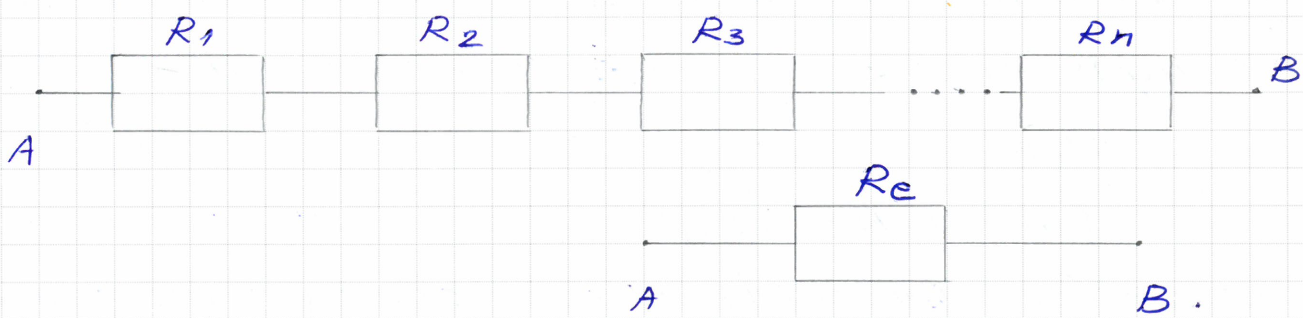
Дакле, добили смо (по I и II Kirchhoff-овом закону) систем линеарних алгебарских jедначина по непознатим струjама коjи треба решити. Таj систем jесте хомоген, jер у jедначинама коjе смо добили из II Kirchhoff-овог закона фигуришу електромоторне силе батериjа коjе треба пребацити на десну страну jедначине. Овако добиjен систем jедначина jе сигурно сагласан, тj. има jединствено решење. Иако смо произвољно усваjали смерове струjа и контура, ми смо у стању да тачно одредимо прави смер струjе кроз гране у колу на основу њихових алгебарских знакова. Ако jе струjа, нпр. 2A, што значи да смо претпоставили прави смер у грани, а ако је, нпр. -3A онда знамо (струја тече у супротном смеру).

108. ВЕЗИВАЊЕ ОТПОРНИКА.

ЕКВИВАЛЕНТНА ОТПОРНОСТ

Постоје (слично као и под кондензатора) серијска (редна) и паралелна веза отпорника. Ако отпорници припадају једној грани кола онда су они редно (серијски) везани, а паралелно су везани ако припадају гранама које су паралелно везане. Гране су паралелно везане ако имају заједничке чворове (из једног све полазе, а у другом се све завршавају).

СЕРИЈСКА (РЕДНА) ВЕЗА:



Ми хоћемо да све отпорнике у грани заменимо једним јединим отпорником. То је могуће урадити једино под условом да се не промени напон између тачака A и B (напон на крајевима гране) и струја која тече кроз грану. Наиме, само коло у том случају неће приметити да се ишта променило у грани A-B. Одредимо R_e тако да ово буде испуњено.

$$U_{AB} = U_{R1} + U_{R2} + \dots + U_{Rn}$$

$$U_{AB} = I \cdot R_e$$

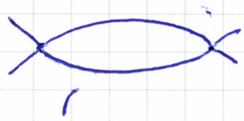
Како је $U_{Ri} = R_i \cdot I$ добијамо релацију $(i=1,\dots,n)$:

$$I\cdot R_e = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n$$

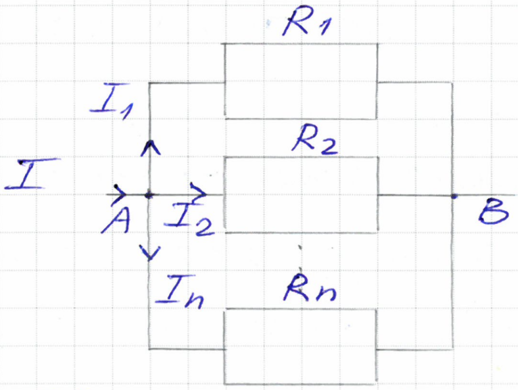
$$IR_e = I(R_1 + \dots + R_n) \quad /:I$$

$$R_e = R_1 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

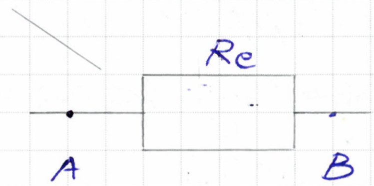
ПАРАЛЕЛНА ВЕЗА:



паралелне гране



Ефекат који хоћемо да остваримо је исти као и малочас.



