Transport toplote

Osnovno

→ Toplota ⇔ energija koju sistem razmenjuje sa okolinom putem haotičnih sudara molekula sistema i okoline kada postoji razlika temperatura između sistema i okoline, što ima za posledicu promenu srednje kinetičke energije haotičnog kretanja molekula sistema i okoline

→ Sistem i okolina mogu da razmene i mehanički rad, koji je takođe vid energije razmenjen haotičnim sudarima molekula sistema i okoline ali je posledica te razmene pojava uređenog kretanja molekula sistema/okoline (translacija, rotacija, vibracija čitavih delova sistema/okoline) pri čemu nije neophodno da postoji razlika temperatura sistema i okoline

→ Temperatura ⇔ makroskopski parametar koji se meri srednju kinetičku energiju haotičnog kretanja molekula

$$E_k = \frac{i}{2} k_B T$$ - srednja kinetička energija 1 molekula

$k_B = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ - Boltzmann-ova konstanta

i - broj stepeni slobode (i=3 - jednoatomni, i=5 dvoatomni, i=6 - troatomni)

⇔ mera unutrašnje energije tela/sistema

→ Idealni gasovi ⇒ unutrašnja energija je direktno srazmerna temperaturi

→ 3 mehanizma transporta toplote u prirodi:

① Provođenjem ⇔ čvrsta tela

karakteriše ga interakcija molekula unutar čvrstog tela

⇒ toplota se prenosi iz oblasti više temperature u oblast niže

ne postoji makroskopsko kretanje molekula u toku provođenja toplote ⇒ postoje samo haotične vibracije, čije su amplitude veće tamo gde je temperatura veća

② Prelazom ⇔ fluidi (na kontaktu telo-fluid/tečnost-gas)

karakteriše ga strujanje molekula

postoje:

① prirodno i

② prinudno strujanje

(podstaknuto je za veštački način ⇔ stvaranjem razlike pritiska u fluidu ⇔ ventilator/pumpa)

Konvekcija

⇔ fenomen koji prati prelaz/rast toplote

⇒ za ovaj način, razmenjena toplota zavisi od izuzetno velikog broja parametara, jer je povezana sa opisom kretanja fluida (velika oblast sama za sebe)

③ Zračenje

⇔ Sva tela zagrejana na $T>0K$ (⇔ sva tela) zrače elektromagnetne zrake kroz vazduh (⇔ bilo šta)

ti zraci spadaju u infracrveni deo spektra ⇒ nisu vidljivi za čoveka

⇒ možemo ih posredno osetiti kroz zagrevanje kože

⇒ mogu da predu u vidljivi deo spektra ako su tela dovoljno zagrejana

(usijano gvožđe - crveno, 300-400°C,
istopljeno gvožđe - belo, >1500°C,
Površina Sunca - savršeno bela, na 5800K)

izvor ovog zračenja ⇔ naelektrisanja u telu koja se kreću ubrzano

⇒ svaki molekul zrači

Temperaturno polje

⇔ funkcija koja svakoj tački sredine dodeljuje temperaturu

→ izoterma ⇔ skup tačaka koje imaju istu temperaturu

⇒ može da bude linija/površ

⇒ međusobno se ne seku (jer bi tačke preseka imale 2 temperature a to je nemoguće)

$$\boxed{T=T(x,y,z,\tau)}$$, τ - vreme [s]

→ polje može da bude:

① nestacionarno ⇔ zavisi od vremena τ

② stacionarno ⇔ vremenski nepromenljivo

→ Gradijent polja (opisuje temperaturno polje, veličina) ⇔ vektor je

$$\boxed{\text{grad}\,T(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\left[\frac{K}{m}\right]}$$

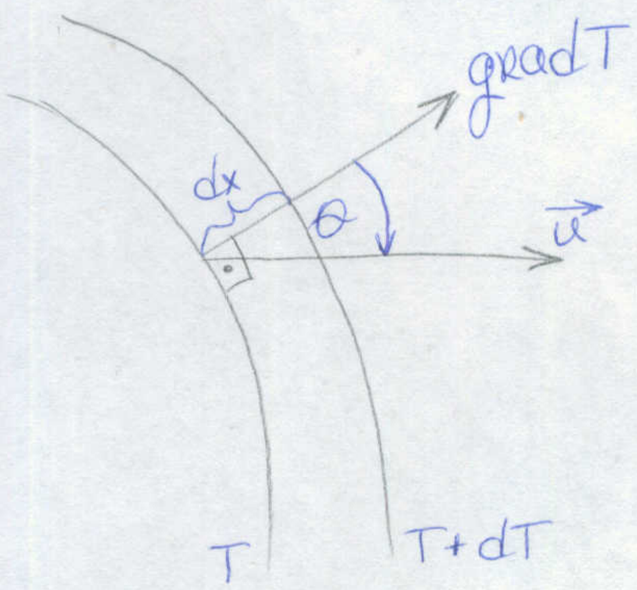
$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - ortovi Descart-ovog pravouglog sistema

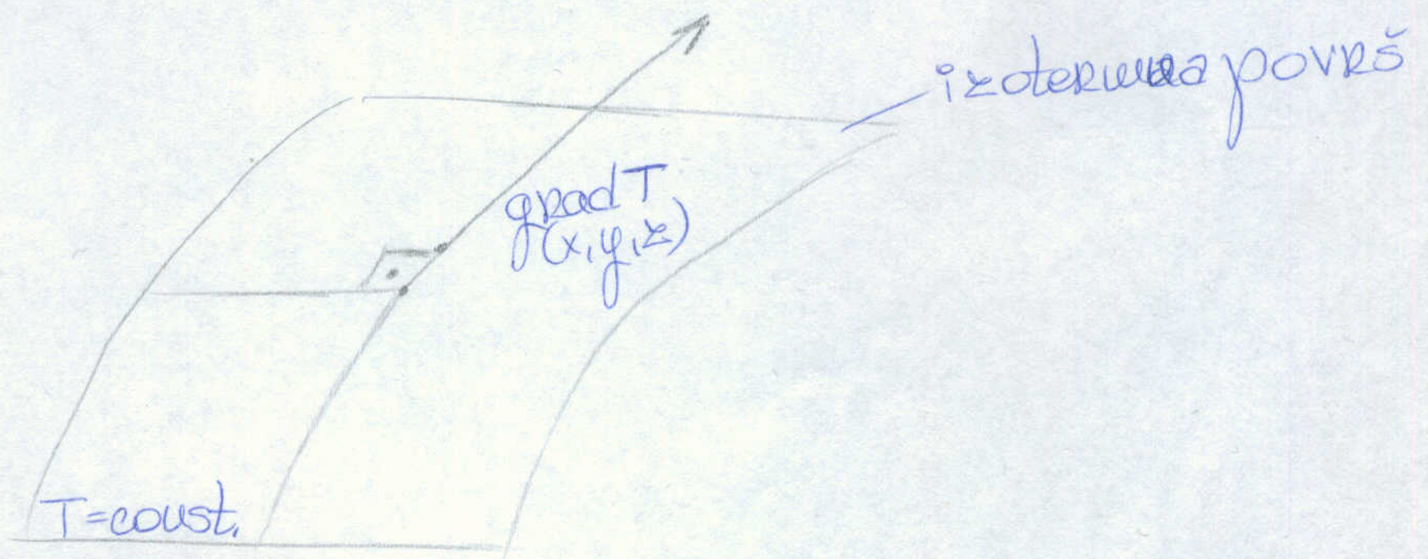
⇒ svojstva gradijenta:

① normalan je na izotermnu površ

② ima pravac najbrže promene temperature, posmatrano iz tačke u kojoj je definisan

③ intenzitet (dužina) mu je ⩵ brzini promene temperature duž pravca normale na izotermu





$|\text{grad}\,T| = \frac{dT}{dx}$ ⇔ intenzitet je ⩵ brzini promene temperature pri kretanju duž tog pravca

→ brzina promene temperature duž proizvoljnog pravca (pod uglom)

⇔ ~~pro~~ skalarni proizvod gradijenta i orta pravca ⇔ slika

$$\boxed{\boxed{\text{grad}T \cdot \vec{u} = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} \cdot \vec{u} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \cos\alpha}}$$

→ Fourier-ov zakon provođenja toplote

dobijen eksperimentalnim putem

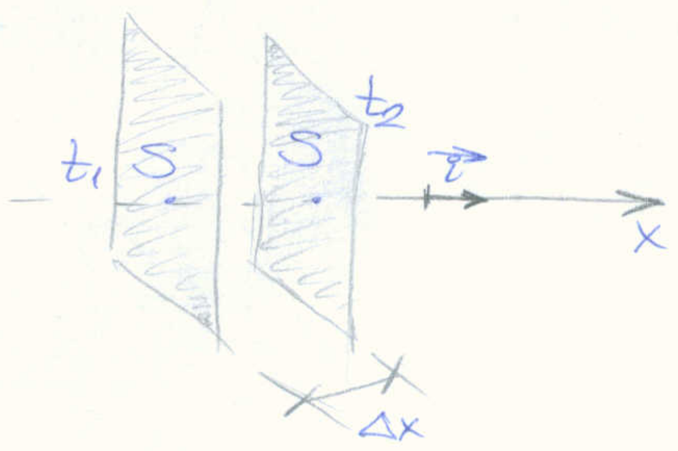
Posmatrano:

homogenu izotropnu sredinu i

2 ll površi površine S na rastojanju Δx

$\Delta t = t_1 - t_2$ - razlika temperatura površi

* interesuje nas količina toplote koja se provede duž pravca normalnog na površi ⇔ duž x-ose



⇒ provedena toplota Q će biti direktno srazmerna površini S, vremenu provođenja τ, & razlici temperatura Δt, i toplotnom svojstvu materijala koje se opisuje fizičkom veličinom λ - toplotna provodnost,

a obrnuto je srazmerna rastojanju Δx

$$\Leftrightarrow \boxed{Q \sim S, \tau, \Delta t, \lambda} \wedge \boxed{Q \sim \frac{1}{\Delta x}}$$

⇒ Fourier-ov zakon

$$\boxed{Q = \lambda \frac{S\tau\Delta t}{\Delta x} = \lambda S\tau \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)[J]}$$

$$\Rightarrow Q \sim |\text{grad}\, t(x)| \qquad |\text{grad}\, t(x)|$$

⇒ provedena toplota je direktno srazmerna gradijentu temperaturskog polja (i otuda veliki značaj ove veličine)

$$\Rightarrow \boxed{Q = -\lambda S\tau\, \text{grad}\, t(x)\vec{i}}$$

znak $-$ je veštački dodat, jer je $\text{grad}\, t = \frac{dt}{dx} < 0$, zato što toplota prenosi u smeru opadanja temperature

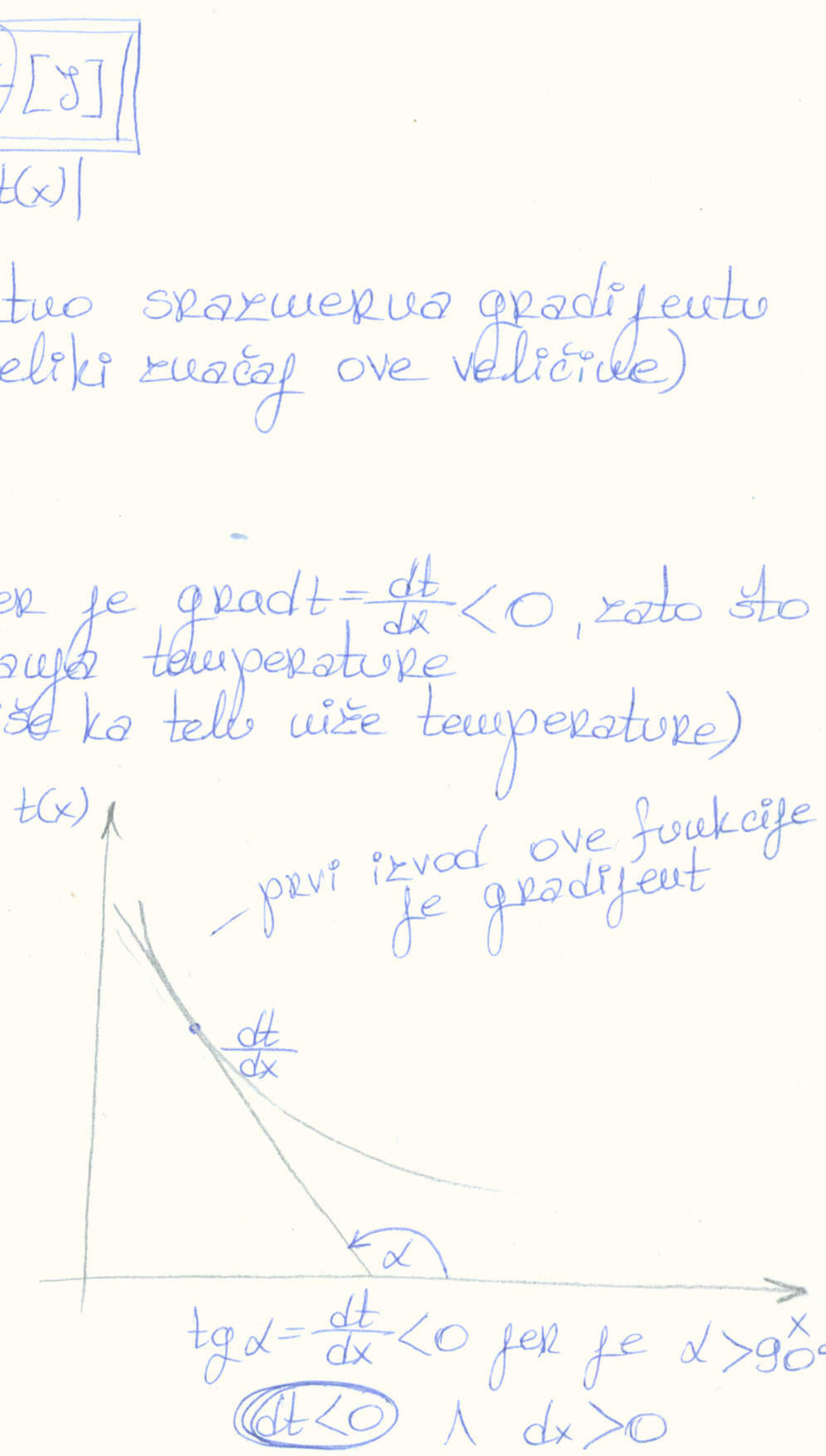
(⇔ toplota struji od tela više ka telu niže temperature)

$\lambda \left[\frac{W}{mK}\right]$

⇔ koliko se J po s provede kroz 1m za 1K

$\lambda >$ veće ⇒ materijal je lošiji toplotni izolator

⇔ bolji toplotni provodnik



→ Definišemo fizičke veličine:

① Toplotni fluks

daje (ukupne toplotne gubitke) kroz termički omotač
(za dobijanje ovog podatka projektujemo snagu grejača)
⇔ koliko toplote prođe kroz zid

$$\Phi\,[W] \overset{def.}{=} \frac{Q}{\tau} = -\lambda S \frac{dt}{dx}\,[W]$$

② Gustina toplotnog fluksa

služi za poređenje 2 različita zida po pitanju efikasnosti toplotnih gubitaka

$$q = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \frac{dt}{dx}\left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Toplotne karakteristike materijala

→ difuzni - najbolje provodi toplotu (ima najveće λ)

→ toplota se provodi vibracijom molekula
(sudare se molekul (I) više i (II) niže energije ⇒ I prenese II energiju)

→ λ - toplotna provodnost
najvažnija toplotna karakteristika materijala
određuje se za sva 3 agregatna stanja
čvrsta i tečna tela ⇒ još uvek ne postoji zadovoljavajuća teorija za izračunavanje λ
gasovi ⇒ postoji zadovoljavajuća teorija
⇒ određuje se isključivo eksperimentalnim putem
⇔ standardizovanim metodama
na vrednost λ utiče enormno mnogo faktora - skoro svi su na mikroskopskom nivou
nije moguće povezano opisivanje kretanja koja su odgovorna za vrednost λ - zbog složenosti strukture molekula i njihovog haotičnog kretanja

najviše utiču na λ:
① vrsta materijala
② temperatura } odnosi se prevashodno na porozne
③ sadržaj vlage } materijale (kod metala postoji samo ② zavisnost)

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \lambda(T, H) = \lambda_0 + aT + bH}$$

λ_0 - toplotna provodnost na $t = 0°C$, kada je sadržaj vlage $H = 0$ ⇔ suvi uzorak
⇒ λ se menja linearno sa temperaturom i sadržajem vlage

⇒ Porozni materijali
(opeka, drvo, beton, kamena vuna, ...)
imaju složeniju zavisnost preko sadržaja vlage H nego temperaturu
(opeka potpuno zasićena vlagom, laki betoni
⇒ 3-6 × > veća vrednost nego pri normalnim uslovima)

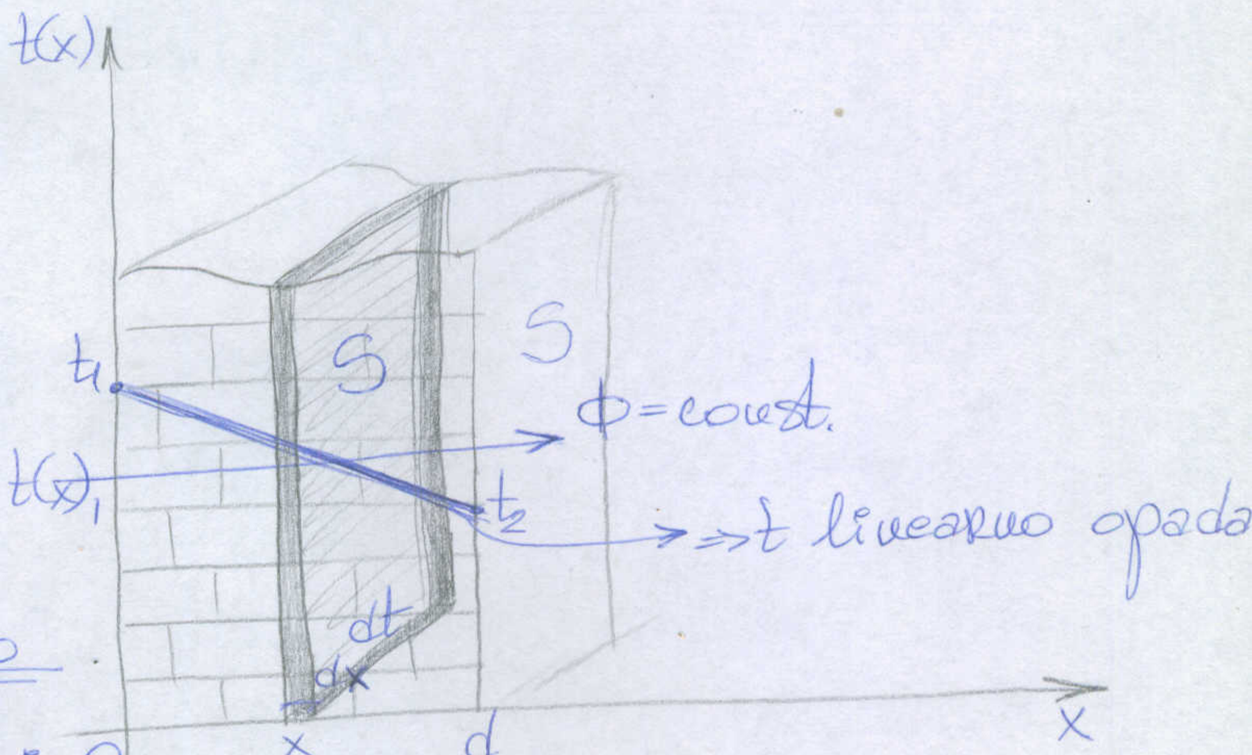
Provođenje toplote kroz ravan homogen zid

@Provođenje toplote

→ Posmatramo:
homogen zid debljine d,
toplotne provodnosti λ,
čije su površine na t_1 i t_2 $(t_1 > t_2)$

→ Određujemo:
toplotni fluks gubitaka Φ,
gustinu toplotnog fluksa q,
temperatursko polje unutar zida $t(x)$

→ Smatramo da je
$t(x)$ unutar zida stacionarno.
⇒ pod ovim uslovima je toplotni fluks $\Phi = const.$ (promena Φ-a bi podrazumevala grejanje/hlađenje zida)



⇒ Polazimo od Fourier-ove jednačine za fluks

$$\Phi = -\lambda S \frac{dt(x)}{dx} [W], \quad S - \text{površina zida}$$

$$\Phi = const. \Rightarrow \Phi dx = -\lambda S dt(x) \; / \int$$

$$\Phi \int_0^x dx = -\lambda S \int_{t_1}^{t(x)} dt(x)$$

tražimo t na proizvoljnom mestu zida

$$\Phi(x-0) = -\lambda S (t(x) - t(0)) = -\lambda S (t(x) - t_1)$$

$$\Rightarrow t(x) = t_1 - \frac{\Phi}{\lambda S} x \quad \text{– izraz za temperaturno polje}$$

Φ – možemo da odredimo preko t_2

za $x = d \Rightarrow t(x) = t_2$

$$t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{\lambda S} d$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{d}{\lambda S}} = \frac{\Delta t}{R_t}$$

$R_t = \frac{d}{\lambda S} \left[\frac{K}{W}\right]$ – termički otpor zida uvek (deo u imenioc Φ-a)

⇒ zidovi > debljine, < površine i < toplotne provodljivosti imaju > vrednost termičkog otpora

optimizacija vrednosti R_t se vrši preko parametara d i λ

$$\Rightarrow \boxed{t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{d} x}$$

→ Gustina toplotnog fluksa

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{d}{\lambda}} \left[\frac{W}{m^2}\right].$$

→ Definišemo još jednu veličinu kojom se karakteriše otpor provođenja toplote (osim R_T):

R - vrednost zida

$$R \overset{def.}{=} S \cdot R_T \left[\frac{\Delta t}{q}\right] \left[\frac{m^2 K}{W}\right]$$

predmet uvođenja R:
ne zavisi od površine zida ⇒ možemo da poredimo zidove različitih površina po kvalitetu termičkog otpora

$$R_T = \frac{d}{\lambda S} \Rightarrow \boxed{R = \frac{d}{\lambda} \left[\frac{m^2 K}{W}\right]}$$

→ Definišemo još jednu veličinu kojom se opisuje proces provođenja toplote

U - koeficijent toplotne provodnosti
predstavlja recipročnu vrednost R vrednosti zida:

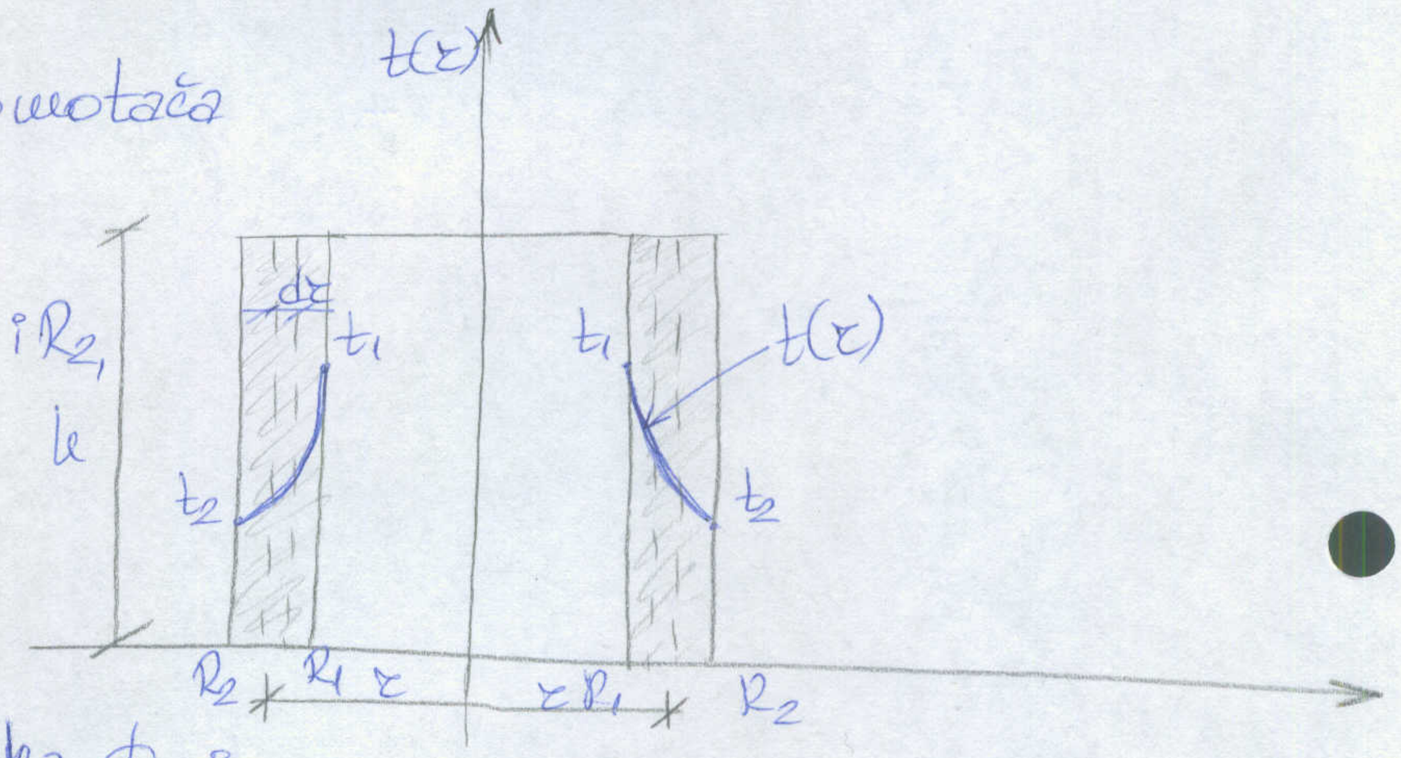
$$\boxed{U = \frac{1}{R} = \frac{\lambda}{d} \left[\frac{W}{m^2 K}\right]}$$

⇒ fizički smisao veličine U: (⇔ ∃)
⇔ toplota koju zid provede za 1s kroz $1m^2$ svoje površine ako je razlika temperatura površina zida 1K (1°C)

Provođenje toplote kroz (šuplji) cilindrični zid

→ Posmatramo:
homogen zid u vidu omotača cilindra (ili neku cev)
toplotne provodnosti λ,
poluprečnika površina R_1 i R_2,
visine h

→ Određujemo:
temperatursko polje unutar zida $t(r)$,
fluks toplotnih gubitaka Φ, i
termički otpor zida R_T



→ Pretpostavljamo da je
temperatura unutrašnje površine t_1, a spoljašnje t_2
⇒ Polazimo od Fourier-ove jednačine za fluks u stacionarnim uslovima:

$$\Phi = -\lambda S \frac{dt}{dr} [W]$$

→ Posmatramo: jedan koaksijalni cilindar (⇔ zajednička/ista osa), čiji su zidovi ∞ male debljine dr, čiji je poluprečnik r
⇒ površina omotača cilindra je $S = 2\pi r h$
(takođe ⇒ postoji samo jedna površina S)

$$\Rightarrow \Phi = -\lambda 2\pi h r \frac{dt}{dr}$$

dt - razlika temperatura površina unutrašnjeg koaksijalnog cilindra

→ U <u>stacionarnim</u> uslovima ⇔ temperature se ne menjaju u vremenu

⇒ fluks $\Phi = const.$ ⇒ prethodnu jednačinu možemo da rešimo prostim razdvajanjem promenljivih t i r

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\lambda_k}{\Phi} dt \Big/ \int$$

$$\int_{R_1}^{r} \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi\lambda_k}{\Phi} \int_{t_1}^{t(r)} dt$$

$$\ln r \Big|_{R_1}^{r} = -\frac{2\pi\lambda_k}{\Phi} t \Big|_{t_1}^{t(r)}$$

$$\ln r - \ln R_1 = -\frac{2\pi\lambda_k}{\Phi} (t(r) - t_1)$$

$$\Rightarrow t(r) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_k} \ln \frac{r}{R_1}$$

⇔ temperatura opada logaritamski u funkciji od r

→ odredimo sada fluks Φ:

za $r = R_2 \Rightarrow t(R_2) = t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_k} \ln \frac{R_2}{R_1}$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda_k} \ln \frac{R_2}{R_1}} \Leftarrow R_T$$

imenilac fluksa je termički otpor, a u brojiocu je <u>uvek</u> razlika temperatura

$$\Leftrightarrow R_T = \frac{1}{2\pi\lambda_k} \ln \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{K}{W}\right]$$

⇔ što je zid deblji ⇒ $R_T >$, jer je $\ln \frac{R_2}{R_1} >$

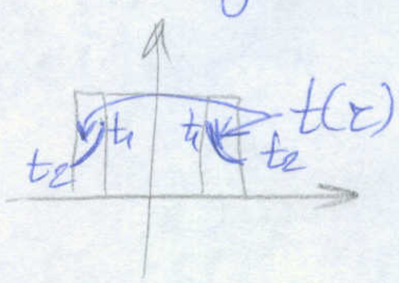
toplotna provodnost $< \Rightarrow R_T >$

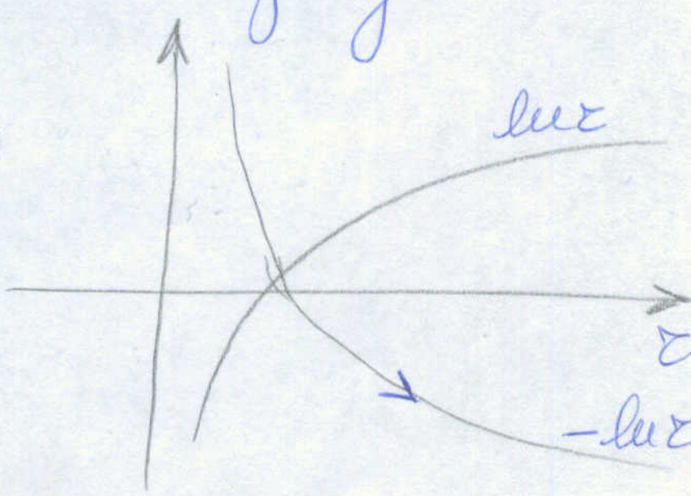
zid veće visine ⇒ $R_T <$ (↗ toplotni gubici, jer ↗ S)

⇒ termički otpor efektivno opada

⇒ raspored fluksa u izrazu za temperaturno polje:

$$\boxed{t(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}}$$





→ <u>Gustina fluksa</u>

ne može da se definiše jer zid nema istu površinu sa obe strane ($q = \Phi/S$)

⇒ definiše se <u>podužna gustina fluksa</u>

$$\boxed{q_l = \frac{\Phi}{l} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}} \left[\frac{W}{m}\right]}$$, l-visina zida

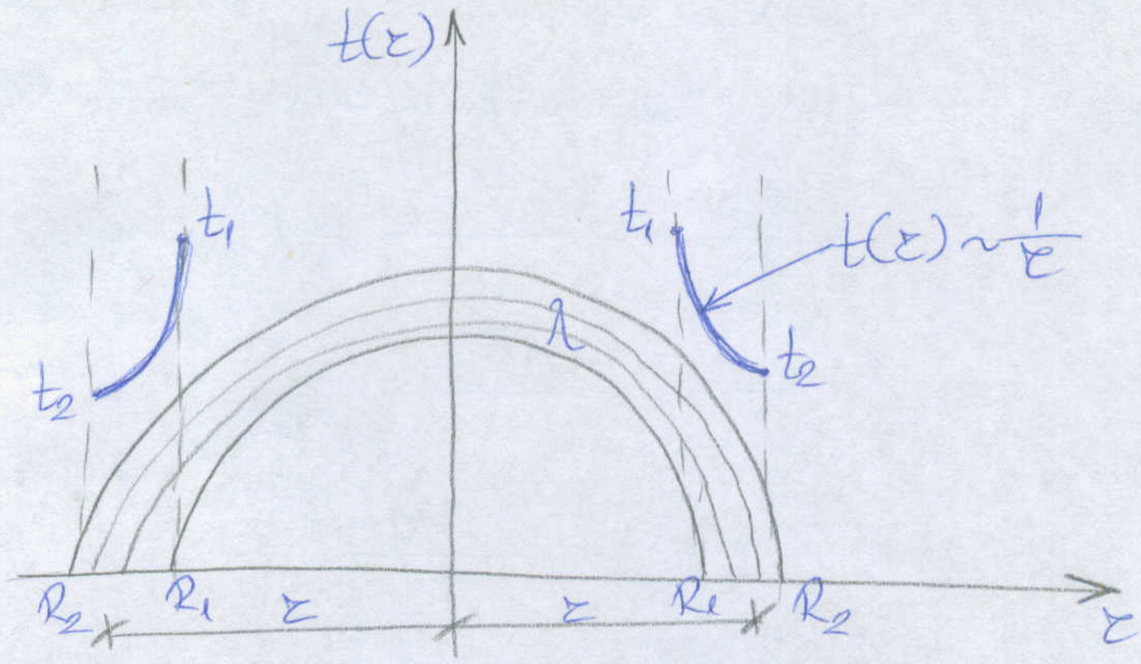
⇔ q_l predstavlja gubitke toplote u jedinici vremena po $1m$ visine

⇒ q_l se koristi za upoređenje gubitaka različitih cilindričnih zidova

Provođenje toplote kroz sferni zid

→ Posmatramo:
sferni kupolu (polusferu) od homogenog materijala,
toplotne provodljivosti λ,
poluprečnika površina R_1 i R_2,
temperatura t_1 i t_2

→ Određujemo:
temperatursko polje unutar kupole $t(r)$,
fluks toplotnih gubitaka Φ, i
termički otpor kupole R_T



⇒ Polazimo od Fourier-ove jednačine za fluks kroz ∞ tanku sfernu ljusku debljine dr sa razlikom temperatura površina dt

$$\Phi = -\lambda S \frac{dt}{dr}$$

$S = 2r^2\pi$ (lopta: $P = 4r^2\pi \Rightarrow$ polulopta: $P = 2r^2\pi$)

$$\Phi = -\lambda 2\pi r^2 \frac{dt}{dr}$$

$$\frac{dr}{r^2} = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} dt \,/\int$$

$$\int_{R_1}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} \int_{t_1}^{t(r)} dt$$

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi}(t(r) - t_1)$$

$$\Rightarrow t(r) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)$$ - Temperatursko polje u kupoli

⇔ temperatura opada kao hiperbola $t(r) \sim \frac{1}{r}$

→ odredimo fluks Φ:

za $r = R_2 \Rightarrow t(R_2) = t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \Longleftrightarrow R_T$$

$$R_T = \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$ - Termički otpor

važi isto ⇔ ⊛ debljina zida > ⇒ R_T >, ...

→ kada zamenimo fluks u izraz za temperatursko polje

$$\Rightarrow \boxed{t(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)}$$

→ Gustina fluksa
ne može da se definiše

$$\circledast \int_{R_1}^{r} r^{-2} dr = \frac{r^{-1}}{-1}\Big|_{R_1}^{r} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}$$

Prelaz toplote

@Prelaz toplote

⇔ uzajam fenomena transporta toplote između čvrstog tela i fluida (gas/tečnost)

⇔ konvekcija (stručni naziv)

→ karakteriše ga pojava strujanja fluida oko tela koje miruje, što je posledica pojave sile potiska

→ strujanje može biti prinudno (vetar/ventilator/pumpa), zato govorimo o: ①prirodnoj i ②prinudnoj konvekciji

→ javlja se sila potiska - jer toplији (lakši) fluid podiže (spušta) pod dejstvom ove sile

→ topliji fluid ima manju gustinu od hladnijeg

⇒ specifična težina mu je manja

⇒ sila potiska je veća od težine, a to izaziva kretanje zagrejanog vazduha naviše kada je okružen hladnijim

i obrnuto:

hladniji vazduh usled skupljanja postaje gušći, specifično teži i usled gravitacije pada naniže

→ od brzine strujanja direktno zavisi količina toplote koja se razmeni između tela i fluida

⇒ zato, za određivanje razmenjene toplote bismo morali tačno da opišemo strujanje fluida

(teško izvodljivo u praksi - jer se strujanje skoro uvek javlja u vidu turbulencija (⇔pojave vrtloga) što je praćeno složenim procesima)

→ fluid se u ekstremno tankom sloju uz čvrsto telo ne kreće zbog hrapavosti površine ⇒ konvekcija započinje provođenjem toplote kroz nepokretan „film" fluida uz samo telo

→ brzina strujanja fluida oko tela - zavisi od njegovog oblika, položaja, orijentacije, hrapavosti površine, razlike temperatura fluida i tela, ...

→ uvodi se fizička veličina α - koeficijent prelaza toplote $\left[\frac{W}{m^2K}\right]$

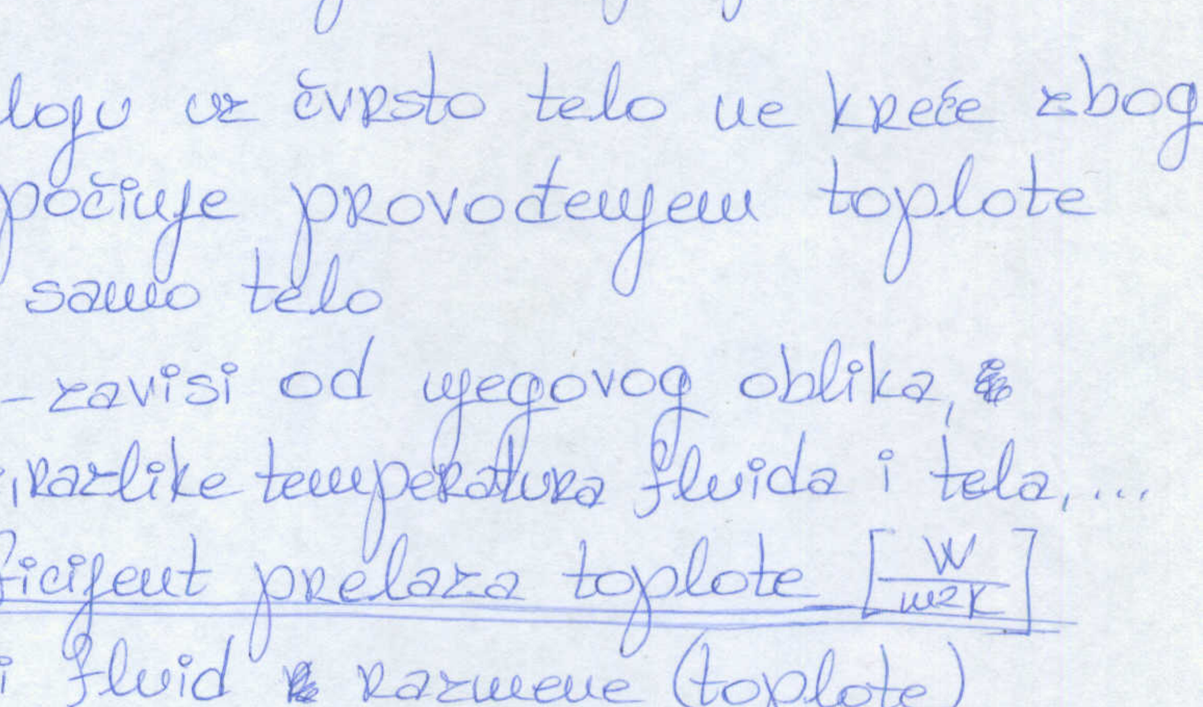
⇔ govori koliko J u 1s tj. W telo i fluid razmene (toplote) konvekcijom kada je razlika temperatura 1K, a površina kontakta $1m^2$

→ Toplota razmenjena konvekcijom:

$$Q = \alpha S \tau (t - t_f)$$

S - površina tela,
τ - vreme razmene toplote
t - temperatura tela
t_f - temperatura fluida van zone strujanja oko tela (⇔daleko od tela)

Ravan zid i složenији konvekcije sa obe strane



$Q_1 = \alpha_1 S \tau (t_1 - t_{z_1})$ - toplota koja se vazduhu prede na zid

$Q_2 = \alpha_2 S \tau (t_{z_2} - t_2)$ - toplota koja zid preda spoljašnjoj sti

t_1, t_2 - temperature daleko od zida

Prolaz toplote

Prolaz-jednoslojni zid

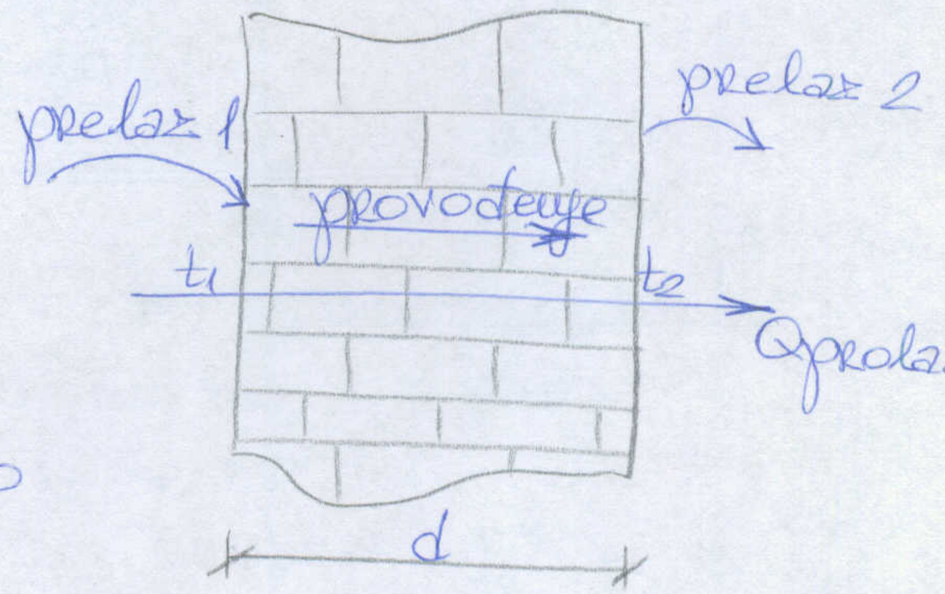
↔ razmena toplote između 2 fluida koja deli čvrsto telo

→ toplota najpre prelazi sa fluida na čvrsto telo, zatim se provodi kroz telo i na kraju sa tela prelazi na drugi fluid

⇒ prolaz ⟺ prelaz 1 + provođenje + prelaz 2

→ interesuje nas formula za $Q_{prolaza}$:

$$Q_{prolaza} = U \cdot S \cdot (t_1 - t_2)$$



$U \left[\frac{W}{m^2 K}\right]$ - koeficijent prolaza toplote

↙ zavisi od $\alpha_1, \alpha_2, \lambda, d, \ldots$

najčešće se određuje eksperimentalno (a može i teorijski)

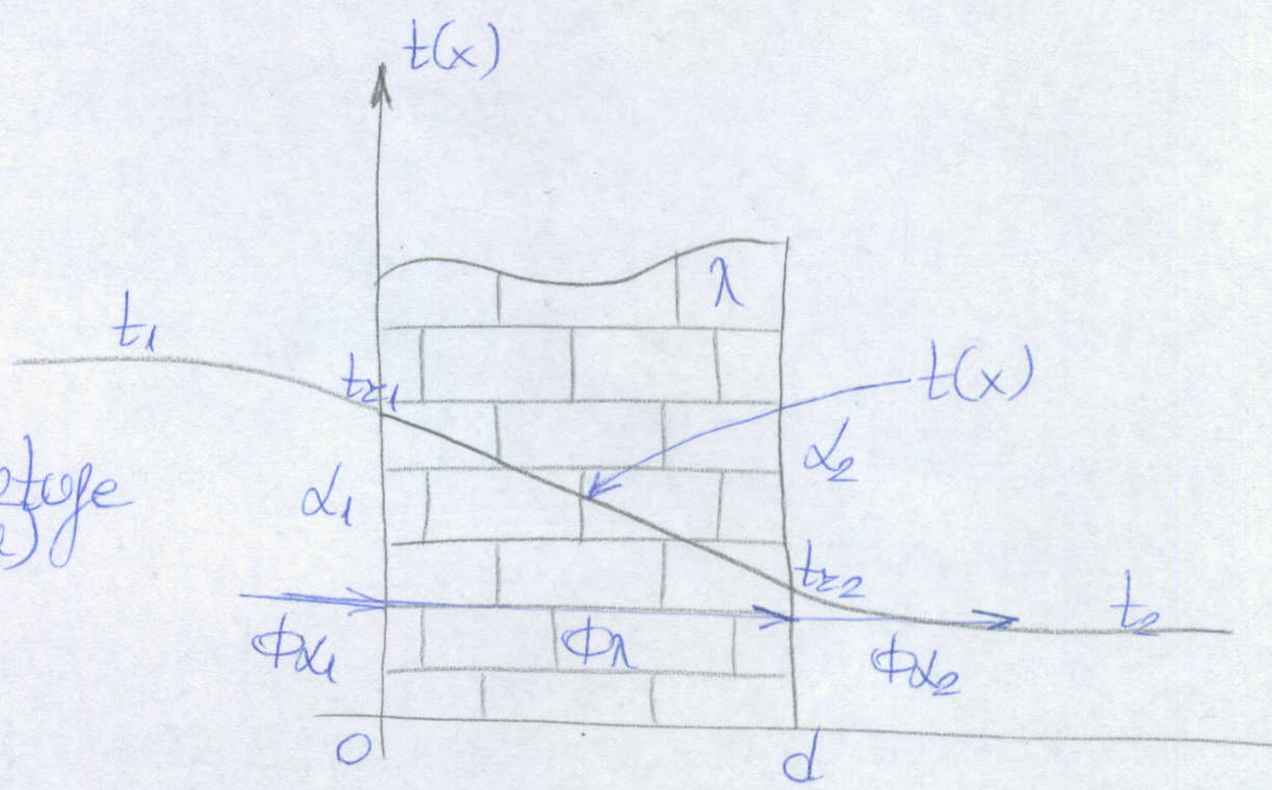
Prolaz toplote kroz ravan zid

→ Posmatramo:

homogen ravan zid toplotne provodnosti λ, debljine d

→ Određujemo:

toplotu koja prođe (transportuje se provođenjem)