Дакле, паралелно везане отпорнике $R_1, \dots, R_n$ можемо заменити једним јединим отпорником R_e под условом да се напон U_{AB} не промени. На првој слици сви отпорници $R_1, \dots, R_n$ су на истом напону па имамо:

$$U_{AB} = U_1 = U_2 = \dots = U_n$$

$$U_{AB} = I\cdot R_e$$

На основу I Kirchhoff-овог правила за чвор A ће важити:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

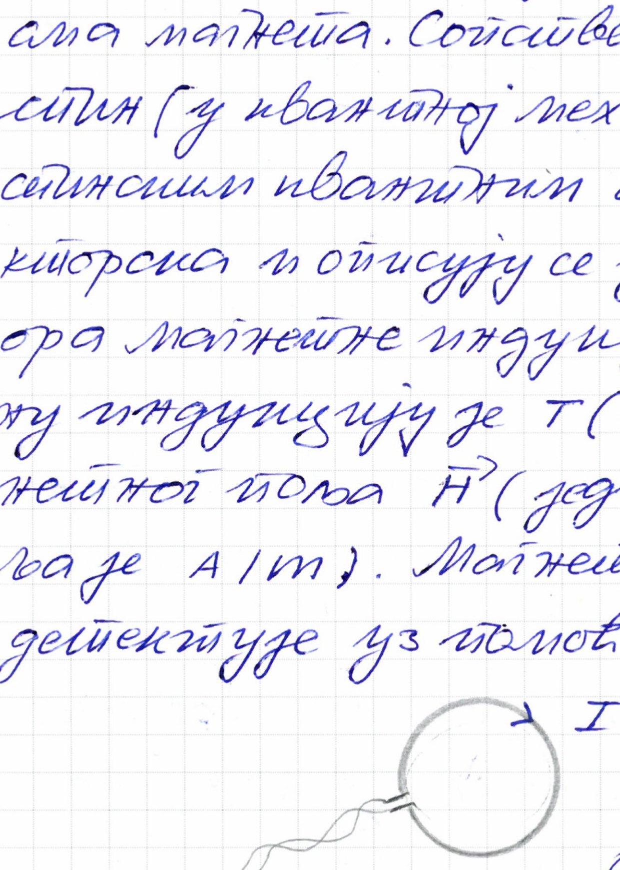
$$\frac{U_{AB}}{R_e} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \dots + \frac{U_n}{R_n}$$

$$\frac{U_{AB}}{R_e} = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \dots + \frac{U_{AB}}{R_n} \quad /:U_{AB}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

109. МАГНЕТИЗАМ

Магнетно поље стварају наелектрисана тела у кретању. Ово поље делује на исти агенс који га ствара, тј. на наелектрисања у кретању, магнетном силом. Једносмерне струје стварају стационарно магнетно поље (поље које се не мења са временом). Временски променљиве струје стварају временски променљива магнетна поља. Временски променљиво магнетно поље ствара (индукује) временски променљиво електрично поље, а оно опет индукује временски променљиво магнетно итд. Овако настала поља називамо електромагнетним пољима и о њима је било речи раније. Наелектрисане честице (електрони, протони, кваркови) поседују тзв. сопствене магнетне моменте, тј. извор су сопствених магнетних поља, иако мирују (ови моменти потичу од ротације ових честица око сопствених оса). Ова својства доприносе магнетним особинама магнета. Сопствени магнетни момент се назива спин (у квантној механици се карактерише тзв. спинским квантним бројем). Магнетна поља су векторска и описују се уз помоћ два вектора: вектора магнетне индукције $\vec{B}$ (јединица за магнетну индукцију је T (тесла)) и вектора јачине магнетног поља $\vec{H}$ (јединица за јачину магнетног поља је A/m). Магнетно поље се експериментално детектује уз помоћ тзв. струјне контуре (реч је о равној контури).

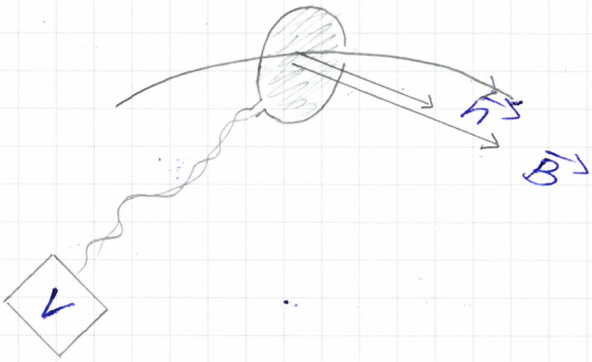


Контура се слободно може оријентисати у простору и примећено је да у присуству магнетног поља спонтано заузима неки карактеристичан положај. Помоћу струјне контуре дефинишемо и вектор магнетне индукције:

$$\vec{B} \overset{def}{=} \frac{\vec{M}_{mag}}{I\cdot S} \qquad [B]=T$$

M_{mag} - момент магнетне силе који закреће контуру, I - јачина струје кроз контуру, а S површина струјне контуре.