⇒ Fluks prelaza toplote sa vazduha na zid

$$\Phi_{\alpha_1} = \alpha_1 S (t_1 - t_{z1}) \; [W]$$

⇒ Fluks provođenja kroz zid

$$\Phi_\lambda = \frac{t_{z1} - t_{z2}}{\frac{d}{\lambda S}}$$

⇒ Fluks prelaza toplote sa zida na vazduh

$$\Phi_{\alpha_2} = \alpha_2 S (t_{z2} - t_2)$$

→ U stacionarnim uslovima su sve temperature = const. u vremenu ⇒ fluksevi $\Phi_{\alpha_1}, \Phi_\lambda$ i Φ_{α_2} moraju da budu isti

$$\Phi_{\alpha_1} = \Phi_\lambda = \Phi_{\alpha_2} = \Phi$$

→ odredimo Φ:

$$t_1 - t_{z1} = \frac{\Phi}{\alpha_1 S}$$

$$\oplus \quad t_{z1} - t_{z2} = \Phi \frac{d}{\lambda S}$$

$$\oplus \quad t_{z2} - t_2 = \frac{\Phi}{\alpha_2 S}$$

$$\Rightarrow t_1 - t_2 = \Phi \left(\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{d}{\lambda S} + \frac{1}{\alpha_2 S} \right)$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{d}{\lambda S} + \frac{1}{\alpha_2 S}} \; [W]$$

→ Ukupni fluks je termički otpor prolaza toplote:

$$R_T = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right) \left[\frac{K}{W}\right]$$

$\Rightarrow R_{T\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1 S}$ - termički otpor prelaza sa vazduha na zid

$R_{T\lambda} = \frac{d}{\lambda S}$ - termički otpor provođenja

$R_{T\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2 S}$ - termički otpor prelaza sa zida na vazduh

→ Gustina toplotnog fluksa

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{U}$

→ U vrednost zida

$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[\frac{W}{m^2 K}\right]$$

→ iz izraza za Φ_{α_1}, Φ_λ i Φ_{α_2}

$\Rightarrow$ $t_{z_1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\alpha_1 S \frac{1}{S}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{\alpha_1}$

$t_{z_2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{\alpha_2}$

→ Treba da odredimo temperaturno polje unutar zida

Koristimo već izvedenu formulu za $t(x)$ (lekcija „Provođenje toplote kroz ravan zid", s tim što u ovoj lekciji temperature površina zida t_1 i t_2 obeležavamo sa t_{z_1} i t_{z_2}), dakle:

$\Leftrightarrow$ $t(x) = t_{z_1} - \frac{t_{z_1} - t_{z_2}}{d} x$

$\Rightarrow$ $t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \frac{1}{\alpha_1} - \frac{\Phi \cdot \frac{d}{\lambda S}}{d} \cdot x$

$t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \frac{1}{\alpha_1} - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \frac{x}{\lambda}$

$t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{x}{\lambda}\right)$

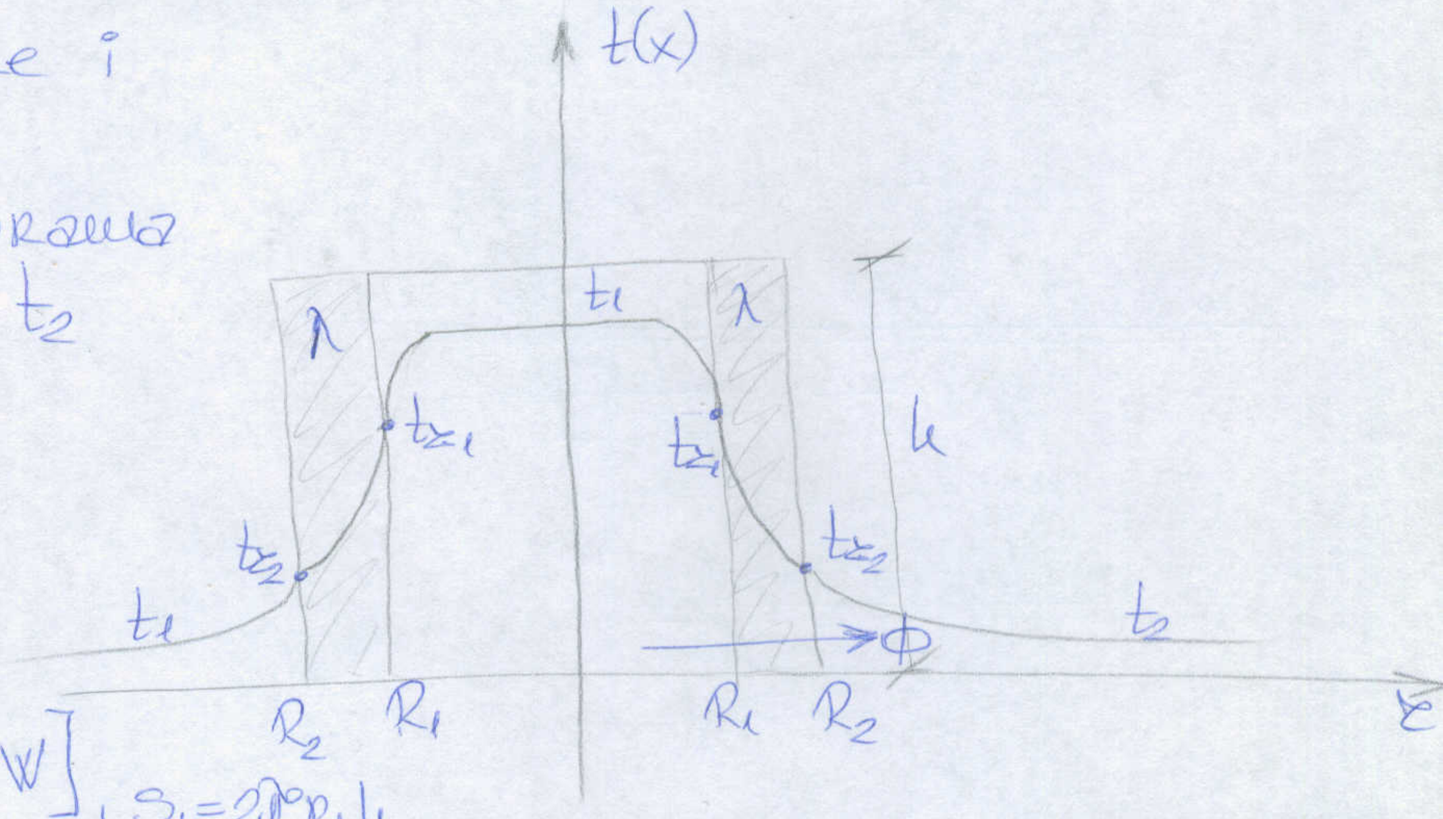
Provera:

za $x = 0 \Rightarrow t(x) = t_{z_1}$

za $x = d \Rightarrow t(x) = t_{z_2}$ ✓

Prolaz toplote kroz cilindričan zid

→ Analiziramo:
homogen cilindričan zid od materijala toplotne provodnosti λ,
poluprečnika unutrašnje i spoljašnje površine R_1 i R_2,
sa poznatim temperaturama vazduha unutar i van, t_1 i t_2



→ Fluks prelaza toplote sa unutrašnjeg vazduha na unutrašnju površinu zida:

$$\Phi_{\alpha_1} = \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z_1}) \left[\frac{J}{s} = W\right], \quad S_1 = 2R\pi R_1 l$$

→ Fluks provođenja kroz zid:

$$\Phi_\lambda = \frac{t_{z_1} - t_{z_2}}{\frac{1}{2R\pi\lambda l} \ln\frac{R_2}{R_1}}$$

→ Fluks prelaza sa zida na spoljašnji vazduh

$$\Phi_{\alpha_2} = \alpha_2 S_2 (t_{z_2} - t_2), \quad S_2 = 2R\pi R_2 l$$

$$\Phi_{\alpha_1} = \Phi_\lambda = \Phi_{\alpha_2} = \Phi \text{ (stacionaran slučaj)}$$

$$\Rightarrow t_1 - t_{z_1} = \frac{\Phi}{\alpha_1 2R\pi R_1 l}$$

$$t_{z_1} - t_{z_2} = \frac{\Phi}{2R\pi\lambda l} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\oplus \quad t_{z_2} - t_2 = \frac{\Phi}{\alpha_2 2R\pi R_2 l}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2R\pi l}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}\right)} \ [W]$$

⇒ Termički otpor

$$R_T = \frac{1}{2R\pi l}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}\right) \left[\frac{K}{W}\right]$$

⇒ Podužna gustina fluksa

$$q = \frac{\Phi}{l} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2R\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}\right)} \left[\frac{W}{m}\right]$$

$$t_{z_1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\alpha_1 \frac{2R\pi l}{2R\pi l} R_1 \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}\right)} \cdot \alpha_1 R_1 = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1}$$

$$t_{z_2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\alpha_2 \frac{2R\pi l R_2}{2R\pi l}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha_2 R_2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\alpha_2 R_2}$$

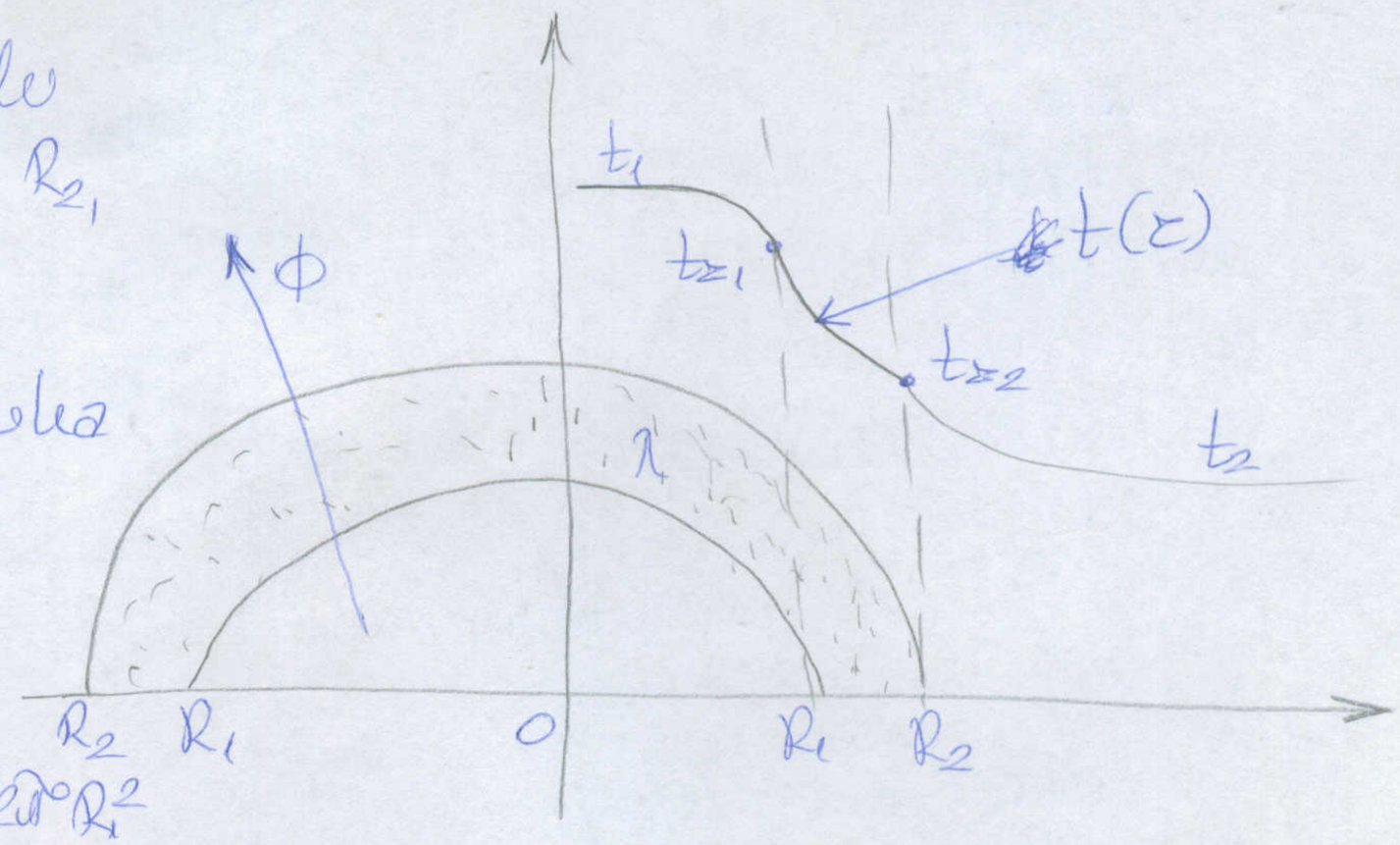
→ $t(r) = ?$

$$t(r) = t_{z_1} - \frac{\Phi}{2R\pi\lambda l}\ln\frac{r}{R_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1} - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1}$$

$$\Rightarrow t(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1}\right)$$

Prolaz toplote kroz sferu kupolu

→ Posmatramo:
homogenu sferu kupolu poluprečnika površina R_1 i R_2, od materijala toplotne provodnosti λ,
sa temperaturama vazduha pod kupolom i van kupole t_1 i t_2



→ $\phi_{\alpha_1} = \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z_1})$, $S_1 = 2\pi R_1^2$

$$\phi_\lambda = \frac{t_{z_1} - t_{z_2}}{\frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

$\phi_{\alpha_2} = \alpha_2 S_2 (t_{z_2} - t_2)$, $S_2 = 2\pi R_2^2$

$\phi_{\alpha_1} = \phi_\lambda = \phi_{\alpha_2} = \phi$

$$\Rightarrow (*)\ t_1 - t_{z_1} = \frac{\phi}{\alpha_1 2\pi R_1^2}$$

$$t_{z_1} - t_{z_2} = \frac{\phi}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\oplus\ (***)\ t_{z_2} - t_1 = \frac{\phi}{\alpha_2 2\pi R_2^2}$$

$$\Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\phi}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}\right)$$

$$\phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}\right)}\ [W]$$

⇒ Termički otpor

$$R_T = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}\right)\ \left[\frac{K}{W}\right]$$

$$\text{iz } (*) \Rightarrow t_{z_1} = t_1 - \frac{\phi}{2\pi\alpha_1 R_1^2} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1^2}$$

$$\text{iz } (***) \Rightarrow t_{z_2} = t_2 + \frac{\phi}{2\pi\alpha_2 R_2^2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}$$

→ $t(z) = ?$

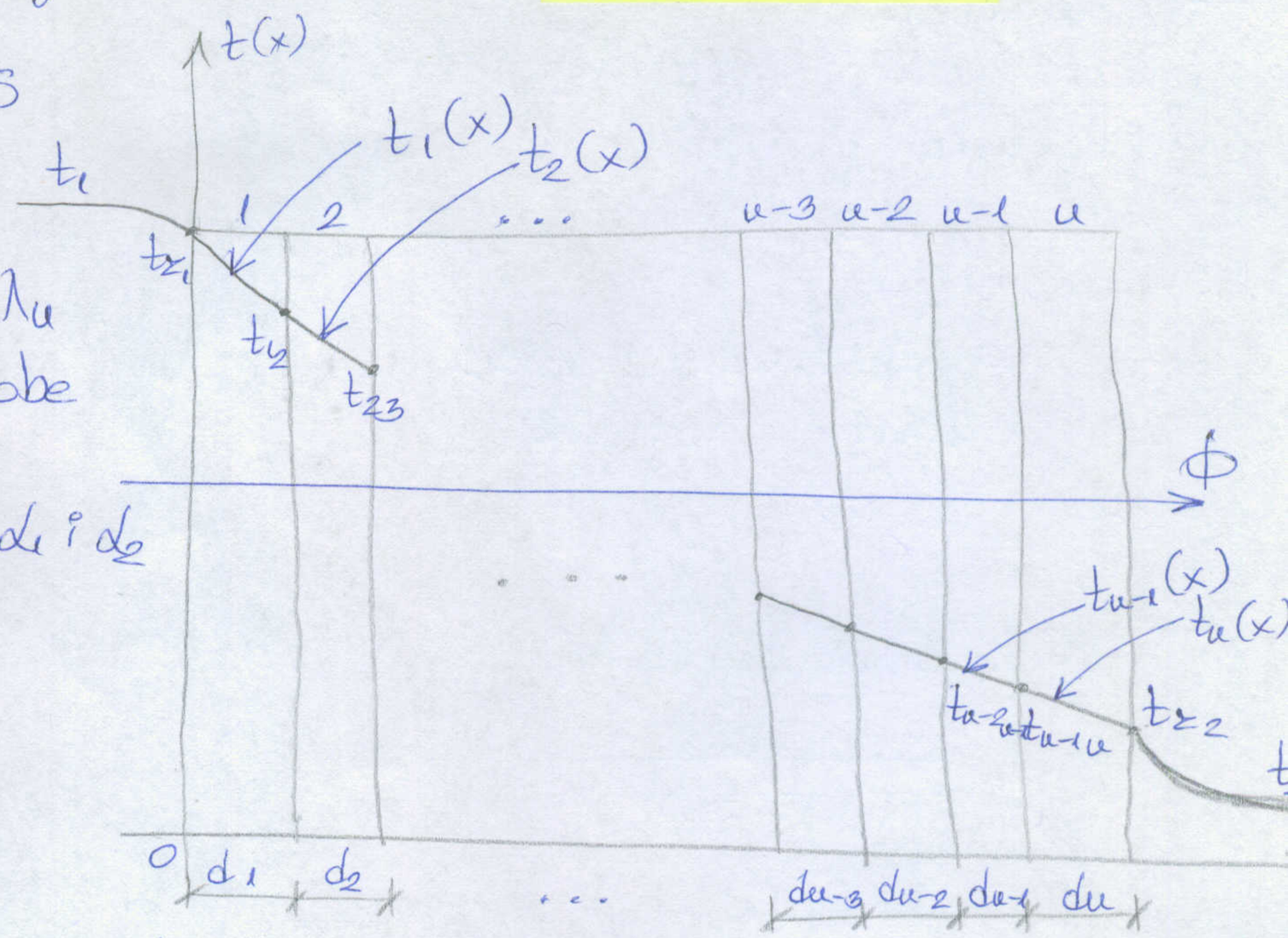
$$t(z) = t_{z_1} - \frac{\phi}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{z}\right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{z}\right)$$

$$t(z) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{z}\right)\right)$$

Prolaz toplote kroz višeslojni ravan zid

Prolaz-višeslojni zid

→ Posmatramo:
ravan zid površine S
koji se sastoji od u-slojeva
debljina $d_1, \dots, d_u$
toplotnih provodnosti $\lambda_1, \dots, \lambda_u$
temperature <u>vazduha</u> sa obe
strane zida su t_1 i $t_{2,a}$
koeficijenti prelaza toplote α_1 i α_2



→ Analiziramo:
stacionarni slučaj
→ Određujemo
① fluks gubitaka Φ,
② gustinu fluksa q,
③ temperature površina zida t_{z_1} i t_{z_2}
④ temperature na spojevima slojeva $t_{z_1}, \dots, t_{u-1u}$, i
⑤ temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(x), \dots, t_u(x)$

① → Na slici je dat presek zida
⇒ Fluksevi prelaza toplote Φ_{α_1} i Φ_{α_2} i provodenja
kroz slojeve $\Phi_1, \dots, \Phi_u$ su:

$\Phi_{\alpha_1} = \alpha_1 S (t_1 - t_{z_1})$ - fluks prelaza sa vazduha na zid
$\Phi_1 = \frac{\lambda_1 S}{d_1} (t_{z_1} - t_{1,2})$ - ~~provo~~fluks provodenja kroz 1. sloj
$\Phi_2 = \frac{\lambda_2 S}{d_2} (t_{1,2} - t_{2,3})$
⋮
$\Phi_{u-2} = \frac{\lambda_{u-2} S}{d_{u-2}} (t_{u-3\,u-2} - t_{u-2\,u-1})$
$\Phi_{u-1} = \frac{\lambda_{u-1} S}{d_{u-1}} (t_{u-2\,u-1} - t_{u-1\,u})$
$\Phi_u = \frac{\lambda_u S}{d_u} (t_{u-1\,u} - t_{z_2})$ - fluks provodenja kroz u-ti sloj
$\Phi_{\alpha_2} = \alpha_2 S (t_{z_2} - t_2)$ - fluks prelaza sa zida na vazduh

„stacionarni slučaj" ⇒ $\Phi_1 = \dots = \Phi_u = \Phi_{\alpha_1} = \Phi_{\alpha_2} = \Phi$

⊛' $t_1 - t_{z_1} = \frac{\Phi}{\alpha_1 S}$
$t_{z_1} - t_{1,2} = \frac{\Phi d_1}{\lambda_1 S}$
$t_{1,2} - t_{2,3} = \Phi \frac{d_2}{\lambda_2 S}$
⋮
$t_{u-3\,u-2} - t_{u-2\,u-1} = \Phi \frac{d_{u-2}}{\lambda_{u-2} S}$
$t_{u-2\,u-1} - t_{u-1\,u} = \Phi \frac{d_{u-1}}{\lambda_{u-1} S}$
⊛'' $t_{u-1\,u} - t_{z_2} = \Phi \frac{d_u}{\lambda_u S}$
✱ $t_{z_2} - t_2 = \Phi \frac{1}{\alpha_2 S}$

⊕

$\Rightarrow t_1 - t_2 = \Phi \left(\frac{1}{\alpha_1 S} + \sum_{i=1}^{u} \frac{d_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{\alpha_2 S} \right)$

$$\boxed{\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{S}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{u} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}}$$

- fluks kroz u-slojni zid

$$\Rightarrow R_T = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}\right)\left[\frac{K}{W}\right]$$

② gustina toplotnog fluksa $q = \frac{\Phi}{S}$

$$\boxed{q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left[\frac{W}{m^2}\right]}$$

$\Rightarrow$ koeficijent prolaza toplote $U = \frac{1}{SR_T}$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$$

③ iz ⊛' $\Rightarrow t_{z_1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\frac{1}{\alpha_1}$

iz ⊛'' $\Rightarrow$ $t_{z_2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\frac{1}{\alpha_2}$

④ $-\!\!|\!\!-$ $\Rightarrow t_{12} = t_{z_1} - \Phi\frac{d_1}{\lambda_1 S} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\frac{1}{\alpha_1} - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\frac{d_1}{\lambda_1}$

$$\Leftrightarrow t_{12} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1}\right)$$

$-\!\!|\!\!-$ $\Rightarrow t_{23} = t_{12} - \Phi\frac{d_2}{\lambda_2 S} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}\right)$

⋮

$-\!\!|\!\!-$ $\Rightarrow t_{u-2\,u-1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{u-2}\frac{d_i}{\lambda_i}\right)$

$-\!\!|\!\!-$ $\Rightarrow t_{u-1\,u} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{u-1}\frac{d_i}{\lambda_i}\right)$

⑤ temperaturska polja unutar slojeva $\Leftrightarrow$ preko jednačine prave $\frac{t_1(x) - t_{z_1}}{t_{z_2} - t_{z_1}} = \frac{x - 0}{d - 0}$

$$t_1(x) = t_{z_1} - \frac{t_{z_1} - t_{12}}{d_1}x = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\frac{1}{\alpha_1} - \frac{\Phi\frac{d_1}{\lambda_1 S}}{d_1}x =$$

$$= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{x}{\lambda_1}\right)$$

~~$t_2(x) =$~~ ⑥ + ⑦

$$t_{12} - t_{23} = \Phi\frac{d_2}{\lambda_2 S}$$

⑧ = želimo da koordinatni sistem počinje od 2. sloja

$$t_2(x) = t_{12} - \frac{t_{12} - t_{23}}{d_2}(x - d_1) =$$

$$= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{x - d_1}{\lambda_2}\right)$$

$\Rightarrow$

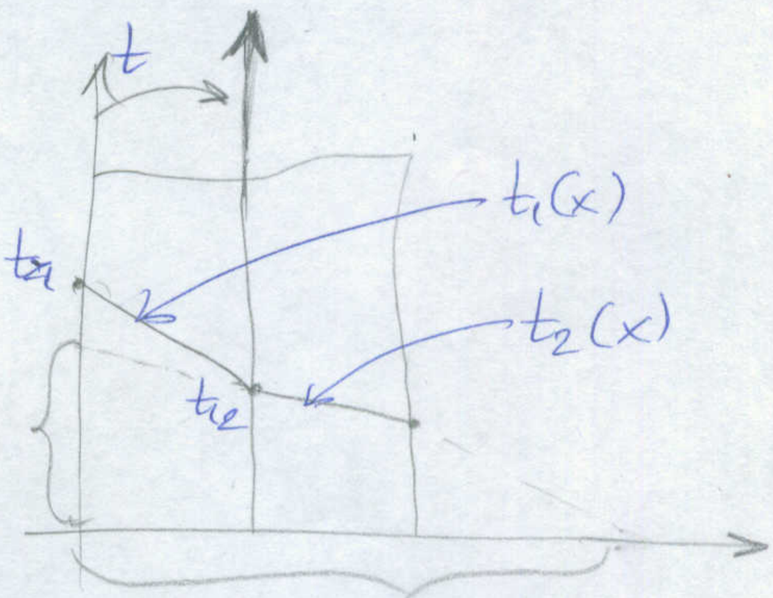
$$t_3(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{x - (d_1 + d_2)}{\lambda_3}\right)$$

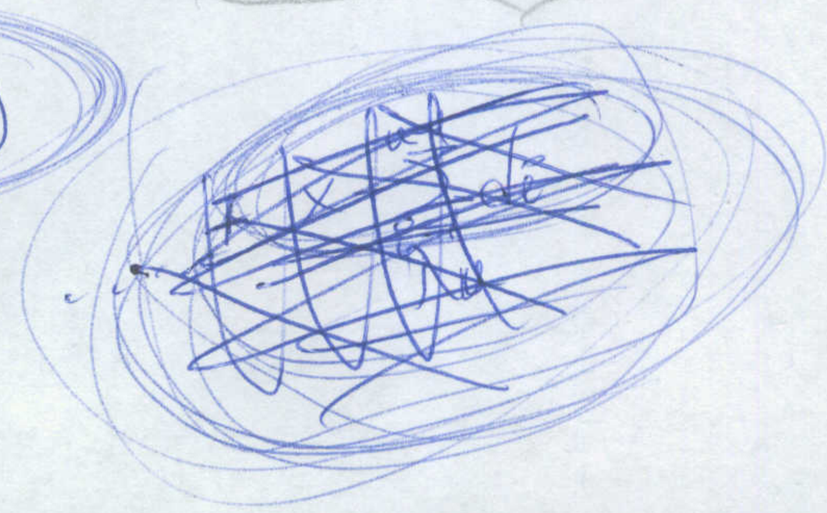
⋮

$$\boxed{t_k(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{x - \sum_{i=1}^{k-1} d_i}{\lambda_k}\right)}$$

$$t_{u-1}(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{u-2}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{x - \sum_{i=1}^{u-2} d_i}{\lambda_{u-1}}\right)$$

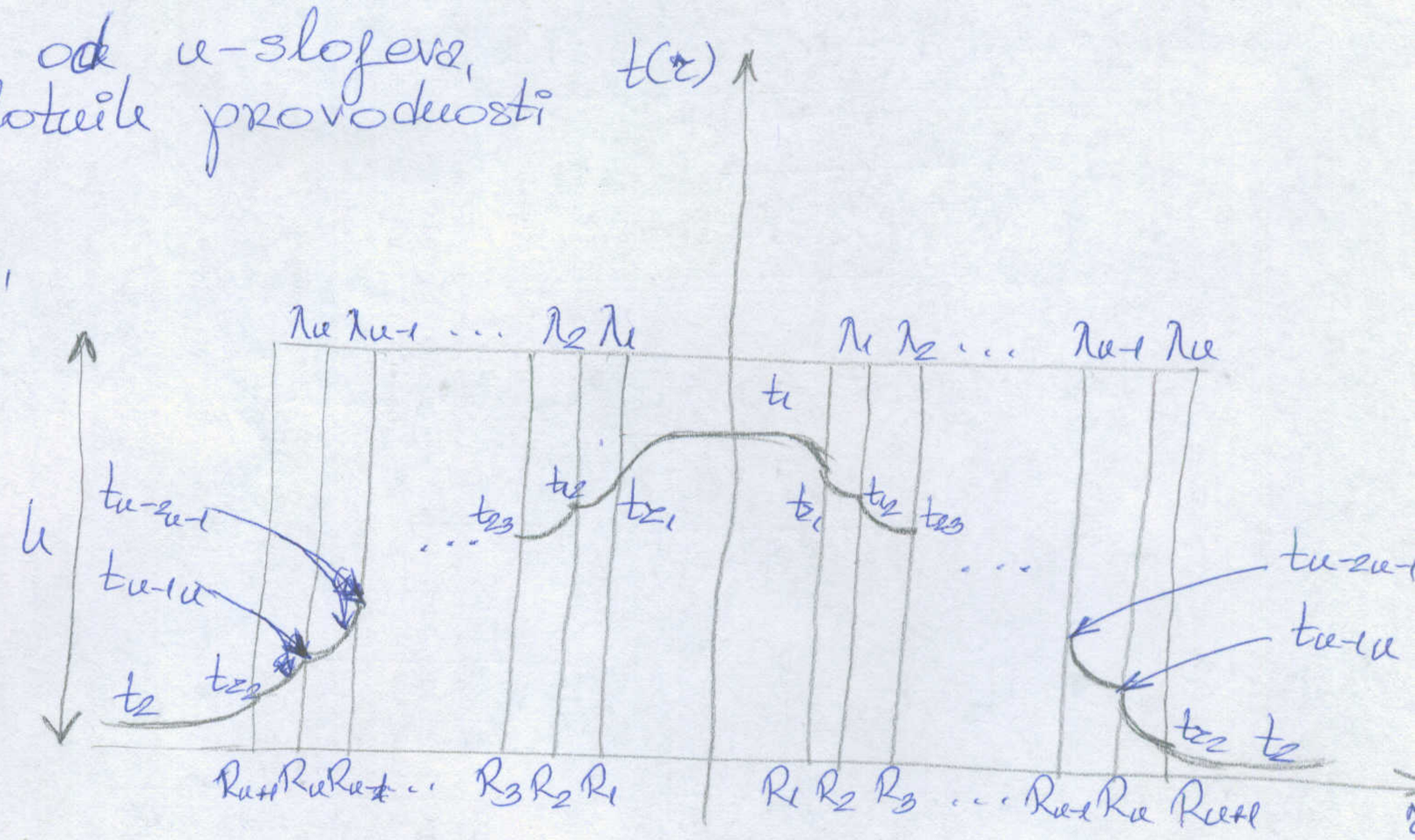
$$t_u(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{u-1}\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{x - \sum_{i=1}^{u-1} d_i}{\lambda_u}\right)$$





Prolaz toplote kroz višeslojni cilindričan zid

→ Analiziramo:
cilindričan zid od n-slojeva,
od materijala toplotnih provodnosti
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$,
poluprečnika $R_1, \dots, R_n$,
temperature vazduha
sa obe strane zida
su t_1 i t_2



→ Odredujemo:
fluks toplotnih
gubitaka kroz zid Φ,
podužnu gustinu
fluksa q
temperature na unutrašnjoj i
spoljašnjoj površini zida,
temperature na spojevima materijala $t_{z2}, t_{z3}, \dots$
toplotni otpor zida R_T i
temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(r), t_2(r), \dots, t_n(r)$

→ Analiziramo stacionarno stanje

Ⓐ $\Phi_{\alpha_1} = \alpha_1 S (t_1 - t_{z1})$ $\quad S = 2\pi R_1 l$

$\Phi_{\lambda_1} = \dfrac{t_{z1} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1 l} \ln \frac{R_2}{R_1}}$ - fluks provodnog kroz prvi sloj (lekcija „Provođenje toplote kroz homogeni cilindrični zid")

$\Phi_{\lambda_2} = \dfrac{t_{z2} - t_{z3}}{\frac{1}{2\pi\lambda_2 l} \ln \frac{R_3}{R_2}}$

$\vdots$

$\Phi_{\lambda_{n-1}} = \dfrac{t_{n-2n-1} - t_{n-1n}}{\frac{1}{2\pi\lambda_{n-1} l} \ln \frac{R_n}{R_{n-1}}}$

$\Phi_{\lambda_n} = \dfrac{t_{n-1n} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda_n l} \ln \frac{R_{n+1}}{R_n}}$

Ⓐ' $\Phi_{\alpha_2} = \alpha_2 S_2 (t_{z2} - t_2)$ $\quad S_2 = 2\pi R_{n+1} l$

$\Phi_{\alpha_1} = \Phi_{\lambda_1} = \Phi_{\lambda_2} = \dots = \Phi_{\lambda_n} = \Phi_{\alpha_2} \equiv \Phi$

$t_1 - t_{z1} = \dfrac{\Phi}{\alpha_1 2\pi R_1 l}$

$t_{z1} - t_{z2} = \dfrac{\Phi}{2\pi\lambda_1 l} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$

$t_{z2} - t_{z3} = \dfrac{\Phi}{2\pi\lambda_2 l} \ln \dfrac{R_3}{R_2}$

$\vdots$

$t_{n-2n-1} - t_{n-1n} = \dfrac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-1} l} \ln \dfrac{R_n}{R_{n-1}}$

$t_{n-1n} - t_{z2} = \dfrac{\Phi}{2\pi\lambda_n l} \ln \dfrac{R_{n+1}}{R_n}$

Ⓐ $t_{z2} - t_2 = \dfrac{\Phi}{\alpha_2 2\pi R_{n+1} l}$

$$t_1 - t_2 = \frac{\Phi}{2\pi l}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi l}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)}\ [W]$$ - fluks toplotnih gubitaka kroz zid

$$R_T = \frac{1}{2\pi l}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)\left[\frac{K}{W}\right]$$

$$q = \frac{\Phi}{l} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)}\left[\frac{W}{m}\right]$$ (služi za poređenje 2 zgrade)

$q >$ => lošija izolacija

iz (*) $\Rightarrow t_{z1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 2\pi R_1 l} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1}$

iz (*)' $\Rightarrow t_{z2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 2\pi R_{n+1} l} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}$

$t_{12} = t_{z1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1 l}\ln\frac{R_2}{R_1} =$

$= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)}\cdot\frac{1}{\alpha_1 R_1} - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}}\cdot\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{R_2}{R_1}$

$= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)$

$t_{23} = t_{12} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2 l}\ln\frac{R_3}{R_2} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{R_3}{R_2} =$

$= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)$

$\vdots$

$t_{n-2,n-1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)$

$t_{n-1,n} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)$

→ Temperature unutar slojeva

$t_1(r) = t_{z1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1 l}\ln\frac{r}{R_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{r}{R_1}\right)$

provera: $r = R_1$

$r = R_2$

$t_2(r) = t_{12} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2 l}\ln\frac{r}{R_2} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{r}{R_2}\right)$

$\vdots$

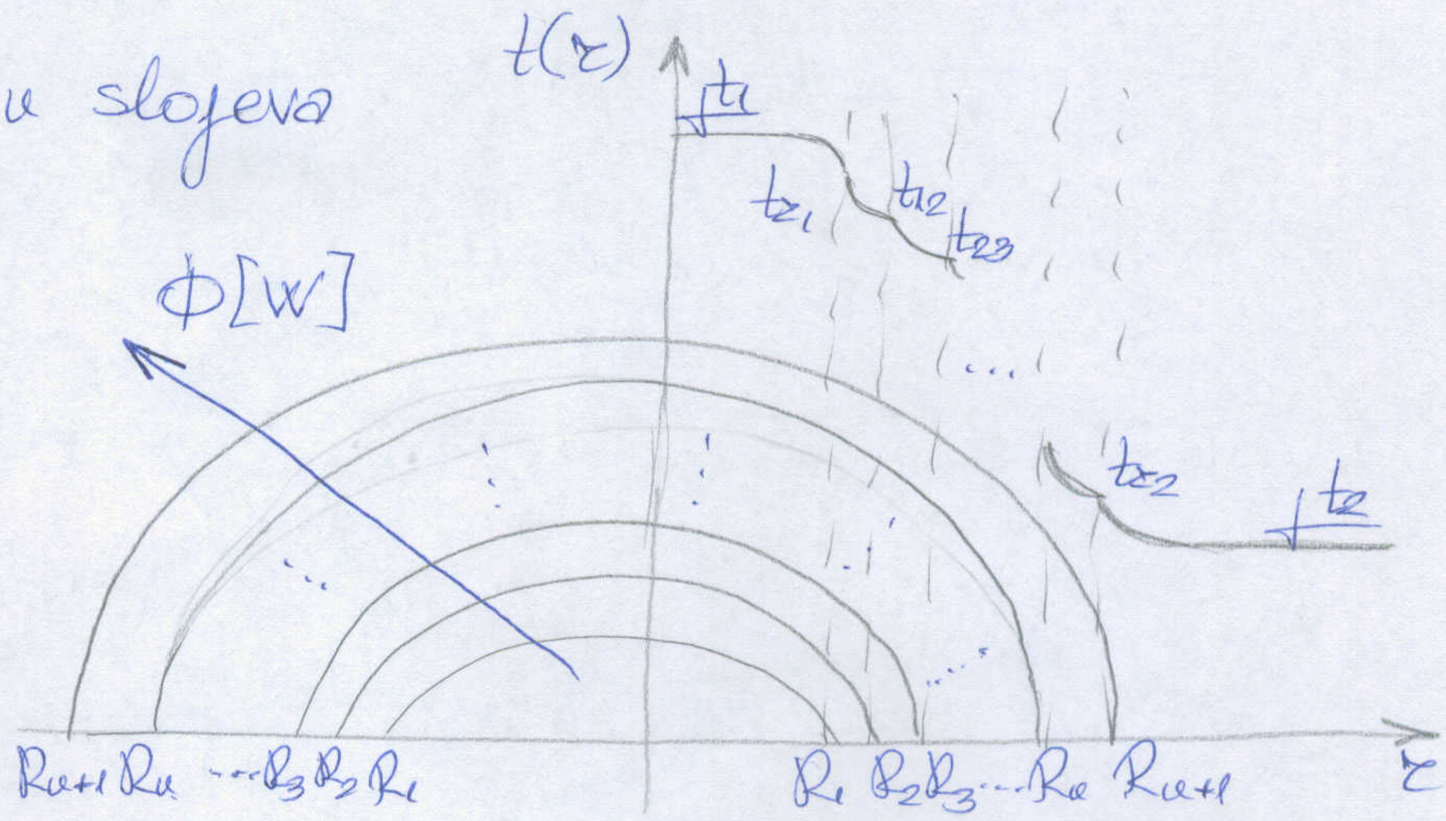
$t_k(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{r}{R_k}\right)$

$\vdots$

$t_n(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-''-}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{r}{R_n}\right)$

Prolaz toplote kroz višeslojni sferni zid

→ Analiziramo:
polusferni zid od u slojeva poluprečnika $R_1, \dots, R_u$, toplotnih provodnosti $\lambda_1, \dots, \lambda_u$, temperatura vazduha sa unutrašnje i spoljašnje strane zida su t_1 i t_2, a odgovarajući koeficijenti prelaza toplote α_1 i α_2



→ Određujemo:
toplotni fluks Φ u stacionarnim uslovima,
temperature površina zida t_{z_1} i t_{z_2},
temperature na spojevima slojeva $t_{u_2}, t_{z_3}, \dots, t_{u-1u}$ i
temperaturska polja unutar svakog sloja $t_1(r), t_2(r), \dots, t_u(r)$

$$\Phi_1 = \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z_1}) \qquad S_1 = 2\pi R_1^2 \left(= \tfrac{1}{2} R_1^2 \pi^0\right) \text{ - poloviva sfere}$$

$$\Phi_{\lambda_1} = \frac{t_{z_1} - t_{u_2}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_2} = \frac{t_{u_2} - t_{z_3}}{\frac{1}{2\pi\lambda_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)}$$

$$\vdots$$

$$\Phi_{\lambda_{u-2}} = \frac{t_{u-3u-2} - t_{u-2u-1}}{\frac{1}{2\pi\lambda_{u-2}}\left(\frac{1}{R_{u-2}} - \frac{1}{R_{u-1}}\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_{u-1}} = \frac{t_{u-2u-1} - t_{u-1u}}{\frac{1}{2\pi\lambda_{u-1}}\left(\frac{1}{R_{u-1}} - \frac{1}{R_u}\right)}$$

$$\Phi_{\lambda_u} = \frac{t_{u-1u} - t_{z_2}}{\frac{1}{2\pi\lambda_u}\left(\frac{1}{R_u} - \frac{1}{R_{u+1}}\right)}$$

$\Phi_{\alpha_2} = \alpha_2 S_2 (t_{z_2} - t_2)$ - fluks prelaza sa zida na vazduh

$$S_2 = 2\pi R_{u+1}^2$$

U stacionarnim uslovima

$$\Phi_{\alpha_1} = \Phi_{\lambda_1} = \Phi_{\lambda_2} = \dots = \Phi_{\alpha_2} \equiv \Phi$$

$$t_1 - t_{z_1} = \frac{\Phi}{\alpha_1 2\pi R_1^2}$$

$$t_{z_1} - t_{u_2} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$t_{u_2} - t_{z_3} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\vdots$$

$$t_{u-3u-2} - t_{u-2u-1} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{u-2}}\left(\frac{1}{R_{u-2}} - \frac{1}{R_{u-1}}\right)$$

$$t_{u-1u} - t_{z_2} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda_u}\left(\frac{1}{R_u} - \frac{1}{R_{u+1}}\right)$$

$$\oplus \quad t_{z_2} - t_2 = \frac{\Phi}{2\pi\alpha_2 R_{u+1}^2}$$

$$\Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\Phi}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}\right)$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}\right)} [W] \Leftrightarrow \text{potrebna snaga grejtela}$$

$$R_T = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}\right) \left[\frac{K}{W}\right] - \text{služi da se uspostavi gubici}$$

$$t_{z_1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 2\pi R_1^2} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha_1 R_1^2}$$

$$t_{z_2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 2\pi R_{n+1}^2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}$$

$$t_{12} = t_{z_1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= t_1 - \frac{\Phi}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right) =$$

$$= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2}}\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right)$$

$$t_{23} = t_{12} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{-\!\!\!