Примећено је да се контура спонтано поставља у онај положај у коме је флукс магнетног поља кроз контуру максималан. Правац вектора $\vec{B}$ је нормалан на површ S.



110. LORENTZ-ОВА МАГНЕТНА СИЛА

Посматрајмо наелектрисану честицу која се креће у магнетном пољу индукције $\vec{B}$. Сила којом поље делује на наелектрисање је:

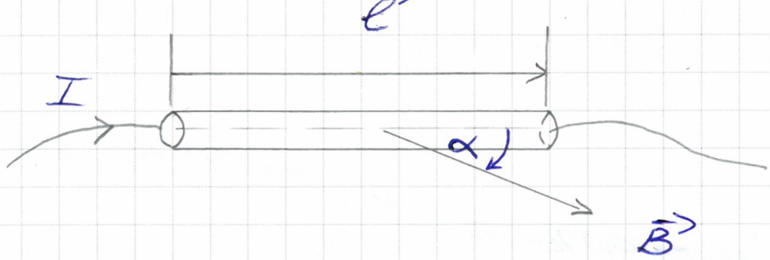
$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B},$$

v - брзина честице, q наелектрисање честице. (ако је $v=0 \Rightarrow F=0$, магнетизам је релативистички ефекат).

Ако имамо струјни проводник кроз који протиче константна струја интензитета I у хомогеном магнетном пољу индукције $\vec{B}$ тада је магнетна сила којом поље делује на проводник дата изразом:

$$\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$$

l - дужина проводника.



Интензитет те силе је $F = I l B \sin\sphericalangle(\vec{l}, \vec{B})$

$F = I l B \sin\alpha$

Између израза за силу која делује на наелектрисање и на струјни проводник постоји веза која показује да је реч о једној истој сили. Почнимо од

$$\vec{F} = n e \vec{v} \times \vec{B} \cdot V = n V e \vec{v} \times \vec{B}$$

n - концентрација електрона у проводнику

V - запремина проводника

N - број електрона у проводнику

$$\vec{F} = N \cdot e \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = n \cdot V e \vec{v} \times \vec{B} =$$

$$= n e \vec{v} \times \vec{B} \cdot V = \vec{J} \times \vec{B} \cdot V = \vec{J} \times \vec{B} \cdot S \cdot l = J S \vec{l} \times \vec{B} =$$

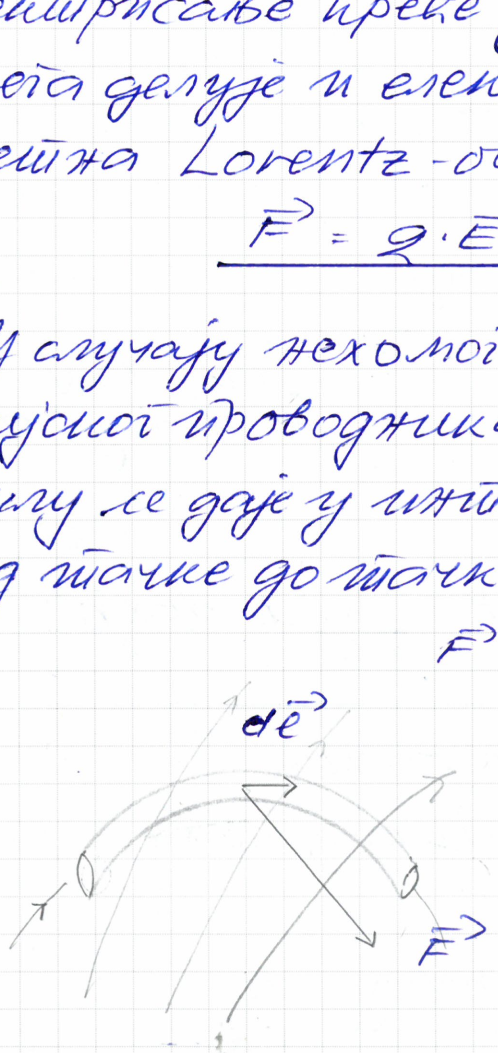
$$\vec{J} \qquad \vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Видимо да су две формуле идентичне. Ако се наелектрисање креће у електромагнетном пољу на њега делује и електрична сила па је укупна магнетна Lorentz-ова сила дата изразом:

$$\underline{\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}}$$

У случају нехомогеног магнетног поља и произвољног проводника са струјом, израз за магнетну силу се даје у интегралној форми, јер сила зависи од тачке до тачке:

$$\vec{F} = I \int_l d\vec{l} \times \vec{B}$$

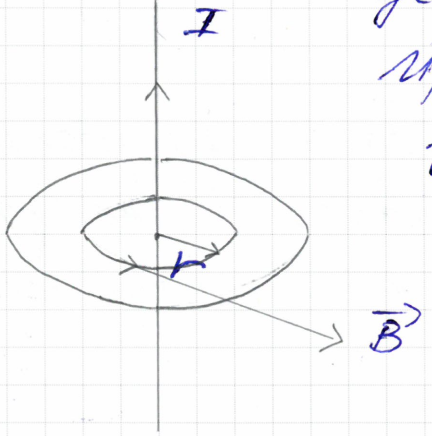


$$d\vec{l} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dl_x & dl_y & dl_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

III. BIOT-SAVART-ОВ ЗАКОН

Biot и Savart су експериментално установили закон који повезује извор магнетног поља (метални проводник кроз који протиче струја) и вектор магнетне индукције. Најпре су вршили експерименте са врло дугачким танким струјним проводницима кроз које је протицала струја константног интензитета I. Приметили су да су линије магнетног поља концентричне кружнице које леже у равни нормалној на проводник. Интензитет в. магнетне индукције је сразмеран интензитету струје, а обрнуто сразмеран растојању од проводника. Орјентација линија магнетног поља се слагала са смером струје по правилу десног завртња.

$B = k \cdot \frac{I}{r}$, k - константа сразмере



Међутим, њихов главни допринос је откриће формуле за криволинијски проводник, тј. формуле која нам казује како се магнетна индукција мења у околини криволинијског проводника:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r_0}}{r^2}$$

$\vec{r_0}$ - орт радијалног правца

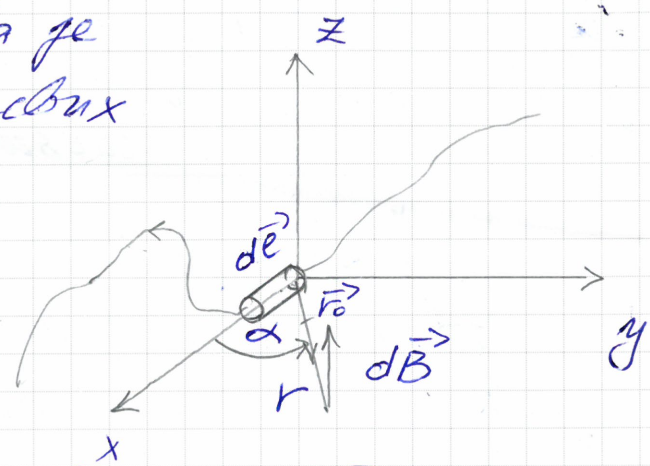
$d\vec{\ell}$ - бесконачно мало дугачак проводник

r - растојање тачке у којој одређујемо поље од елемента $d\vec{\ell}$ (од проводника)

I - интензитет струје кроз проводник

dB - магнетна индукција која потиче од инфинитезимално малог дугог проводника $d\vec{l}$

Укупна магнетна индукција је векторски збир доприноса свих елемената $d\vec{l}$:

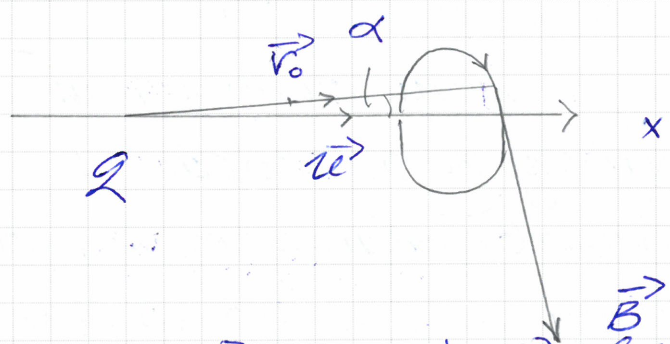


$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin\alpha}{r^2}$$

$$B = \int_l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\alpha \, dl}{r^2}$$