Raznena toplote zračenjem

→ Sva tela na temperaturi $T > 0K$ zrače ili apsorbuju elektromagnetnu energiju, to jest **elektromagnetne talase**

→ Ako je talasna dužina tih talasa $\lambda \in (0{,}1 \div 1000)\,\mu m$, onda kažemo da su to toplotni zraci, koji pripadaju oblasti **IC** - infracrvenog (infra red IR) zračenja

→ Energija zračenja se javlja u vidu porcija, to jest **kvanata**, koji se nazivaju **fotoni**

→ Kada se naelektrisana čestica kreće usporeno, ona ① **zrači** fotone, a kada ide ubrzano, ② **apsorbuje** fotone

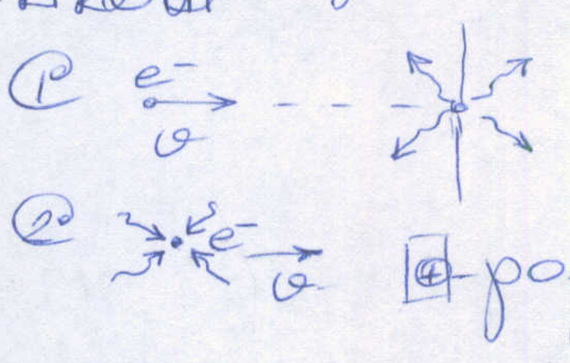
⇒ U prvom slučaju gubitak kinetičke energije je jednak energiji izračenih fotona, a u drugom slučaju je porast jednak energiji apsorbovanih fotona

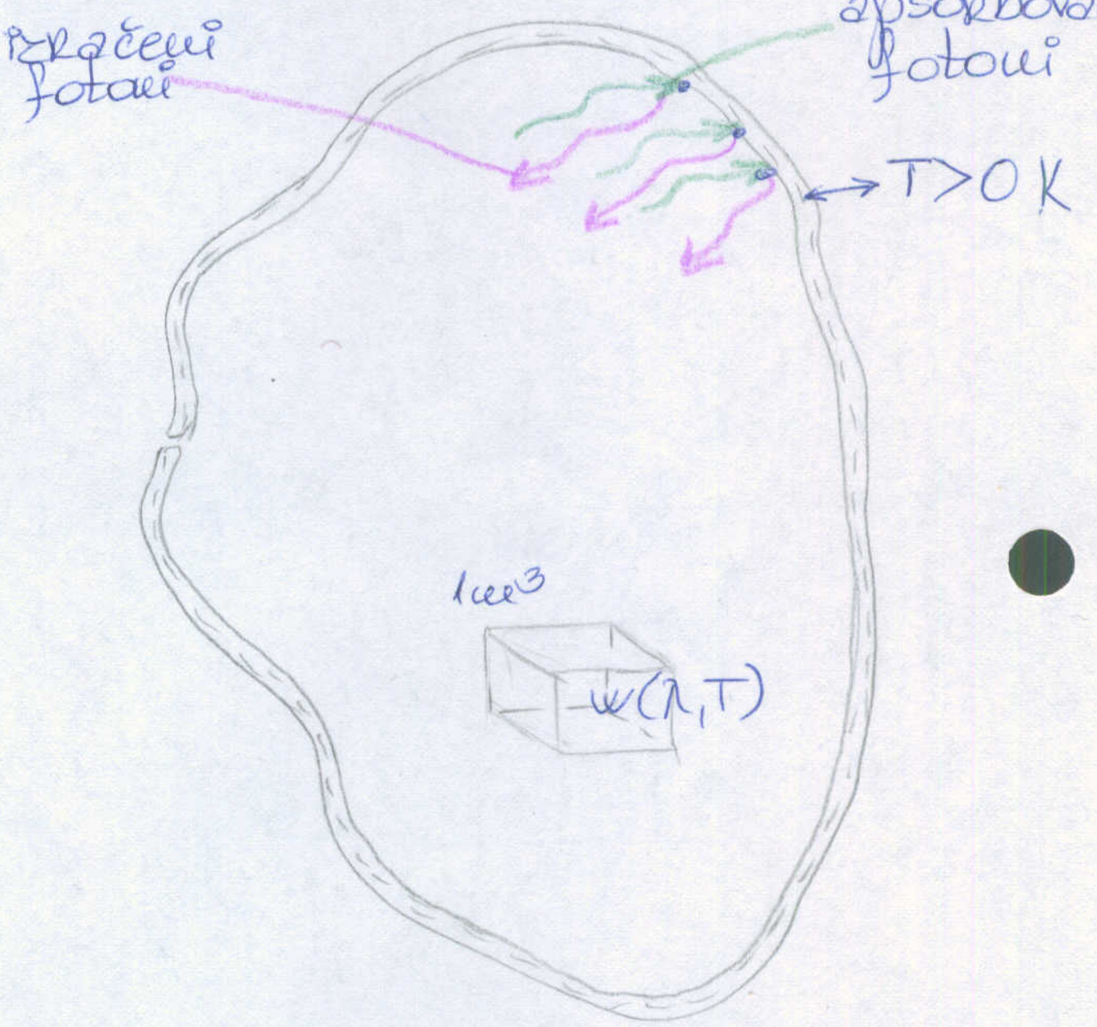
→ Ova pojava da čestica razmenjuje energiju putem kvanata je univerzalna za sve čestice u prirodi

→ Posmatrajmo

jedno šuplje telo sa neprozirnim zidovima koje ima vrlo uzak otvor prema spoljašnjosti (kao na slici)

zidovi šupljine emituju i apsorbuju fotone i u prostoru između zidova (vazduh/vakuum) se nalazi const. broj fotona





→ Max Planck (~1901. godine/20. vek) je izveo formulu koja **izražava** energiju fotona sadržanih u $1\,m^3$ šupljine koja potiče od fotona čija je talasna dužina u vrlo uskom opsegu oko talasne dužine $\lambda \Leftrightarrow \lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$

① ne ulazi u zapamti

$$\psi(\lambda, T) = \frac{8\pi^2 hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \left[\frac{J}{m^3 \cdot m}\right]$$

fotoni samo jedne talasne dužine (neko λ)

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,Js$ - Planck-ova const.

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ - brzina svetlosti

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ - Boltzmann-ova const.

$T\,[K]$ - temperatura

$\frac{g}{w^3}$ - gustina energije

$\frac{g}{w^3 \cdot w}$ - gustina po jedinici talasne dužine

⇒ Zaključak (iz $W(\lambda, T)$)

Zapreminska gustina energije zavisi i od temperature zidova šupljina, T

→ Veličina $W(\lambda, T)$ nosi naziv „spektralna zapreminska gustina energije zračenja"

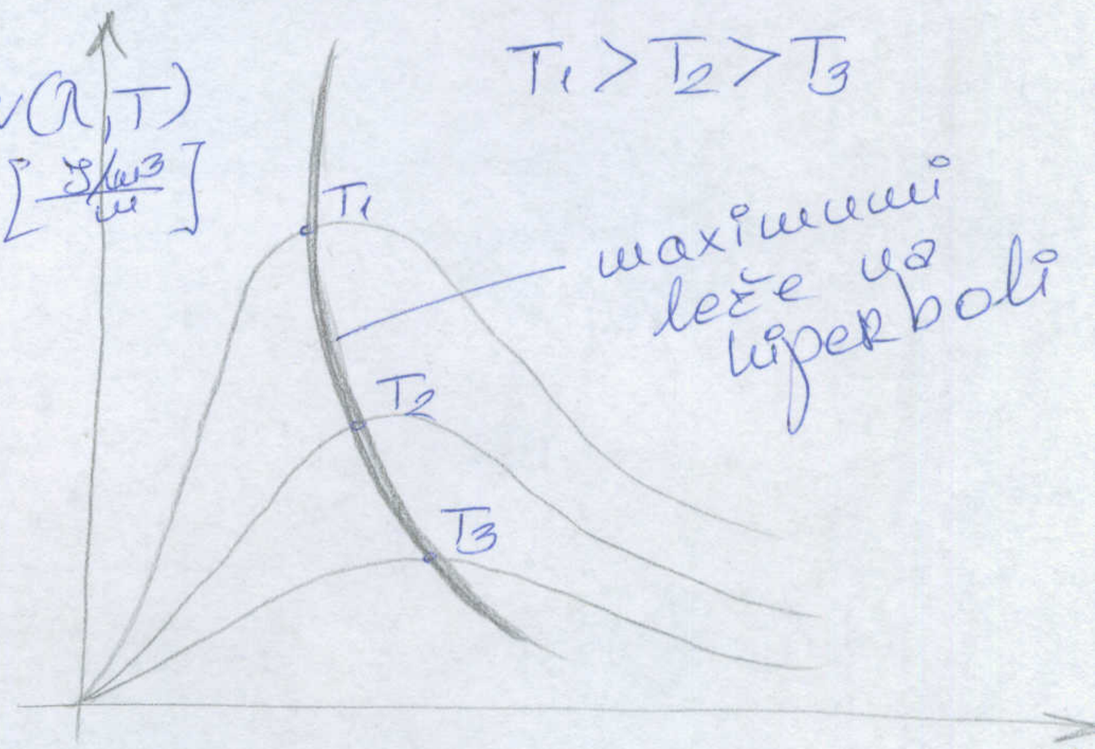
→ Unutrašnjost ⊕ zidovi oko tog tela ⊖ apsolutno crno telo

→ Kada foton ude kroz šupljinu šanse da se reflektuje (izađe nazad) kroz istu tu šupljinu su (skoro) nikakve

⇒ fotoni se „raspršе"

● → Sa porastom temperature, maximumi Plauck-ovih krivih se pomera ka manjim talasnim dužinama, što znači da zagrejana tela emituju više fotona većih energija nego oni manje zagrejani

$(E_f = \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \searrow \Rightarrow E_f \nearrow)$



→ (Sunce $T = 5800K \Rightarrow \lambda = 550nm$

⇒ Sunce zrači najviše zelenih zraka, opseg za ljude je $\lambda \in (350, 750)$)

● → Pomeranje ~~maksimuma~~ krivih ulevo se naziva Vin-ov zakon pomeranja

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

$b = 0,289 [K \cdot m]$ - Vin-ova const.

Emisiona moć čvrstih tela

→ Veličina $w(\lambda,T)$ u Plauck-ovom zakonu daje energiju u $1m^3$ vakuuma šupljine crnog tela

→ Medutim, za praksu je od mnogo većeg značaja veličina koja daje koliko $\frac{J}{s}$ telo emituje toplotne energije po jedinici površine

⇔ ta veličina se naziva <u>emisiona moć</u> tela, i obeležava je sa $M\left[\frac{W}{m^2}\right]$

→ Napre definišemo <u>spektralnu emisionu moć $M(\lambda,T)\left[\frac{W}{m^2\cdot m}\right]$</u> koja je povezana sa $w(\lambda,T)$ na sledeći način:

$$\boxed{M(\lambda,T)=\frac{c}{4}w(\lambda,T)}$$

c - brzina svetlosti u vakuumu

* ne moraš napamet

$$\Rightarrow \boxed{M(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\left[\frac{W}{m^2\cdot m}\right]}$$

→ Kada sabereno doprinos fotona svih talasnih dužina, dobija se emisiona moć

$$\boxed{M(T)=\int_0^{+\infty}M(\lambda,T)d\lambda=\sigma T^4}$$

σ - Stefan-Boltzmann-ova const.

$$\sigma=5,67\cdot10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}$$

⇒ Dakle, ako telo udvostruči temperaturu, emisiona moć mu poraste $2^4=16$ puta

→ Za gradevinsku struku značenje nije primarni fenomen transporta toplote, sem u slučaju požara - kada se obavezno javi u razmatranje

(najtoplija je plava boja)

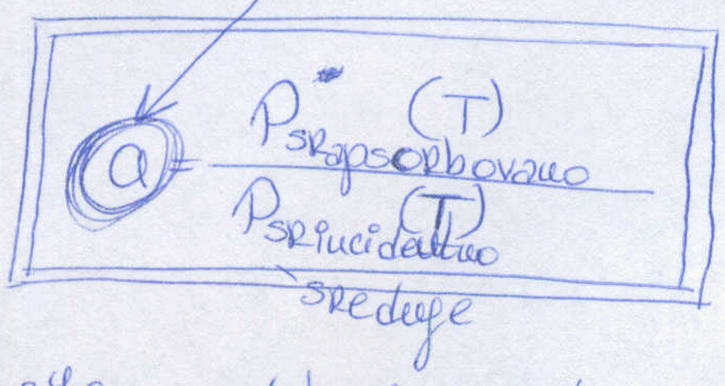
Kirhof-ov zakon zračenja

→ Ovaj zakon povezuje apsorpciona i emisiona svojstva tela koja ne zrače po zakonu idealno crnih tela

→ Ovakva tela nazivamo „sivim" telima (⇒ sve boje spektra se tretiraju kao da su sive)

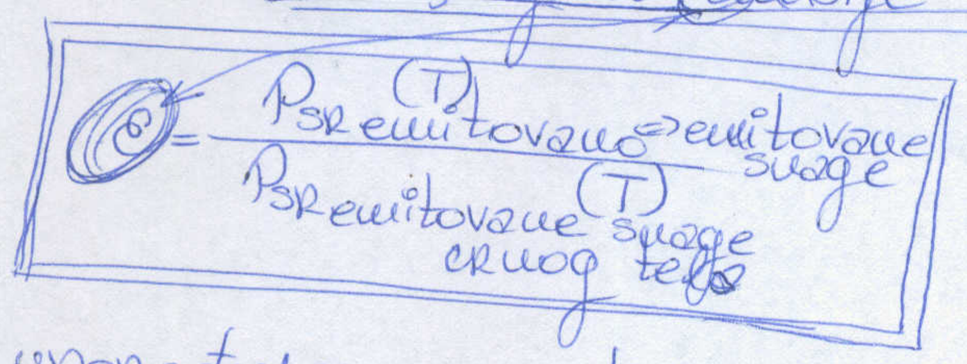
→ Definišemo:

koeficijent apsorpcije elektromagnetnog zračenja kao količnik apsorbovane i ~~inci~~ incidentne snage zračenja



⇒ Fizički, predstavlja ~~udeo~~ udeo toplotne energije koji je apsorbovan od strane tela

→ Dalje, definišemo koeficijent emisije toplotnog talasa, kao količnik:

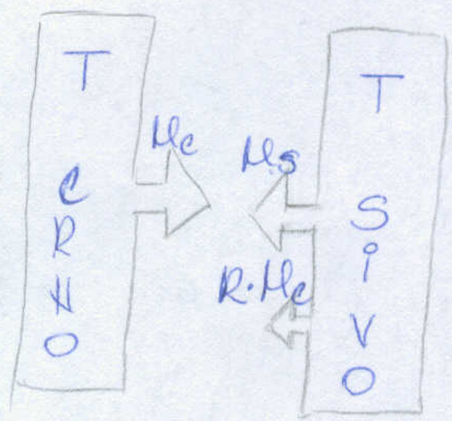


⇒ Dakle, upoređujemo emitovanu snagu sivog tela i crnog tela na istoj temperaturi

⇔ Emitovana snaga $P_{SR\,emitovano}$ je funkcija temperature T

→ Dokazaćemo da su koeficijenti emisije i apsorpcije svih tela jednaki

→ Na slici su data 2 tela - crno i sivo, na istim temperaturama T, koja razmenjuju toplotu zračenjem, pri čemu su površine paralelne i jednake



Mc - emisiona moć crnog tela

Ms - emisiona moć sivog tela

$R = 1 - a$ - koeficijent refleksije sivog tela

$$M_{s/c} = \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

→ Pošto su tela na slici na istoj temperaturi, neto razmenjena energija je jednaka nuli, to jest, koliko crno telo apsorbuje, isto toliko i emituje

⇒ isto važi i za sivo telo

$\Rightarrow M_c = \rho M_c + M_s$

$\sigma T^4 = (1-a)\sigma T^4 + \varepsilon \cdot M_c = (1-a)\sigma T^4 + \varepsilon \sigma T^4$

$1 = 1 - a + \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{a = \varepsilon}$ - za sivo telo

za crno telo: $a_c = 1$, $\varepsilon_c = 1$

za sivo telo: $0 < a_s < 1$, $0 < \varepsilon_s < 1$

$\Rightarrow$ Dakle, siva tela, koja su dobri apsorberi toplote su i dobri emiteri, i obrnuto, kada su tela loši apsorberi, onda su i loši emiteri toplote.

a i ε su funkcije od $\lambda \Leftrightarrow a(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$

$\rightarrow$ Strogo gledano, koeficijenti emisije i absorpcije su funkcije boje tela, to jest, talasne dužine λ, ali, za praktične primene, u tablicama se daju srednje vrednosti ovih koeficijenata, u opsegu talasnih dužina u kojima telo emisije toplotnih talasa odigrava (IR oblast zračenja)

IR $\in (0{,}1 - 1000)\,\mu m$ - mikrona

$$a = \frac{1}{1000 - 0{,}1} \int_{0{,}1\,\mu m}^{1000\,\mu m} a(\lambda)\, d\lambda$$

$\Rightarrow$ Dakle, zakon emisije toplotnih zraka sivih tela se može iskazati preko zračenja crnog tela

$M_s = \varepsilon \cdot M_c = \varepsilon \sigma T^4$

$\Rightarrow \boxed{M_s = \varepsilon \sigma T^4}$

($\Leftrightarrow$ svako telo ima svoje ε i sva tela su siva)

$\Leftrightarrow \varepsilon$ ne zavisi od boje tela, već od vrste materijala i glatkoće površine

$\rightarrow$ Savršeno glatka tela imaju veći koeficijent emisije i refleksije

Razmena toplote zračenjem između ravnih površina različitih temperatura

→ Videli smo da siva tela emituju 2 komponente sa svoje površine:

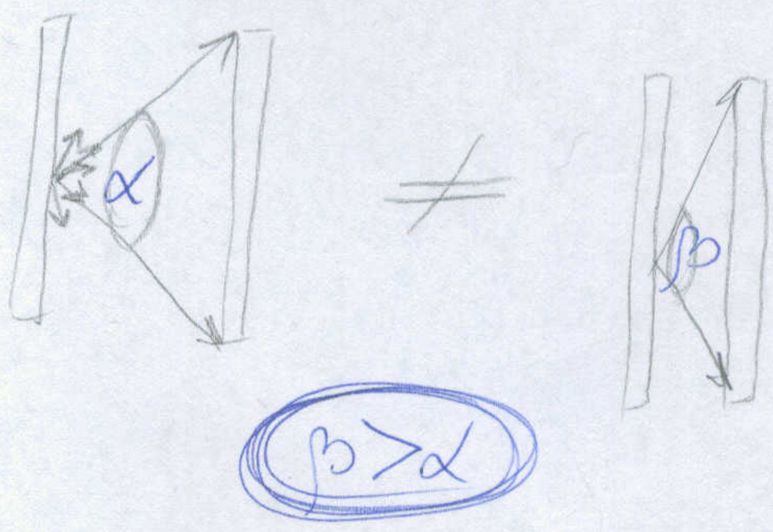
① Sopstveno zračenje $\varepsilon\sigma T^4$;

② Reflektovanu komponentu zračenja drugih tela koja se reflektuje od površine tela

→ Međutim, u zavisnosti od geometrije površina, kao i rastojanja između tela, razmenjena toplota zračenjem nije ista

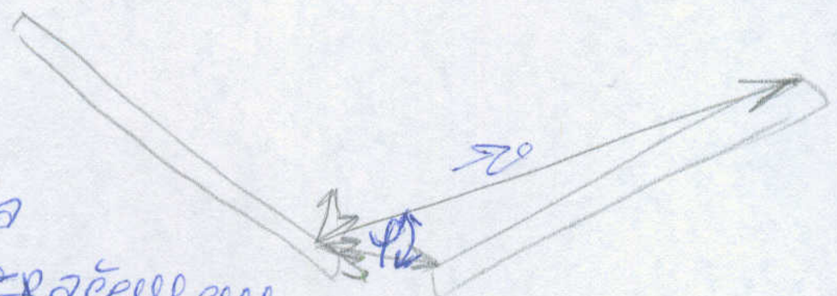
⇔ na primer,

bliska tela obično više razmenjuju toplote zračenjem nego kada su udaljena



● → Takođe, relativan položaj površina određuje razmenjenu energiju

→ Na slici su



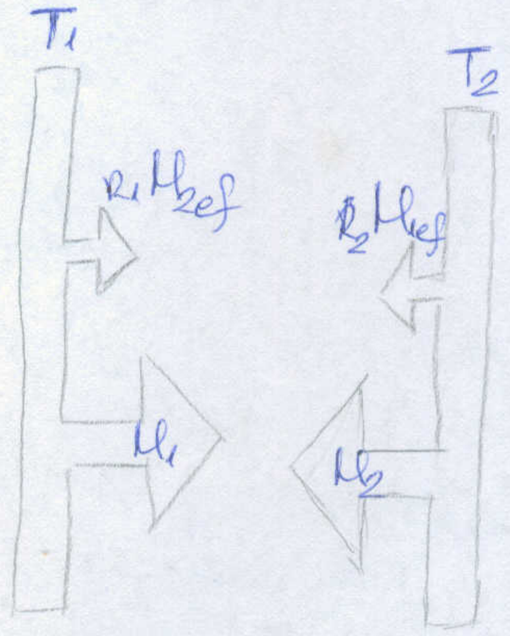
data 2 siva tela koja razmenjuju toplotu zračenjem

$H_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4$

$H_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$

● $H_{1ef} = H_1 + R_1 H_{2ef}$

$H_{2ef} = H_2 + R_2 H_{1ef}$



H_{1ef} - ukupno zračenje koje polazi sa prvog tela (efektivno)

(⇔ sopstvena emisija i refleksija)

H_{2ef} - ukupno zračenje koje polazi sa drugog tela

(⇔ sopstvena emisija i refleksija)

→ Pošto su tela na različitim temperaturama ⇒ neto razmenjena energija nije =0

→ Ako usvojimo da je $T_1 > T_2$ ⇒ prvo telo se hladi a drugo zagreva, bez obzira na koeficijente emisije oba tela

→ Energija koja se razmeni je $= M_{1ef} - M_{2ef}$

→ Svaka tačka oba tela zrači kao savršeni difuzni izvor, to jest, fotoni kreću ~~ka telu~~ sa tela sa jednakom verovatnoćom u svim pravcima

→ Posto svi fotoni sa prvog tela ~~[illegible]~~ ne padaju na drugo telo, vec izmedu efektivnih emisija je:

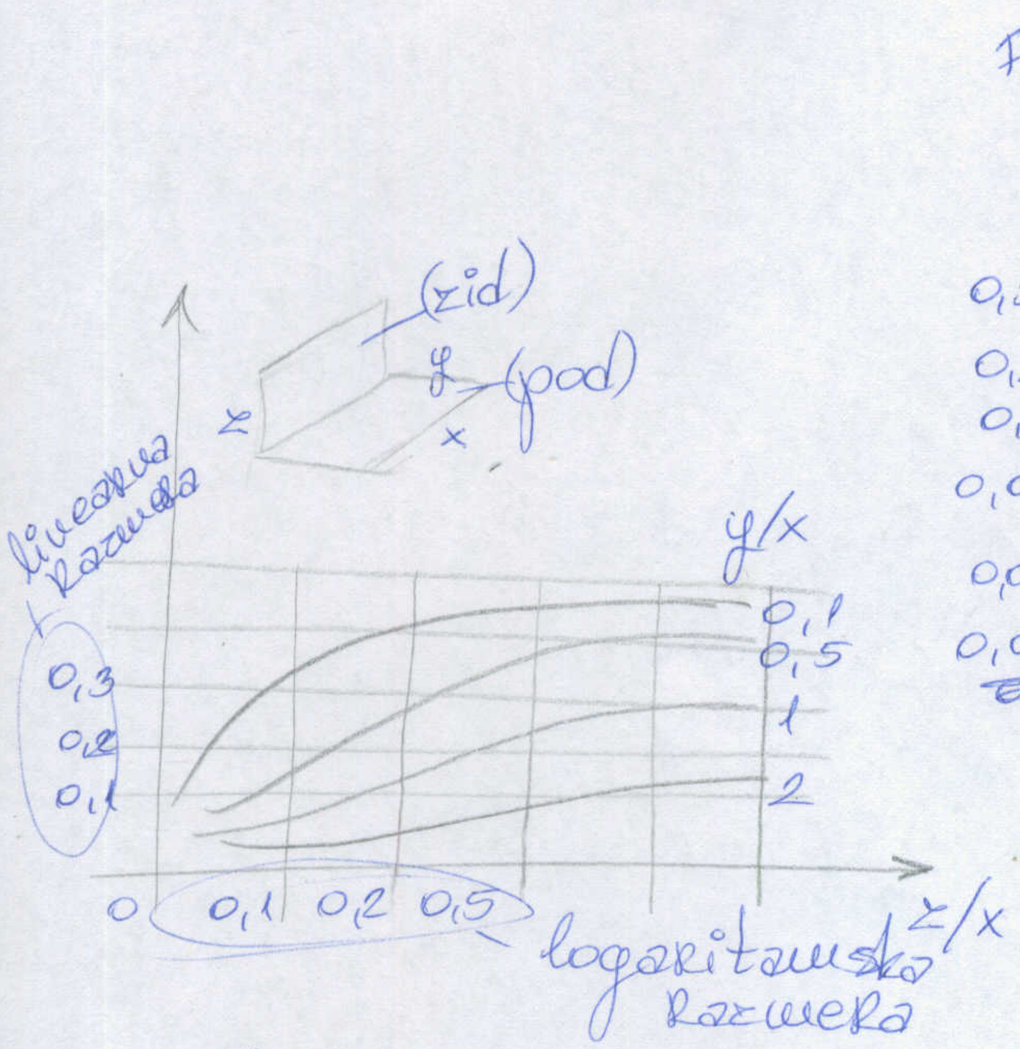
$$M_{2ef} = F_{21} M_{1ef}$$
$$M_{1ef} = F_{12} M_{2ef}$$