Одатле поље опада са квадратом растојања, а када се израчуна допринос свих делова онда је опадање поља сразмерно r^{-1}. Наводимо израз за магнетску индукцију наелектрисане честице која се креће праволинијски равномерном брзином $\vec{v}$

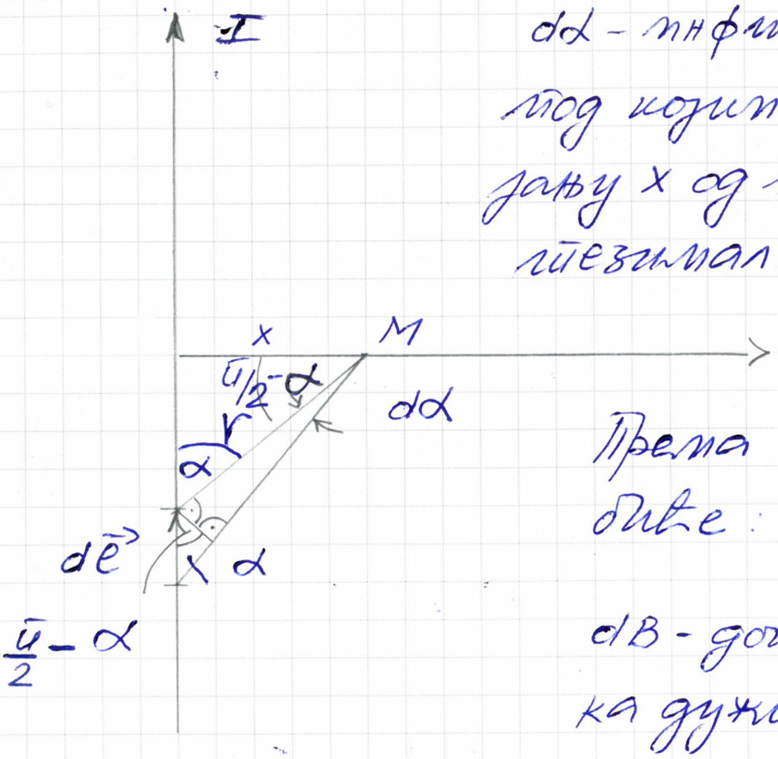
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r_0}}{r^2}$$



Приметимо да је поље дуж правца кретања наелектрисања идентички једнако 0 (дуж x-осе) јер је $\vec{v} \times \vec{r_0} = \vec{0}$ $(\vec{v} \parallel \vec{r_0})$.

112. МАГНЕТНО ПОЉЕ БЕСКОНАЧНО ДУГОГ ПРАВОГ ПРОВОДНИКА

Применом Biot - Savart-овог закона изводимо формулу за магнетну индукцију у околини бесконачно дугог правог проводника са струјом $\underline{I}$ која протиче кроз њега. Потребно је одредити магнетну индукцију на растојању x од проводника.



$d\alpha$ - инфинитезимално мали угао под којим се из тачке M (на растојању x од проводника) види инфинитезимално мали делић проводника дужине dl

Према Biot-Savart-овом закону биће: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{dl \sin\alpha}{r^2}$

dB - допринос делића проводника дужине dl магнетној индукцији. Укупан допринос свих оваквих делића се добија интеграцијом овог израза дуж проводника. Међутим, подинтегрални израз садржи величине α и r које се мењају са променом положаја делића dl. Даље потребно је α изразити у ф-ји од r или што је још погодније, установимо обрнуту зависност ($r = f(\alpha)$). То ћемо урадити уочавањем троугла са два права угла (трећи је инфинитезимално мали), који представља једнакокраки троугао чија основица представља катету другог правоуглог троугла (оног са хипотенузом dl). Користећи апроксимацију да је дужина малог лука једнака дужини одговарајуће тетиве, пишемо да је $r\,d\alpha = dl \sin\alpha$

$$\Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{r\,d\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{d\alpha}{r} \qquad x = r\sin\alpha$$

$$r = \frac{x}{\sin\alpha}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot x} \sin\alpha\, d\alpha$$

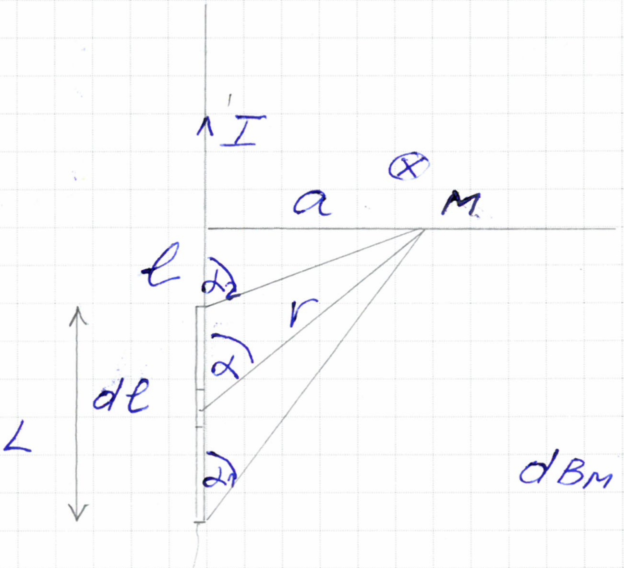
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \sin\alpha\, d\alpha$$

$$B = \int_0^{\pi} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \int_0^{\pi} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi x} (-\cos\alpha) \Big|_0^{\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{x} \qquad B = k \cdot \frac{I}{x} \Rightarrow k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

113. МАГНЕТНО ПОЉЕ ПРАВОГ ПРОВОДНИКА КОНАЧНЕ ДУЖИНЕ

Овај проблем решавамо коришћењем резултата из претходне лекције:



$$dB_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\alpha}{r^2}$$

$$r\, d\alpha = dl \sin\alpha$$

$$dB_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\alpha}{r}$$

$$r = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad dB_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \sin\alpha\, d\alpha$$

$$dB_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha\, d\alpha$$

$$B_M = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha$$

$$B_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

Смер вектора магнетне индукције је у раван папира.

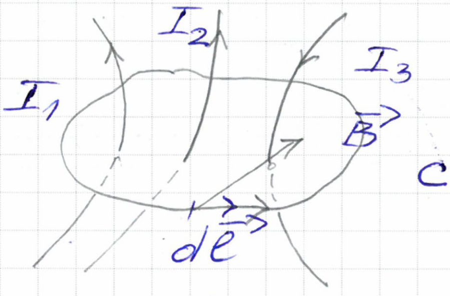
$$B_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \left(\frac{L+l}{\sqrt{(L+l)^2+a^2}} - \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}} \right)$$

Када $L \to +\infty$ добија се $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{a}$

114. AMPÉRE-ОВ ЗАКОН

Поред Biot-Savart-овог закона који је дат у диференцијалној форми постоји још један закон који нам омогућава да израчунамо магнетну индукцију у близини проводника кроз који протиче струја. То је Ampére-ов закон који гласи: циркулација (curl) вектора магнетне индукције по произвољној (наравно затвореној) путањи једнака је алгебарској суми струја обухваћених контуром помножених са μ_0.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$



c - затворена контура

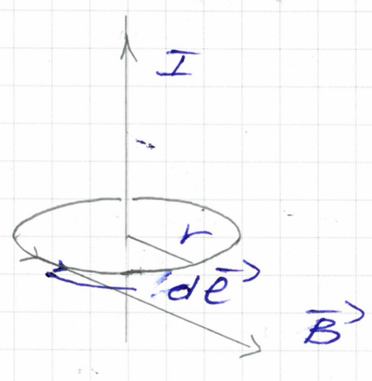
$\vec{B}$ - вектор магнетне индукције која потиче од проводника.

Алгебарски знак струје обухваћене контуром ко одређује по правилу десног завртња тј. струја се узима са знаком + ако се ако се смер контуре са смером струје слаже по правилу десног завртња. У нашем случају:

25.05.2005.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

Одредимо вредност циркулације вектора магнетне индукције бесконачно дугог правог проводника. Према Ampére-овом закону ова вредност треба да је једнака производу μ_0 и интензитета струје. Интеграцију вршимо по линији поља.



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B\oint_C dl = B\cdot 2\pi r$$

B је константно (из разлога симетрије извори поља се из сваке тачке кружнице виде на исти начин)

$$\mu_0 I = B(r)\cdot 2\pi r \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{r}$$

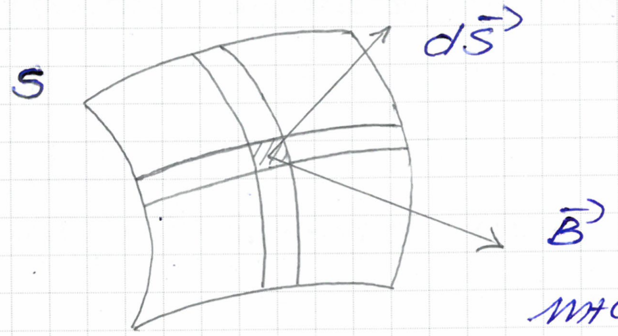
Biot и Savart су експериментално утврдили да важи претходна релација па је $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$