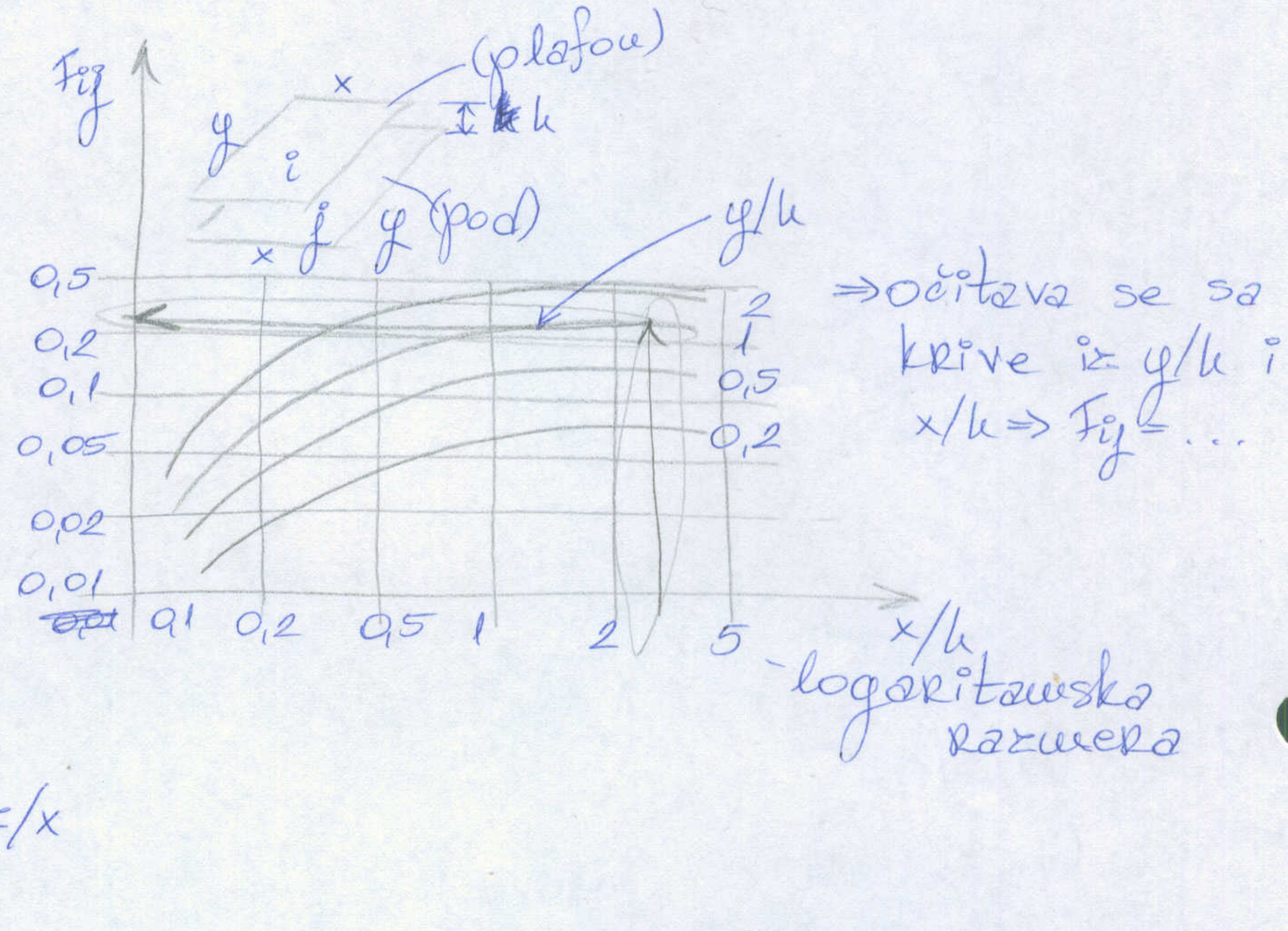
, gde su

→ ovi faktori zavise samo od medusobne geometrije površine i medusobnog položaja

F_{12}, F_{21} - faktori razmene zračenja

→ Ovi faktori se mogu dobiti analitički za slučaj tela pravilnog oblika, a u praksi se daju empirijski, to jest, preko karakterističnih krivih





⇒ očitava se sa krive iz y/k i x/k ⇒ $F_{ij} = \dots$

→ 2 ravne površine površi S_1 i S_2, temperatura T_1 i T_2 razmenjuju toplotu zračenja, čiji je fluks dat izrazom

$$\Phi = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

razliku temperatura prikazujemo kao $\Delta T = T_1 - T_2$

$T_1^4 - T_2^4 = f(\Delta T)$

~~$T_1^4 = T_2^4 + 4T_2^3 \Delta T + 6T_2^2 \Delta T^2 + 4T_2 \Delta T^3 + \Delta T^4$~~

~~ako zanemarimo sve stepene T^4 u odnosu na više, i uvažimo da je $\Delta T \ll T_1, T_2$, možemo napisati:~~

~~$T_1^4 - T_2^4 \approx 4T_2^3 \Delta T$, $T_1 \approx T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 + T_2}{2}$~~

~~$\Rightarrow T_1^4 - T_2^4 \approx 4T_{sr}^3 (T_1 - T_2)$~~

$T_1 = T_2 + \Delta T \,/^4$

$T_1^4 = T_2^4 + 4T_2^3\Delta T + 6T_2^2\Delta T^2 + 4T_2\Delta T^3 + \Delta T^4$ (→0, →0, →0)

ako zanemarimo sve stepene ΔT-a ($\Delta T^2, \Delta T^3, \Delta T^4$) u odnosu na više i uvažimo da je $\Delta T \ll T_1 \text{ i } T_2$, možemo napisati

$$T_1^4 \approx T_2^4 + 4T_2^3\Delta T$$

$$T_1 \approx T_2 \quad \wedge \quad T_{sr} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\Rightarrow T_1 + T_2 = 2T_2$$

$$T_2 = \frac{T_1 + T_2}{2} = T_{sr}$$

$$\Rightarrow T_1^4 - T_2^4 \cong 4T_2^3\underbrace{(T_1 - T_2)}_{\Delta T} = \underbrace{4T_{sr}^3}_{=\text{const.}}\Delta T$$

$$\boxed{T_1^4 - T_2^4 \cong \text{const.} \cdot \Delta T}$$

- jer je $M = \varepsilon_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4)\left[\frac{W}{m^2}\right]$ - energija koju 2 iste površine razmene ako su im temperature T_1 i T_2

→ Gustina toplotnog fluksa za slučaj ravnih paralelnih površina iste površine

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}} = \underbrace{\frac{4\sigma T_{sr}^3}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}}_{=\alpha_s}\Delta T = \alpha_s(T_1 - T_2)$$

$F_{12} = F_{21} \approx 1$

$\varepsilon_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ - efektivna emisiona moć

- $$\Phi = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} \quad [W]$$

za $F_{12} \approx 1$

$S_1 = S_2$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{S\sigma 4T_{sr}^3\Delta T}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} + 1} = \alpha_s S(T_1 - T_2)\ [W]$$ - razmenjena toplota samo zračenjem

(konvekcijom → $\Phi = \alpha S(T_1 - T_2)$)

→ Fluks gubitaka ⇔ ukupan fluks koji telo razmeni sa okolinom konvekcijom C (convection) i radijacijom R (zračenjem, radiation)

$$\boxed{\Phi = \Phi_c + \Phi_R = \underbrace{(\alpha_c + \alpha_s)}_{\alpha} S(T_1 - T_2)}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - koeficijenti emisije ~~prvog~~ prve i druge površine

→ Vidimo da su formule za gubitak toplote zračenjem i konvekcijom u matematičkom smislu, iste; razlikuje se samo koeficijent α

⇔ kod konvekcije ima vrednost α_k, a kod zračenja α_s

$(\alpha = 25 \frac{W}{m^2 K} = \alpha_k + \alpha_s \approx 17 + 8$ - vrednosti iz tablice, za Srbiju)

⇒ veći su gubici toplote usled konvekcije nego usled zračenja

(temperatura svemira 2,7K
temperatura oblaka 273K)

Vlaga u građevinskim konstrukcijama

Vlaga

→ Građevinske konstrukcije su uvek u kontaktu sa vlagom iz tla i vazduha

→ Ogromna većina ~~građevi~~ građevinskih materijala su porozna što olakšava vezivanje i zadržavanje vode

→ Promene vlažnosti materijala su posledica 2 najvažnija faktora:

① Promene relativne vlažnosti vazduha

② Promene načina upotrebe objekta/zgrade

(⇐ leti više „provetravamo" prostorije i time smanjujemo sadržaj vlage ⇒ zimi se zadržava više vlage)

→ Čovek doprinosi vlaženju zgrade svojim normalnim aktivnostima

① Čovek u mirovanju oslobodi - 30-60 $\frac{g}{h}$ vlage

② Čovek u umerenom radu ~~=~~ više od 300 $\frac{g}{h}$

③ Kuvanjem - 100 $\frac{g}{h}$

④ Sušenjem veša - više od 500 $\frac{g}{h}$

⑤ Kupatilo radnje oko lavaboa/veš-mašina - 70 $\frac{g}{h}$

~~Kod~~ tuširanje - 2600 $\frac{g}{h}$

⑥ Sobna biljka 15 $\frac{g}{h}$

⑦ Mirna voda (bazen) - 40 $\frac{g}{h}$ (po $1m^2$)

→ Neposredan prelaz ~~=~~ vlage na konstrukciju se sprečava odgovarajućom hidroizolacijom na kontaktu sa tlom i odvođenjem vode usled padavina

→ Međutim, prelaz vlage/vode u vidu vodene pare na konstrukcije je moguće sprečiti, pa se taj problem rešava upotrebom pravilno dizajnirane toplotne izolacije (dobra toplotna izolacija sprečava kondenzovanje vodene pare)

→ Vlaga u konstrukciji ima višestruko negativno dejstvo:

① Porastom sadržaja vlage u materijalu raste toplotna provodnost λ (materijal postaje bolji toplotni provodnik)

$\lambda_{H_2O} = 0,15 \frac{W}{mK}$ $\lambda_{vazduha\ (pene)?} = 0,025 \frac{W}{mK}$

② Dodatno povećava toplotne gubitke usled isparavanja vode u materijalu

③ Daje mogućnost razvoja mikroorganizama

④ Dovodi do mehaničkih oštećenja (bubrenja) materijala (⇐ drvo)

⑤ Smrzavanje dovodi do mehaničke degradacije materijala (voda se širi pri mržnjenju)

⑥ Utiče na vlažnost vazduha prostorije

⑦ Povećava troškove održavanja zgrade

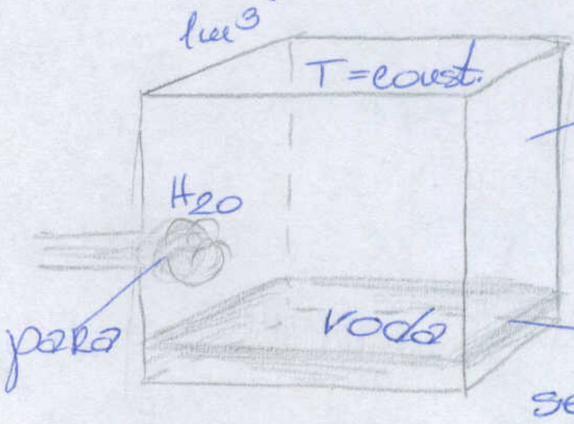
Hidroskopska svojstva vazduha

⇔ hidrofilija i hidrofobija

→ Suv vazduh je mešavina N_2 78%
O_2 21%
Ar 1% i
ostalih gasnih komponenti

→ Ali, u vazduhu blizu površine zemlje i mora, uvek imamo vodu u vidu pare ili kapljica (magla, kiša, sneg, led, ...)
(izuzev površine zemlje, npr. $H = 15$ km je bez vlage)

→ U $1m^3$ suvog vazduha se može naći ograničena količina vodene pare



(višak) deo pare se kondenzuje (⇔ dolazi do pojave vode)

→ Kada je u suvom vazduhu maksimalna količina vodene pare, kažemo da je zasićen, a relativna vlažnost mu je 100%

⇒ T > ⇒ može da primi više pare
T < ⇒ manje pare

→ Maksimalna količina vodene pare zavisi od temperature suvog (vlažnog) vazduha
⇔ ⇒ viša temperatura znači veći sadržaj vodene pare

→ Ta zavisnost je <u>eksponencijalna</u>
⇒ to znači da leti imamo više vlage u vazduhu nego zimi

→ Ako pokušamo da u suv vazduh ubacimo više vodene pare od maksimalne moguće, dolazi do kondenzovanja viška u vidu <u>rose</u> (u atmosferi - u vidu kiše, kapi), tako da u vazduhu ostaje maksimalna količina nekondenzovane vodene pare

→ Postoji empirijska formula koja povezuje pritisak zasićene vodene pare i <u>temperature</u>:

$$p_z(t°C) = \begin{cases} 610{,}6 \cdot 10^{\frac{9{,}5t}{t+265{,}5}}, & -20°C \leq t \leq 0°C \\ 610{,}6 \cdot 10^{\frac{7{,}5t}{t+237{,}5}}, & 0 < t \leq +40°C \end{cases}$$

– ne mora naučiti napamet

p_z – <u>parcijalni pritisak</u> zasićene vodene pare (⇔ deo u ukupnom pritisku)

$p = 101\,325$ Pa $\quad H_2$ (78%) p_{H_2}
O_2 (21%) p_{O_2} ...

$p_z \in (100\text{Pa} - 12000\text{Pa})$

→ U sledećoj tabeli su date brojne vrednosti maksimalne količine vodene pare u $1 m^3$ zasićenog vazduha za različitu temperaturu

t [°C]	0	5	10	15	20
vodena para $[\frac{g}{m^3}]$	4,8	6,8	9,4	12,8	17,3

Količina vodene pare u vazduhu se može izraziti na više načina:

① preko sadržaja vlage

$$a_v = 0,622 \frac{p_{H_2O}}{p - p_{H_2O}} \left[\frac{g}{kg}\right]$$

p_{H_2O} - parcijalni pritisak vodene pare
p - atmosferski pritisak (sa vremenske prognoze)
g - grami vodene pare
kg - kilogrami suvog vazduha

② Apsolutna vlažnost

$$\varphi_v = \frac{p_{H_2O}}{462(t+273)} = \frac{\varphi p_z}{462(t+273)} \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

φ - relativna vlažnost
p_z - zasićena vodena para
kg - vodene pare
m^3 - vazduha

③ Relativna vlažnost

$$\varphi = \frac{p_{H_2O}}{p_z} \cdot 100 [\%]$$

Higroskopska svojstva građevinskih materijala

→ Vlaženje materijala ne možemo da opišemo fizičkim zakonima u vidu formula, već se daju takozvane sorpcione krive dobijene eksperimentalnim putem

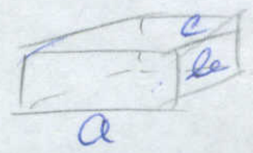
→ Krive povezuju sadržaj vlage u materijalu sa relativnom vlažnošću vazduha kojem je materijal izložen bar 100 sati [h]

→ Nazivaju se sorpcione jer opisuju proces vezivanja molekula za površinu materijala koji se naziva adsorpcija

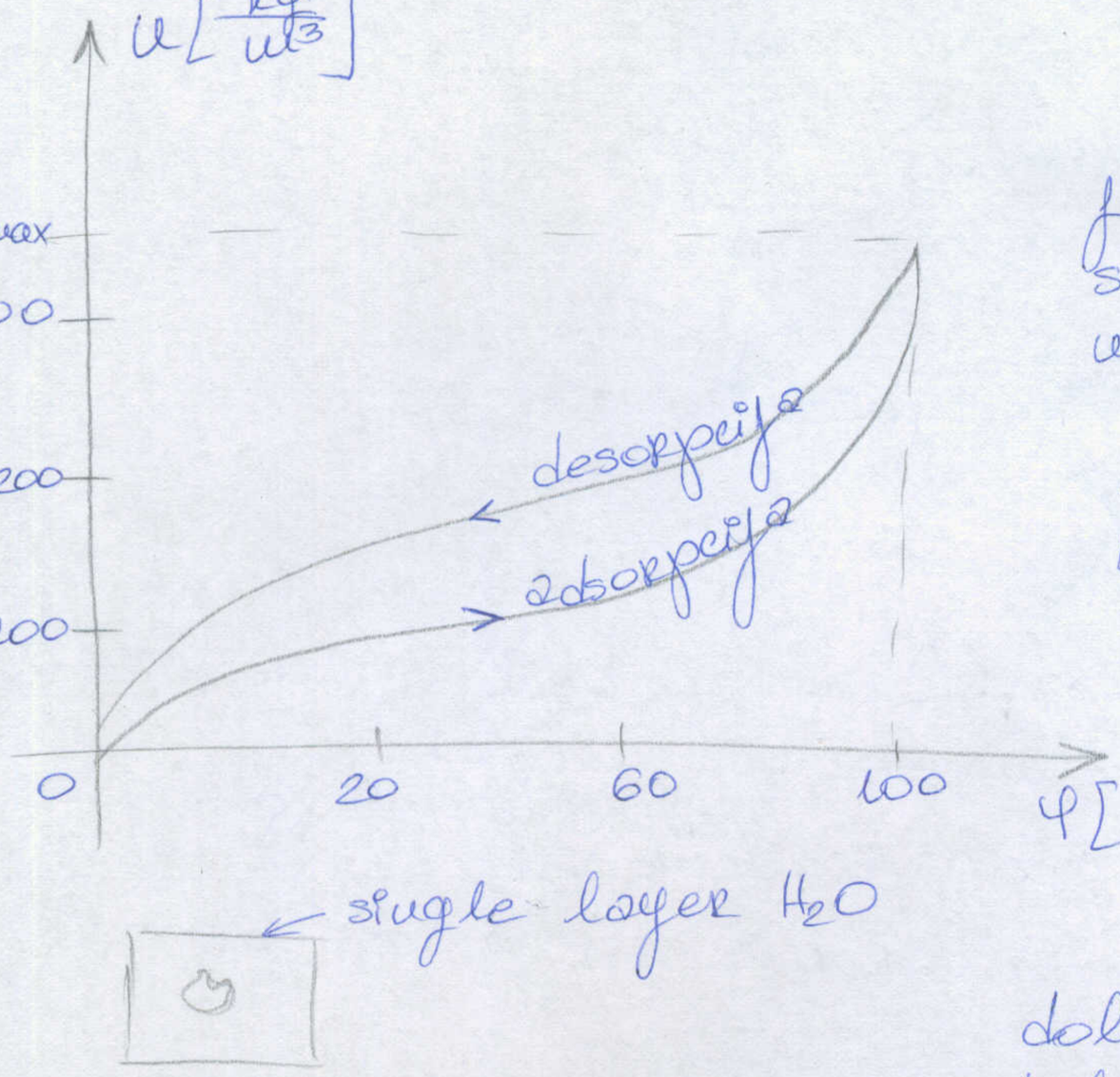
→ Vezivanje je posledica VanderValsovih (van der waals) sila koje su uvek privlačne bez obzira na vrstu atoma ili molekula

→ Posebno porozni materijali imaju izraženu adsorpciju jer se ovaj proces odvija na zidovima pora

→ Površina pora unutar materijala može biti 5000 puta veća od spoljašnje površine materijala



→ Na sledećoj slici su prikazane sorpcione krive



⇒ Za relativne vlažnosti do 20% je karakteristično formiranje jednoslojа molekula H_2O po površini materijala,

Za 20% tog sloj u potpunosti prekriva spoljašnju površinu i površinu pora,

Za relativne vlažnosti od 20% do 60% na površini materijala i pora se formira više slojeva H_2O molekula,

Za vlažnosti veće od 60% dolazi do formiranja kapi, koje delimično ili potpuno ispunjavaju p

→ Formirane kapi vode se mogu kretati kroz pukotine u materijalu putem kapilarnog penjanja, za šta su odgovorne sile površinskog napona tečnosti koje deluju između molekula vode i molekula zidova materijala

→ Kada je relativna vlažnost 100%, sve pore su potpuno ispunjene vodom, a površina je maksimalno ovlažena

→ Pri isušivanju materijala (desorpcija), ova kriva se ne poklapa sa krivom vlaženja (adsorpcije)

→ Naime, materijali se teže isušuju nego vlaže (za svaku relativnu vlažnost, kriva desorpcije je iznad krive adsorpcije)

⇒ Ova pojava se zove histerezis

(važi i za magnet, ...)

→ Šoš jedan fizički fenomen značajno utiče na proces vlaženja (isušenja) materijala

→ To je fenomen da pritisak zasićene vodene pare unutar pora zavisi od zakrivljenosti zidova pora

→ Ako pore aproksimiramo sferama ili cilindričnim cevčicama pritisak zasićene pare zavisi od poluprečnika pora

→ Ta zavisnost je data Kelvinovim zakonom i glasi:

$$p_p = p_z \, e^{\frac{-2\sigma M}{\rho RT} \cdot \frac{1}{r}}$$

p_p - pritisak zasićene vodene pare u pori

p_z - pritisak zasićene vodene pare van materijala/pore

σ - koeficijent površinskog napona vode

M - molarna masa vode

ρ - gustina vode

R - univerzalna gasna const.