чију поља производе струјни напони. Када је струја једнака 0 тада је и $H=0$, али се материјал претходно намагнетисао и заостала је индукција B_R која потиче од орјентисаних магнетних домена. Протицањем струје супротног смера кроз намотаје и стварањем јачине магнетног поља $-H_C$ можемо да поништимо B_R (тачка H_C на графику). Ова јачина поља се назива КОЕЦЕРВАТИВНА јачина поља. Даље повећање струје у супротном смеру магнетише материјал (део графика у доњем левом углу који је симетричан ономе у горњем десном углу). Са графика је могуће одредити магнетну пермеабилност материјала:

$$\mu = tg\alpha = \frac{dB}{dH}$$

120. FARADAY-ЕВ ЗАКОН ЕЛЕКТРОМАГНЕТНЕ ИНДУКЦИЈЕ

Michael Faraday је експериментално уочио 1831. године (29. августа) да се у проводнику, који се налази у промењивом магнетном пољу, успоставља струја. Овај феномен је, у неку руку, супротан од оног који је 11 година раније запазио Ханс Кристијан Ерстед тј. да се око проводника кроз који протиче струја јавља магнетно поље. Најпре уведимо појам флукса вектора магнетне индукције на сличан начин као што смо то већ радили у електростатици. Посматрамо, у ту сврху, глатку површ S, елементи површи dS и индукцију у тачки унутар површи dS.



$$\Phi \stackrel{def}{=} \int_S \vec{B} \circ d\vec{S}$$

Флукс вектора магнетне индукције је површински интеграл тог вектора.

Овде наводимо (без доказа) да флукс магнетног поља кроз било коју затворену површину, без обзира да ли су том површином обухваћени проводници или не (да ли она обухвата струје или не) увек има вредност 0. Дакле,

$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$$

То се може записати и у диференцијалном облику као $div \vec{B} = 0$ (дивергенција вектора магнетне индукције једнака је нули у свакој тачки поља, $div \vec{B} \stackrel{def}{=} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z}$; више о овоме у Математици III). Ово је једна од фундаменталних особина магнетног поља и назива се закон конзервације магнетног флукса. (заједно са $rot \vec{B} \neq 0$ дефинише соленоидност магнетног поља).

FARADAY-ЕВ ЗАКОН:

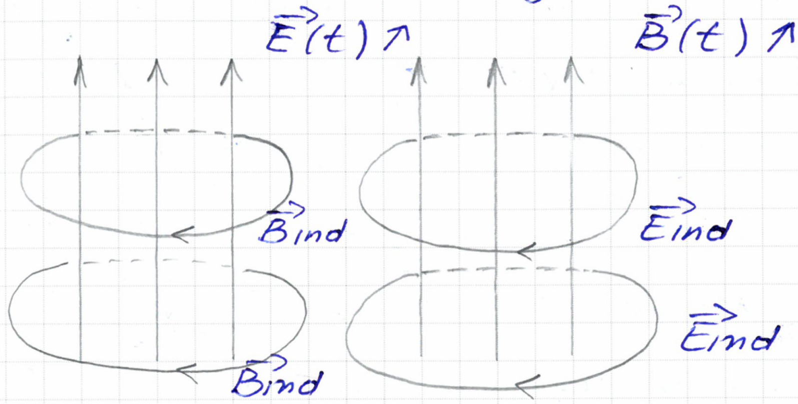
Променљиво магнетно поље спонтано индукује променљиво електрично поље, BUT за разлику од електростатичког, циркулација вектора јачине индукованог електричног поља није 0 тј.

$$\oint_C \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

E_{ind} - индуковано електрично поље

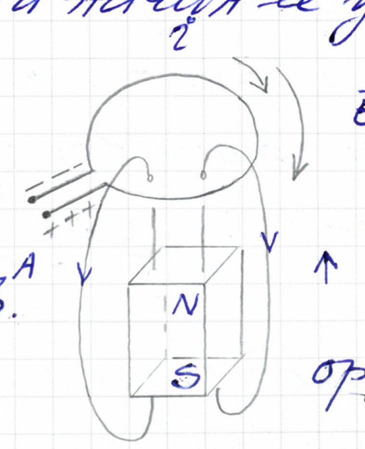
Значи, ако унесемо затворену контуру у ово поље кроз њу ће тећи струја, јер напон индукованог поља по контури није 0. Вредност интеграла

$\oint_C \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}$ једнака је електромоторној сили. Ова електромоторна сила егзистира у простору, чак иако нема никакве контуре, у виду енергије електричног поља. На следећој слици су приказане линије променљивог магнетног и индукованог електричног поља у једном специјалном случају. Магнетно поље је променљиво у смислу да интензитет поља расте у времену. Ако магнетна индукција опада са временом, смер линија поља је супротан. Исто важи ако заменимо улоге вектора $\vec{E}_{ind}$ и $\vec{B}$.