T - temperatura vode

r - poluprečnik pore

→ Pošto je $e^{\frac{-2\sigma M}{\rho RT} \cdot \frac{1}{r}} < 1$, $(e^x < 1, \forall x > 0)$ 

p_z je $\Rightarrow$ $\boxed{p_p < p_z}$, to jest, pritisak zasićenja vodene pare u pori je uvek manji od pritiska zasićene vodene pare van pore

→ To dalje znači da do zasićenja vodene pare pre dolazi unutar pore nego van nje, na istoj temperaturi

→ Uz pomoć prethodne formule, formirana je tabela zavisnosti poluprečnika pore i relativne vlažnosti vazduha van materijala pri kojoj dolazi do zasićenja u pori

r[μm]	500	50	15	5	1,5	0,5
φ[%]	99,8	98	93	80	47	10

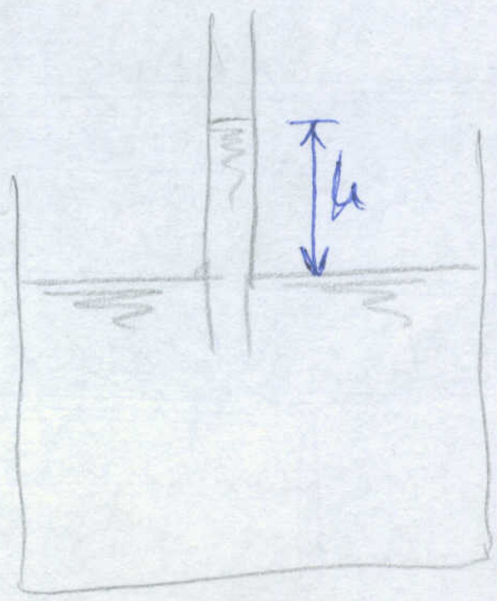
u Srbiji

⟺ za $r = 95$ μm je u pori spoljašnje $\varphi = 10\%$ unutra kao 100%

(⟺ tada u poranu "pada kiša", a to se spolja dešava samo za $\varphi = 100\%$)

→ Formirana vlaga (kondenzovana voda) putem kapilarnog penjanja se prostire kroz poroznu materijala što doprinosi rasprostiranju vlage

→ Visina penjanja vode u kapilari je $\boxed{h = \frac{2\sigma}{\rho g r}}$



$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$

⟺ kapilarno penjanje (voda se penje jer ima molekulske sile)

→ Pore materijala nisu cilindrične i nisu vertikalne, pa se procena visine izdizanja ~~vode iznad~~ vode iznad kontakta materijala sa vodom daje empirijskom formulom

$$h = B\sqrt{t}$$

t [s] - vreme vlaženja

$B\left[\frac{m}{\sqrt{s}}\right]$ - koeficijent prodora vode

→ Gustina masenog fluksa vode, koju konstrukcija apsorbuje u periodu vlaženja je data formulom

$$g = \frac{A}{2\sqrt{t}}\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$$

A - apsorpcijski koeficijent materijala

→ Apsorbovana masa vlage po kvadratnom metru $\Leftrightarrow$ $1\,m^2$ izložene površine je data formulom

$$m_v = A\sqrt{t}\left[\frac{kg}{m^2}\right]$$

→ Za neke materijale:

materijal	$A\left[\frac{kg}{m^2 s^{0,5}}\right]$	$B\left[\frac{kg}{s^{0,5}}\right]$
opeka	0,4	$1,4 \cdot 10^{-3}$
gas beton	0,1	$4 \cdot 10^{-4}$
beton (voda : cement = 0,3)	0,01	10^{-4}
beton (voda/cement = 0,7)	0,03	$3 \cdot 10^{-4}$
krečni malter	0,3	10^{-3}

- gušći je
$\sim h = 1,4\,m$ penjanja za $t = 1$ mesec

→ Vlažnost materijala opisujemo sledećim veličinama:

① masena vlažnost

$$w = \frac{m_v - m_s}{m_s} \cdot 100\,[\%]$$

m_v - masa vlažnog materijala
m_s - masa suvog materijala

② apsolutna vlažnost

$$u = \frac{m_v - m_s}{V}\left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

③ zapreminska vlažnost

$$\psi = \frac{V_{vode}}{V_{uzorka}} = \frac{u}{\rho_{vode}} \cdot 100\,[\%]$$

Difuzija vodene pare

Difuzija

→ Difuzija je proces spontanog kretanja molekula jedne vrste u sredini druge, putem haotičnih sudara

→ Ovo kretanje ima jednu usmerenu komponentu koja je orijentisana iz oblasti više u oblast niže koncentracije difundujuće supstance

→ Dakle, uzrok difuzije je razlika u koncentracijama, a može biti i razlika temperatura, razlika pritisaka ili neke druge fizičke veličine koja je povezana sa koncentracijom molekula

→ Kao pogonska sila difuzije se uvaja

① gradijent koncetracije

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+dx)-u(x)}{dx}$$

$u(x)$ - koncentracija molekula

ili

② gradijent temperature $\frac{dT}{dx}$

→ Difuzijom se prenosi masa, ali i kinetička energija, koju sa sobom nose čestice koje difunduju

→ Difuzija se najlakše odvija u gasovima, a najsporije u čvrstim telima

Prvi Fik-ov zakon

→ Posmatranjem difuzije jedne supstance u sredini druge (na primer, vodene pare u vazduhu)

→ Uslov važenja ovog zakona je da koncentracija difundujuće supstancije bude mnogo manja (<<) od koncentracije molekula supstance kroz koju se vrši difuzija

→ Na primeru vodene pare i vazduha, ovo je ispunjeno, jer je parcijalni pritisak vodene pare znatno manji od pritiska molekula koji sačinjavaju suv vazduh

⇔ na 20°C $p_{zH_2O} = 2330\,Pa$, što je 43 puta manje od normalnog pritiska (101 300 Pa)

→ Ovaj zakon je eksperimentalno utvrđen i određuje masu difundujuće supstance koja se prenese difuzijom za ∞ vreme dt, kroz da malu površinu dS, postavljenu normalno na pravac difuzije, i glasi:

$$dm = -D\,dS\,dt\,\frac{dc_m}{dx}$$

D-koeficijent difuzije $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

D(T)-funkcija je od temperature sredine

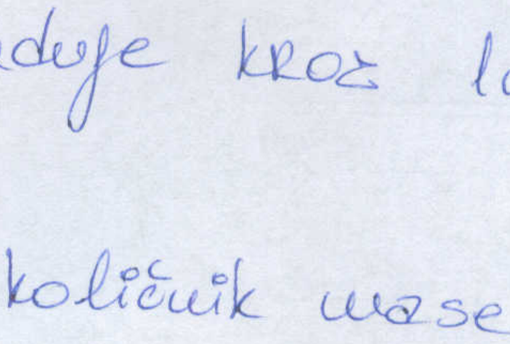
zavisi od vrste supstance

$dm \underset{\infty}{\Leftarrow}$ mala - masa koja se prenese difuzijom

$\frac{dc_m}{dx}$ - gradijent masene koncentracije

$dc_m = c_m(x+dx) - c_m(x)$ - promena masene koncentracije

$c_m = \frac{m}{V} = \rho$ - gustina



→ ~~Treba~~ Izvodimo izraz za gustinu difuzionog fluksa za slučaj difuzije vodene pare kroz vazduh

→ Definišemo

gustinu difuzionog fluksa

$$g \underset{def.}{=} \frac{dm}{dt\,dS}\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$$

$\Leftrightarrow$ masa supstance koja izdifunduje kroz lm² površine za 1s duž pravca difuzije

→ Difuzioni fluks definišemo kao količnik mase i vremena difuzije

$$\phi \underset{def.}{=} \frac{dm}{dt}\left[\frac{kg}{s}\right]$$

⇒ Polazimo od zakona idealnog gasa

$$pV = \nu RT$$

to jest, smatramo da se vodena para ponaša kao idealan g

ν - broj mol-ova

p - pritisak vodene pare

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

m - masa vodene pare

M - molarna masa vodene pare

$$\Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = c_m$$

$$g = -D(T)\frac{dc_m}{dx} = -D(T)\frac{d}{dx}\left(\frac{pM}{RT}\right) = -\frac{M}{R}D(T)\frac{d}{dx}\left(\frac{p(x)}{T(x)}\right)$$

$$g = -\frac{M}{R}D(T)\frac{1}{T(x)}\frac{dp}{dx} + \frac{M}{R}D(T)p(x)\frac{1}{T^2(x)}$$

⇒ drugi sabirak možemo da zanemarimo u odnosu na prvi jer je temperatura na kvadrat

$$\Rightarrow \boxed{g = -\frac{D(T)}{T}\frac{M}{R}\frac{dp}{dx}} \text{ - Fik-ova formula}$$

→ Eksperimentalno je utvrđeno da je koeficijent difuzije vodene pare u suvom vazduhu dat izrazom:

$$D(T) = 8{,}8 \cdot 10^{-10} T^{1{,}81} \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

$$\Rightarrow g = -\frac{8{,}8 \cdot 10^{-10} T^{0{,}81}}{R/M}\frac{dp}{dx}$$

R - univerzalna gasna const.
M - molarna masa

⇒ Poslednji izraz se zanemaruje sa zbog vrednosti koeficijenta koji stoji ispred gradijenta pritiska

Naime,

$$c(T) = \frac{8{,}8 \cdot 10^{-10} T^{0{,}81}}{R/M} = 1{,}91 \cdot 10^{-12} T^{0{,}81}$$

$$c_{sr} = \frac{1}{30°C - (-20°C)} \int_{-20°C}^{+30°C} T^{0{,}81} dT = 0{,}67 \cdot 10^{-6}$$

$$\boxed{g = -0{,}67 \cdot 10^{-6}\frac{dp}{dx}\left[\frac{kg}{m^2 h}\right]}$$ - izraz za gustinu fluksa vodene pare kroz suv vazduh koji udiruje

$$0{,}67 \approx \frac{2}{3} = \frac{1}{1{,}5}$$

→ Za slučaj difuzije vodene pare kroz građevinske materijale prethodno izvedena formula se koriguje uz pomoć faktora otpora difuzije μ, koji govori koliko puta manje vodene pare prođe kroz istu površinu za isto vreme kroz taj materijal nego kroz suv vazduh, i glasi:

$$\boxed{g = -\frac{0{,}67 \cdot 10^{-6}}{\mu}\frac{dp}{dx}}$$

<=> svaki građevinski materijal ima svoj faktor otpora difuzi

materijal	drvo	beton	gips	opeka	celuloza	kamena vuna	PVC (plastika)
μ	70	30	4	7	1	1	800 000

Zahtevi u pogledu vlaženja građevinskih ~~materijala~~ konstrukcija

→ Svaka građevinska konstrukcija mora da zadovolji sledeća 4 uslova po pitanju vlage:

① Kapilarni prelaz vode na kontaktu tla i konstrukcije mora biti u potpunosti sprečen

② Kapilarni prelaz vode iz meteoroloških padavina na ovdašč zgrade mora biti ograničen odgovarajućim materijalom završnog sloja fasade

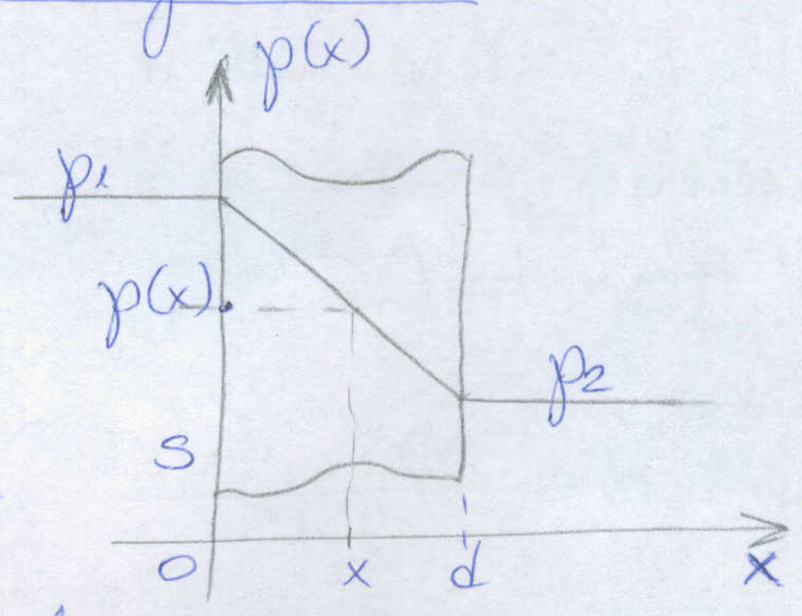
③ Na unutrašnjoj površini konstrukcije ne sme doći do kondenzacije vodene pare

④ U građevinskoj konstrukciji ne sme doći do kondenzacije vodene pare u meri koja utiče na nosivost i trajnost konstrukcije

Difuzija vodene pare kroz ravan homogen zid

→ Posmatramo:
ravan homogen zid debljine d, kroz koji difunduje vodena para

→ Posmatramo stacionaran slučaj, to jest, koncentracije vodene pare sa jedne i druge strane zida su dugo vremena const. ⇒ pa je i fluks difuzije const.



→ Parcijalni pritisci vodene pare sa jedne i druge strane zida iznose p_1 i p_2, a faktor otpora difuzije je μ

→ Odredićemo:
raspodelu parcijalnog pritiska vodene pare u homogenom zidu $p(x)$
kao i difuzioni fluks vodene pare Φ

→ Polazimo od izraza za difuzioni fluks

$$\Phi = const. = -\frac{0{,}67 \cdot 10^{6} S}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

S - površina zida

$$\frac{-\mu\phi}{5\cdot 0{,}67\cdot 10^{-6}}\,dx = dp$$

$$\frac{-\mu\phi}{0{,}67\cdot 10^{-6}S}\int_0^x dx = \int_{p_1}^{p(x)} dp = p(x) - p_1$$

$$p(x) = p_1 - \frac{\mu\phi}{5\cdot 0{,}67\cdot 10^{-6}}\,x$$

$\phi = ?$

$$p(x=d) = p_2 = p_1 - \frac{\mu\phi}{5\cdot 0{,}67\cdot 10^{-6}}\cdot d$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\mu d}{5\cdot 0{,}67\cdot 10^{-6}}} = \frac{\Delta p}{\frac{\mu d}{S}\cdot 1{,}5\cdot 10^{6}}$$

$$\phi = \frac{p_1 - p_2}{1{,}5\cdot 10^{6}\,\frac{\mu d}{S}} = \frac{p_1 - p_2}{R_D}\left[\frac{kg}{l}\right]$$

- R_D - otpor difuzije

$$R_D = 1{,}5\cdot 10^{6}\,\frac{\mu d}{S}\left[\frac{1}{m}\right]$$

$$\boxed{p(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{d}\cdot x}$$

$\Leftrightarrow$ parcijalni pritisak vodene pare kroz zid opada linearno

Difuzija vodene pare kroz višeslojni ravan zid

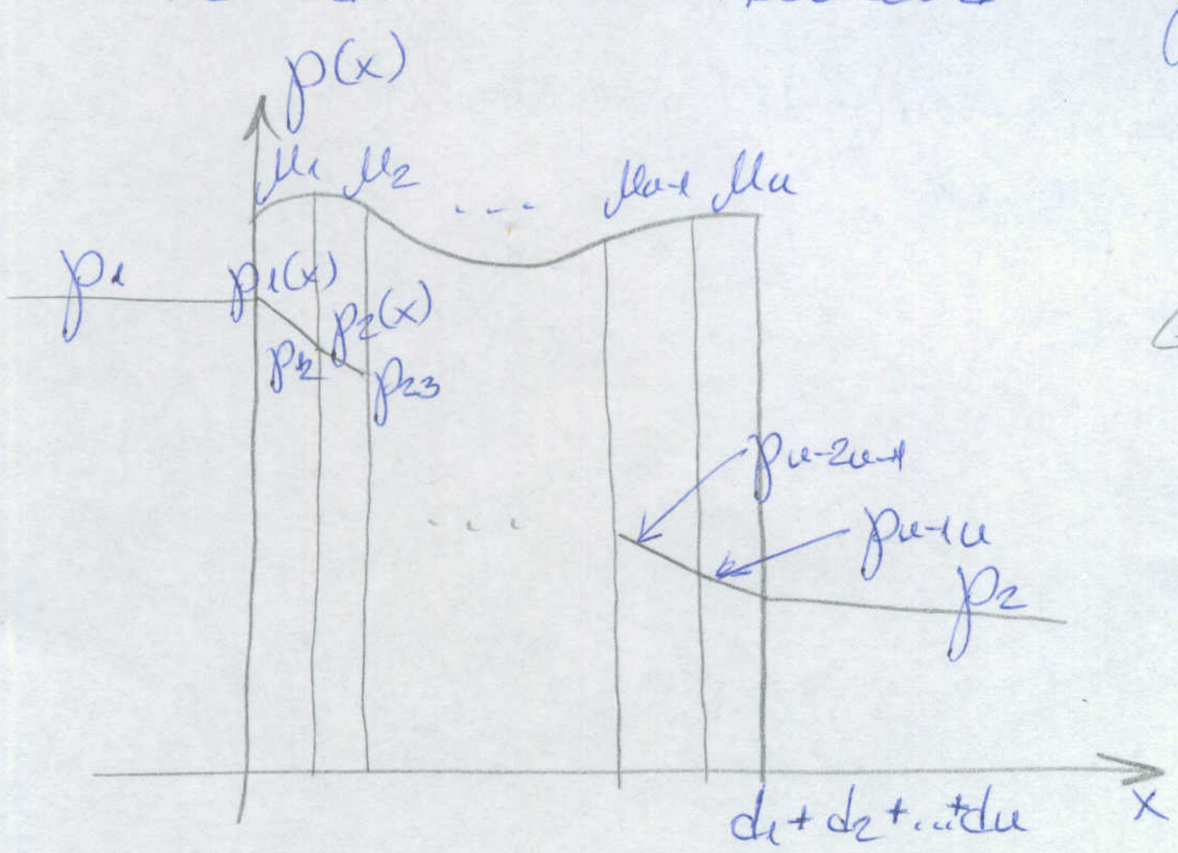
→ Posmatrajmo: zid od n slojeva sa slojevima debljina $d_1, d_2, \ldots, d_n$,

koeficijenata otpora difuzija $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$

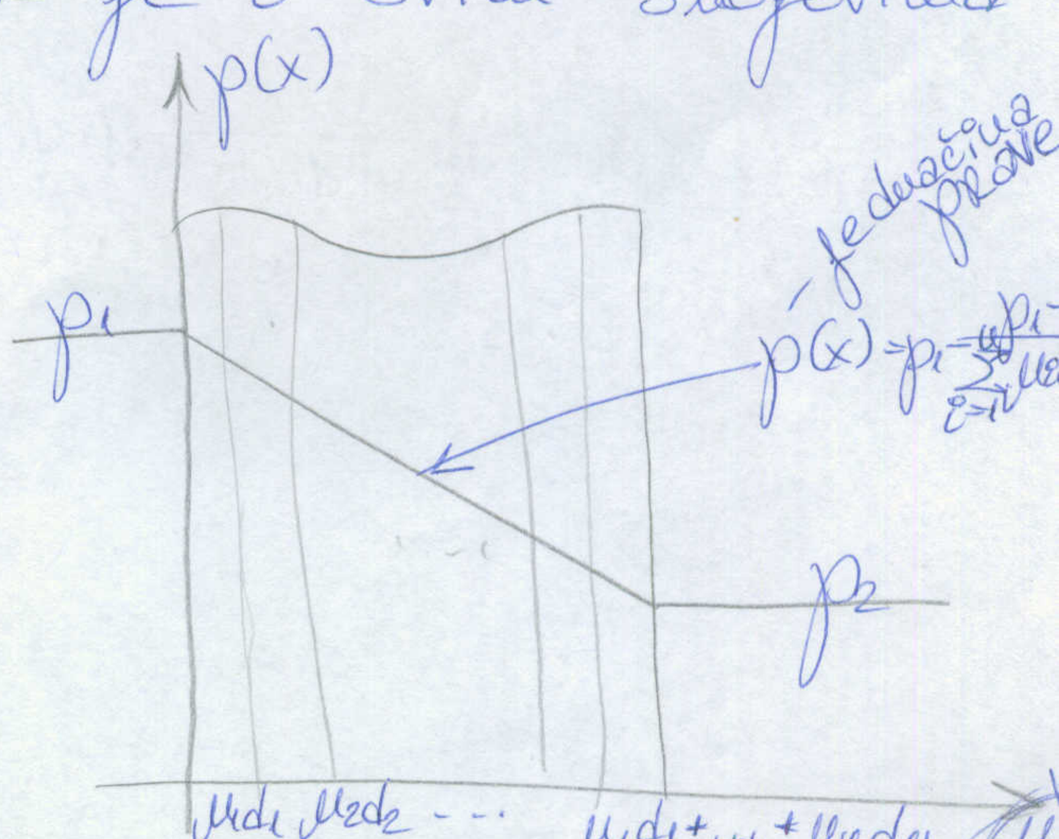
parcijalni pritisci vodene pare sa leve i desne strane zida su p_1 i p_2

→ Posmatrajmo:

stacionarno stanje, to jest kada fluks vodene pare ne zavisi od vremena i jednak je u svim slojevima



$\Leftrightarrow$



→ u prvom sloju

$$\phi_1 = \frac{p_1 - p_2}{1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_1 d_1}{S}} = \phi_2 = \frac{p_{12} - p_{23}}{1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_2 d_2}{S}} = \ldots = \frac{p_{u-1u} - p_2}{1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_u d_u}{S}}$$

$$p_1 - p_{12} = \phi \cdot 1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_1 d_1}{S}$$

$$p_{12} - p_{23} = \phi \cdot 1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_2 d_2}{S}$$

$$\vdots$$

$$p_{u-1u} - p_2 = \phi \cdot 1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_u d_u}{S}$$

u ⊕

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \phi \frac{1{,}5\cdot 10^6}{S}(\mu_1 d_1 + \ldots + \mu_u d_u)$$

$$\boxed{\phi = \frac{p_1 - p_2}{\frac{1{,}5\cdot 10^6}{S}\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i} \left[\frac{kg}{u}\right]} \rightarrow \text{„}1{,}5\cdot 10^6\text{“} \Leftrightarrow \frac{1}{u}$$

→ Određujemo parcijalne pritiske na spojevima slojeva

$$p_{u1} = p_1 - \phi \cdot 1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_1 d_1}{S} = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i} \cdot \mu_1 d_1$$

$$p_{12} = p_{12} - \phi \cdot 1{,}5\cdot 10^6 \frac{\mu_2 d_2}{S} = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}\mu_1 d_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}\mu_2 d_2 = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2)$$

$$\vdots$$

$$p_{u-1u} = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}(\mu_1 d_1 + \ldots + \mu_{u-1} d_{u-1})$$

→ I, na kraju, određujemo kako se menja parcijalni pritisak unutar svakog sloja

→ Unutar prvog sloja

$$p_1(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{d_1} x = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}\mu_1 x$$

$$p_2(x) = p_{12} - \frac{p_{12} - p_{23}}{d_2}(x - d_1) = p_{12} - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}\mu_1 d_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}\mu_2 (x - d_1) =$$

$$= p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}(\mu_1 d_1 + \mu_2 (x - d_1))$$

$$\vdots$$

$$p_u(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{\sum_{i=1}^{u} \mu_i d_i}(\mu_1 d_1 + \ldots + \mu_u (x - (d_1 + d_2 + \ldots + d_{u-1})))$$

Difuzija i kondenzovanje vodene pare u zidu

Kondenzacija

→ Važna pojava pri difuziji vodene pare kroz zid je vagla i potpuna kondenzacija pare unutar zida

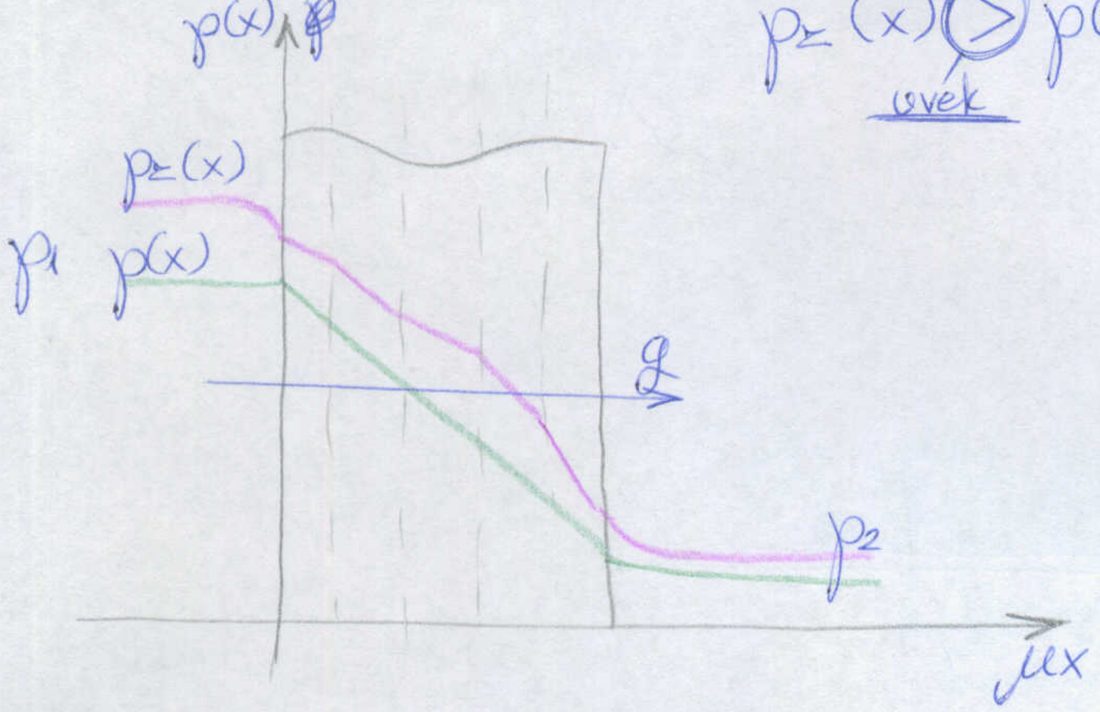
→ Videli smo da se delimična kondenzacija javlja pri svakoj vrednosti relativne vlažnosti u vidu adsorpcije molekula na zidove pora, što je uslovljeno temperaturom pare i poluprečnikom pora

→ Do potpune kondenzacije po čitavoj zapremini pora dolazi kada parcijalni pritisak vazduha na vrednost zasićene pare, ili, posmatrano preko temperature ⇔ temperatura pare opadne na temperaturu tačke rose

(*) $p_z(x)$ - max. zasićenje koje (realno) može da postoji (teoretski)
$p(x)$ - stvarni pritisak vodene pare
⇒ relativna vlažnost je tada 100-procentna

→ U vezi sa ovim, imamo 3 slučaja dešavanja u zidu:

● ① nema potpune kondenzacije vodene pare u zidu, kriva parcijalnog pritiska vodene pare i pritiska zasićene pare se ne seku

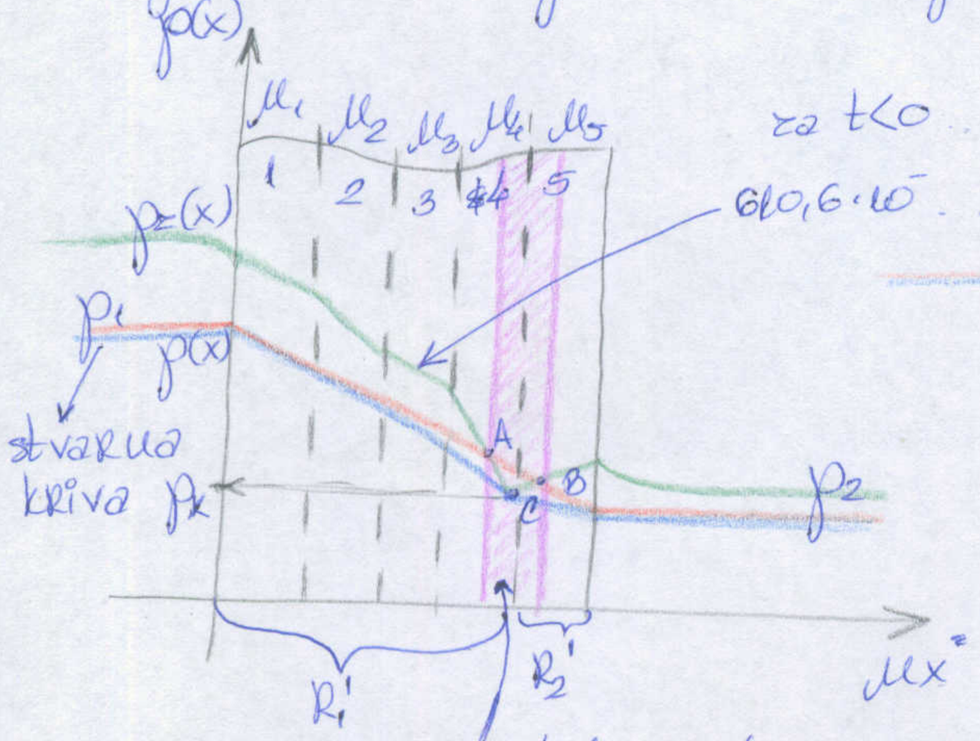


$p_z(x) > p(x)$ ⇔ nema totalnog (potpunog) kondenzovanja/kondenzacije u zidu
uvek

$$g = 0{,}67 \cdot 10^{-6} \frac{p_1 - p_2}{\mu d} \left[\frac{kg}{m^2 h}\right]$$

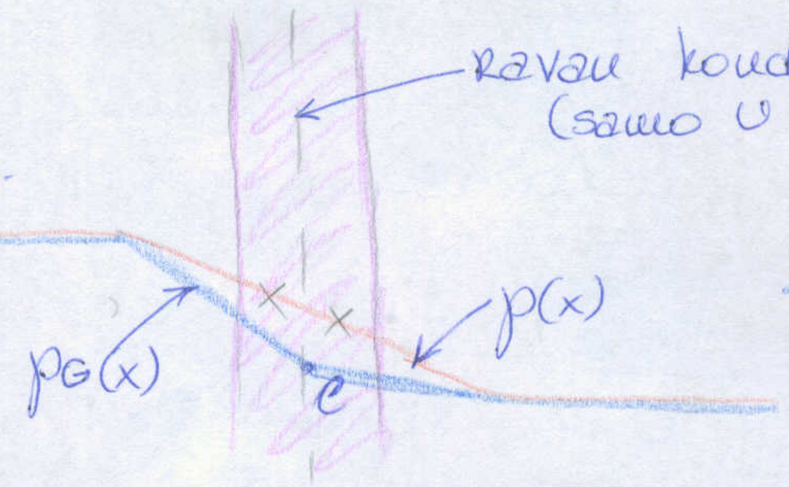
●

② Kondenzovanje može da se javi u okolini spoja dva susedna materijala u zidu, ali da ta oblast ne obuhvata jedan čitav, ili više slojeva materijala od kojeg je zid načinjen



za $t<0$...

$\delta \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-9}$ ...



$C \in p_z(x)$

p_k - u tački C ≡ pritisak kondenzovanja

$\Rightarrow$ tu dolazi do masovne kondenzacije vodene pare

→ Na slici vidimo da se krive zasićene ~~vodene~~ vodene pare $p_z(x)$ i prava stvarnog parcijalnog pritiska ~~se~~ $p(x)$ seku u dve tačke

→ Šrafirana oblast je mesto gde se dešava totalna kondenzacija vodene pare bez obzira kolike su difuzije pora u materijalu

$\Leftrightarrow$ ovo znamo jer stvarni pritisak vodene pare ne može biti veći od pritiska zasićenja

→ Na delu između tačaka A i B stvarni pritisak vodene pare ne pripada krivoj $p(x)$ već krivoj $p_z(x)$

$\Rightarrow$ Za proračun mase kondenzovane pare, u ovom slučaju, ~~kondenzacije~~ koristimo <u>Glaser-ov aproksimativni metod</u>

On se sastoji u sledećem:

→ kondenzacija se ne vrši u šrafiranoj oblasti između tačaka A i B, već samo u <u>ravni</u> koja predstavlja kontakt materijala 4 i 5 na slici, a stvarna kriva parcijalnog pritiska vodene pare se lomi u tački C koja je na kontaktu materijala i pripada krivoj zasićenja vodene pare $p_z(x)$

$$g_v = 0{,}67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_i - p_k}{R_1'} - \frac{p_k - p_2}{R_2'} \right] \left[\frac{kg}{m^2 h} \right]$$

koliko kg pare se u $1m^2$ za 1h ~~sat~~ pretvori u vodu

koliko pare se kondenzuje (pretvori u vodu za 1h)

$\Leftrightarrow$ <u>difuzioni ~~tok~~ fluks</u> vodene pare koji ulazi u ravan kondenzacije

<u>difuzioni fluks</u> vodene pare koji izlazi iz ravni kondenzacije ($\Leftrightarrow$ ovoliko vode ispari za 1h)

$R_1' = \sum_i \mu_i d_i$ - ekvivalentna <u>difuziona debljina</u> zida do ravni kondenzacije

$R_2' = \sum_i \mu_i d_i$ - " - od ravni kondenzacije do kraja zida

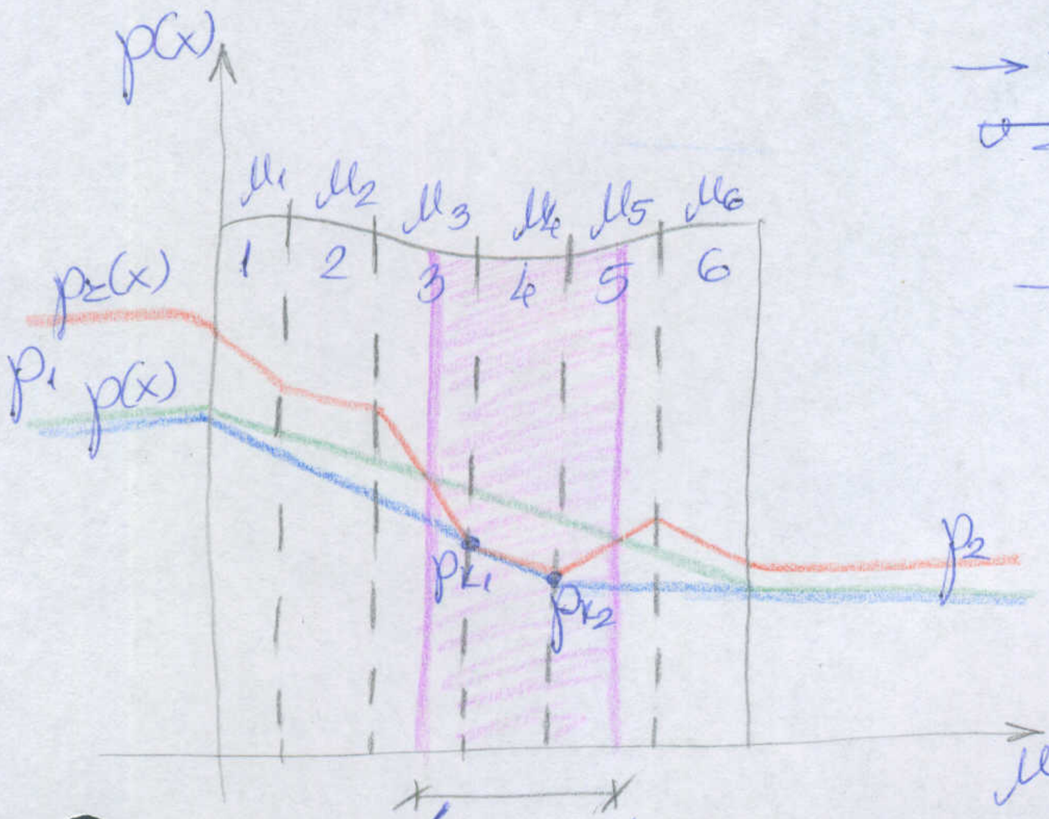
$\Rightarrow$ za primer sa slike: $R_1' = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3 + \mu_4 d_4$

$R_2' = \mu_5 d_5$

③ Šrafirana oblast u slučaju pod ② može da obuhvati jedan ili više slojeva u zidu

⇔ u tom slučaju govorimo o kondenzaciji u zoni

→ Dakle, zona obavezno obuhvata bar jedan čitav sloj materijala, a zahvata i delove okolnih slojeva



⇔ sloj 4 je obuhvaćen sloj materijala ⇔ zona

→ Na slici vidimo da oblast kondenzovanja u potpunosti obuhvata 4. sloj materijala

→ Oblast počinje pri kraju 3. sloja, a završava(se) u 5. sloju

⇒ Prema Glaser-ovoj aproksimaciji, totalno kondenzovanje se dešava samo u čitavom 4. sloju:
započinje na kontaktu 3. i 4. sloja, a završava na kontaktu 4. i 5. sloja

→ Stvarni parcijalni pritisak vodene pare se kreće od p_1 do pritiska zasićene vodene pare na spoju 3. i 4. materijala - p_{K1}, i od pritiska zasićene vodene pare na kontaktu 4. i 5. sloja p_{K2} do p_2

p_1, p_2 - pritisci vodene pare sa obe strane zida

p_{K1}, p_{K2} - pritisci zasićene vodene pare

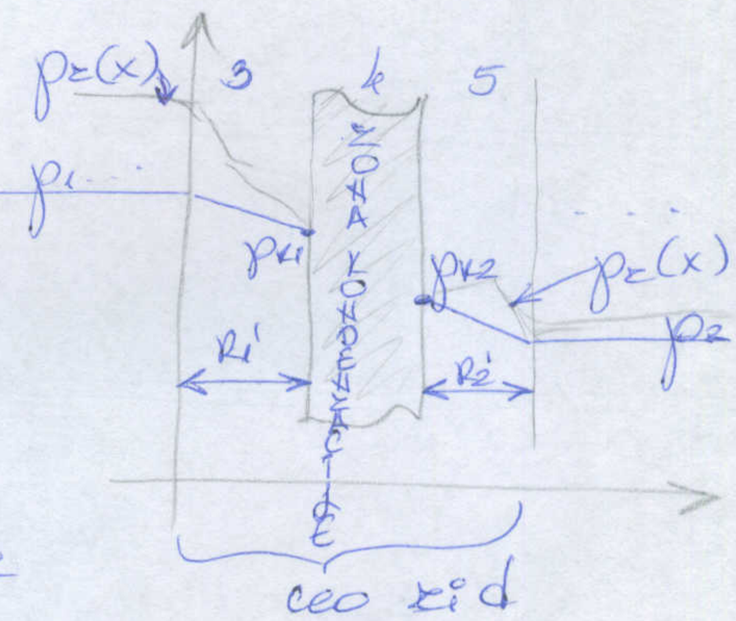
$$g = 0{,}67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_1 - p_{K1}}{R_1'} - \frac{p_{K2} - p_2}{R_2'} \right]$$

R_1' - ekvivalentna difuziona debljina do zone

R_2' - -||- od zone

za primer na slici: $R_1' = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3$

$R_2' = \mu_5 d_5 + \mu_6 d_6$



⊛ Ova 3 slučaja su (generalno) aproksimacije svih ovih situacija

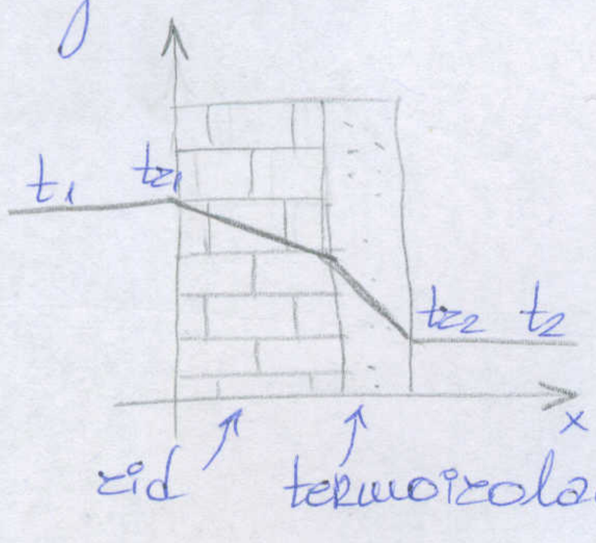
→ Da bi sprečili pojavu totalnog kondenzovanja vodene pare, pribegavamo upotrebi bolje toplotne izolacije zida

→ Ta izolacija se obavezno stavlja sa spoljašnje strane jer je u tom slučaju čitav zid na višoj temperaturi, što znači da je i kriva zasićene vodene pare $p_z(x)$ izdignuta u odnosu na situaciju kada nema izolacije

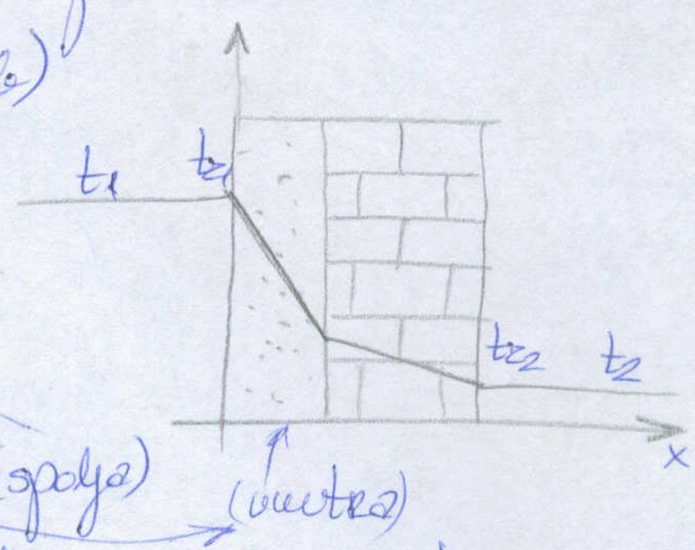
→ Na ovaj način možemo da izbegnemo presek između krive zasićenja i krive stvarnog pritiska vodene pare, što znači da izostaje totalno kondenzovanje

→ Prema pravilniku o ~~energetk~~ energetskoj sertifikaciji, dozvoljena je pojava totalnog kondenzovanja vodene pare, ali je uslov da se ova tako dobijena voda isuši za 90 dana pod uslovima koji važe u letnjim periodima

a)



b)



→ Sa slike vidimo da je isti zid u situaciji pod a) na znatno višoj temperaturi nego u situaciji pod b), što znači da je verovatnoća pojave kondenzata u slučaju pod a) mnogo manja nego u slučaju pod b)

⇒ dakle, izolaciju treba stavljati sa spoljašnje strane

Proračun vlaženja i isušenja zidova

→ Prema našem (=evropskom) standardu, zidovi vlaže u zimskom periodu toku 60 dana

→ Masa kondenzovane vode se dobija preko gustine difuzionog fluksa vlaženja

$$\cancel{g_{zvl}} \Rightarrow \boxed{g_{zvl} = \underbrace{0{,}67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_1 - p_x}{R_1'} - \frac{p_x - p_2}{R_2'} \right] \cdot 24h \cdot z}_{g} \left[\frac{kg}{m^2} \right]}$$

z - broj dana vlaženja

formula važi za kondenzovanje u ravni

⇒ za kondenzovanje u zoni, ista formula je:

$$\boxed{g_{zvl} = \underbrace{0{,}67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_1 - p_{x1}}{R_1'} - \frac{p_{x2} - p_2}{R_2'} \right] \cdot 24h \cdot z}_{g} \left[\frac{kg}{m^2} \right]}$$

broj dana

Difuzija vodene pare pri isušenju

→ Prema našem (≈evropskom) standardu, isušenje se odvija pod sledećim uslovima:

~~teret~~ temperatura vazduha unutar prostorije i van (prostorije) je ista, i iznosi 18°C

relativna vlažnost vazduha spolja i iznutra je ista i iznosi 65 %

⇒ pod tim uslovima, parcijalni pritisci vodene pare u vazduhu spolja i iznutra iznose:

$$p_1 = p_2 = 0{,}65 \cdot p_2(18°C)$$

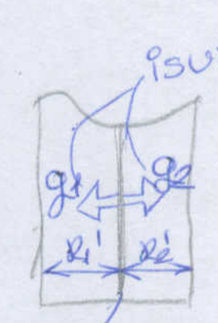
$$p_2(18°C) = 2063{,}36\ Pa$$

→ Formula za isušenje glasi: (važi za zid ovlažen u ravni)

$$g_{zis} = 0{,}67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_k - p}{R_1'} + \frac{p_k - p_2}{R_2'} \right] \left[\frac{kg}{m^2 h} \right]$$

koliko se isuši levo od ravni

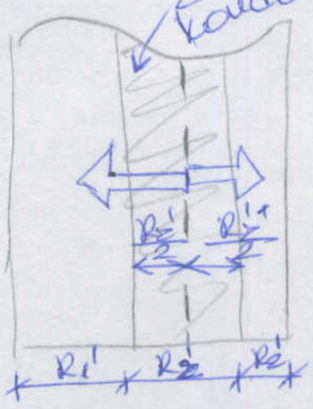
koliko se isuši desno od ravni



→ Ista formula za zid ovlažen u zoni glasi:

$$g_{is} = 0{,}67 \cdot 10^{-6} \left[\frac{p_{k_1} - p_1}{R_1' + 0{,}5R_2'} + \frac{p_{k_2} - p_2}{R_2' + 0{,}5R_2'} \right]$$

zona kondenzovanja



$\frac{R_2'}{2}$ – leva strana (⇐ leva polovina vode se isuši ulevo)

$\frac{R_2'}{2}$ – desna strana (⇐ desna polovina vode se isuši udesno)

→ Broj dana isušenja prema našem (≈evropskom) standardu se računa po formuli:

$$z = (1{,}3) \frac{g_{zve}}{2_4 \cdot g}$$

empirijski faktor, to jest, sugeriše se da se zid isuši za 30% više vremena nego što je fizički očekivano

⇔ zid se teže isuši nego što se ovlaži