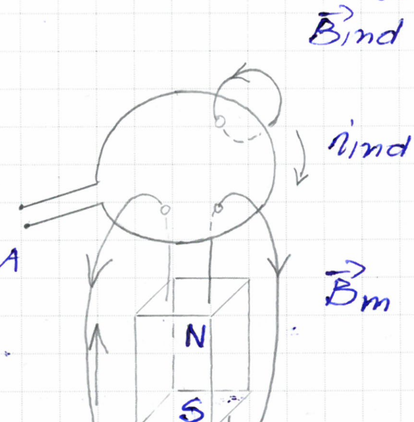
(ово се користи за функционисање антена радио и ТВ станица).

Унесимо у овакво поље једну отворену металну контуру. Нека је магнетна индукција у порасту јер контури приближавамо стални (перманентни) магнет. У простору око контуре се индукује електрично поље чији је део линије приказан на слици. Ово поље Coulomb-овом силом нападне електроне из контуре и помера их ка крају (В) контуре: $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$. На описани начин се у контури успоставља електрична струја која, пак, ствара сопствено магнетно поље. Смер овог поља је занимљив. Наиме, његове линије су оријентисане



сл 1.

-супротно у односу на линије спољашњег магнетног поља, што практично значи да се магнетна поља одбијају. Дакле, померање магнета се врши искључиво уз примену силе. Контура се понаша као батерија. Агенс који раздваја наелектрисања је индуковано електрично поље. Ако удаљавамо магнет од контуре, јавља се привлачна сила, а струја тече кроз контуру у смеру супротном од оног на слици 1 (индукује се електрично поље супротног смера), па се електрони гомилају у тачки А. На следећој слици (слика 2) је дат технички смер струје приликом приближавања магнета.



сл. 2

Треба приметити супротне оријентације линија $\vec{B}_{ind}$ и $\vec{B}_m$. Faraday је приметио да је централна величина за опис ових процеса магнетни флукс, а не индукована електромоторна сила, јер је индуковање напона у контури могуће и без промене магнетног поља, нпр. њеним померањем (окретањем око осе) (релативистички ефекат). Тај проблем је решио Einstein у свом раду „Електродинамика тела у кретању". Индукована електромоторна сила, дакле, зависи од флукса магнетног поља кроз површ ослоњену на контуру. Faraday је на следећи начин формулисао индуковану електромоторну силу:

$$\mathcal{E} \stackrel{def}{=} -\frac{d\phi}{dt}$$

тј. електромоторна сила која се индукује у контури једнака је негативном изводу флукса по вр времену (мисли се на флукс магнетног поља), а

$$\mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l}$$

Ако флукс опада у времену $\left(\frac{d\phi}{dt} < 0\right)$ индукована електромоторна сила је позитивна ($\mathcal{E} > 0$), а у супротном је мања од 0 ($\mathcal{E} < 0$). Ово се може схватити и израчунавањем интеграла $\int \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l}$. У првом случају (слика 1) $\int_A^B \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} < 0$ (угао $\measuredangle(\vec{E}_{ind}, d\vec{l}) = \pi$) што заједно са - из Faraday-евог закона даје позитивну вредност $\mathcal{E}$. У супротном случају је $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$, па је $\mathcal{E} < 0$. Ово практично значи да је могуће одредити технички смер струје која се индукује, (слика 1) и која у овом случају тече од B ка A тј. од тачке вишег ка тачки нижег потенцијала (тамо где се нагомилавају електрони виши је и електрични потенцијал).

LENZ-ОВО ПРАВИЛО:

Смер индуковане струје је такав да се она својим флуксом супротставља промени која је изазива тј. она сопственим флуксом тежи да поништи промену флукса поља која је изазива (настаје померањем магнета, обртањем калема). Дакле, флукс у магнетизму игра улогу масе тј. инерције. Флукс стоји ако тежи да остане константан. Ако се, пак, мења, онда се мора улагати и рад (гурање магнета или заокретање контуре).

121. ЕЛЕКТРОМАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА У ПОКРЕТНИМ ПРОВОДНИЦИМА

До индуковања електричног поља долази и када се