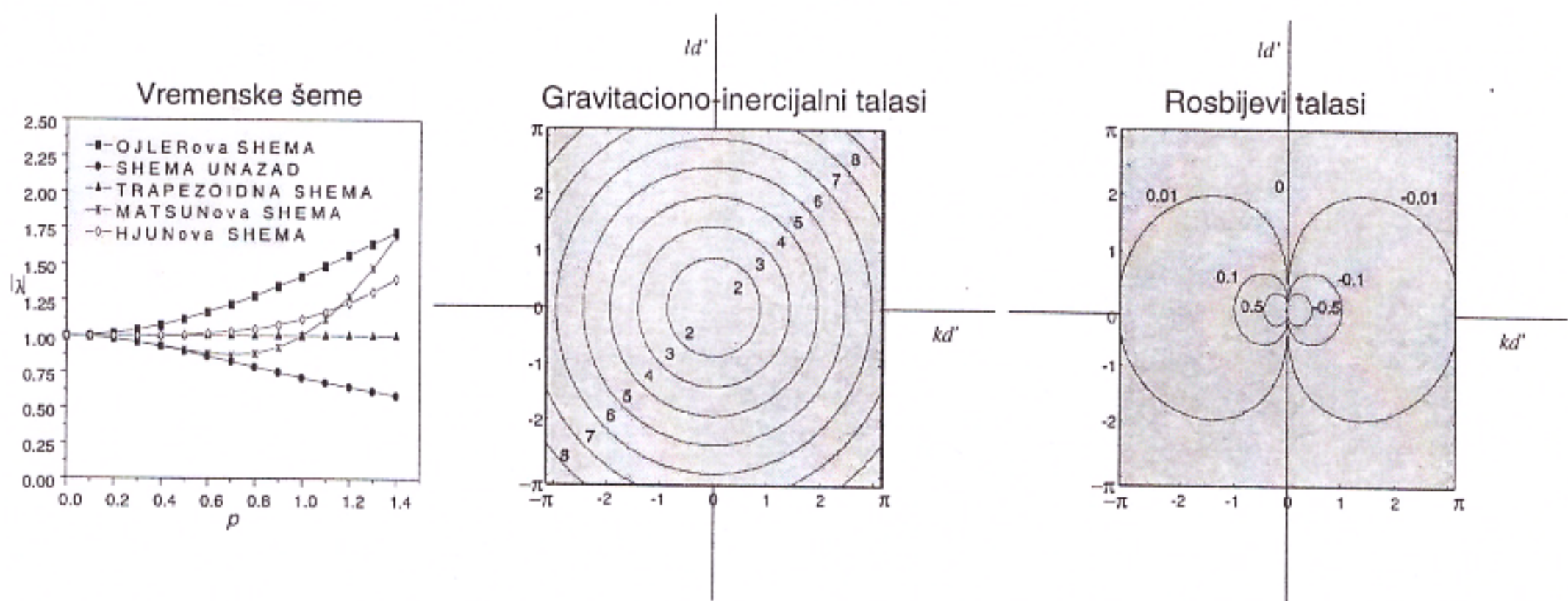


Milivoj B. Gavrilov
Ivana A. Tošić
Miodrag Rančić

MODELIRANJE ATMOSFERE I

Zbirka rešenih zadataka



Odsek za meteorologiju, Fizički fakultet,
Univerzitet u Beogradu
Beograd, 2000.

Milivoj B. Gavrilov
Ivana A. Tošić
Miodrag Rančić

MODELIRANJE ATMOSFERE I

Zbirka rešenih zadataka

Autori

Dr M. B. Gavrilov

Mr I. A. Tošić

Dr M. Rančić

Izdavač

Dr M. B. Gavrilov

MODELIRANJE ATMOSFERE I

Zbirka rešenih zadataka

Recenzenti

Prof. dr Zaviša I. Janjić

Doc. dr Borivoj Rajković

Grafička obrada

Mr Ivana A. Tošić

Tiraž 50 primeraka

Štampa

Skripta, Gospodar Jovanova 42, Beograd

© 2000 Reprodukovanje (fotokopiranje ili umnožavanje ove knjige na bilo koji način) ili ponovno objavljivanje sadržaja ove knjige - u celini ili u delovima - nije dozvoljeno bez izričite saglasnosti i pismenog odobrenja autora.

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

551.51:551.501.4(075.8) (076)

GAVRILOV, Milivoj B.

Modeliranje atmosfere I : zbirka rešenih
zadataka / Milivoj B. Gavrilov, Ivana A.

Tošić, Miodrag Rančić. - Beograd : M. B.
Gavrilov, 2000 (Beograd : Skripta), - 192
str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 50. - Bibliografija: str. 192.

ISBN 86-902111-1-X

1. Tošić, Ivana A. 2. Rančić, Miodrag

551.51:519.87(075.08) (076)

532:519.87(075.8) (076)

a) Atmosfera - Dinamika - Matematički modeli

- Zadaci b) Dinamika fluida - Matematički

modeli - Zadaci

ID=83101708

PREDGOVOR

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MODELIRANJA ATMOSFERE I je pomoćni udžbenik za predmet *Modeliranje atmosfere I*, prema planu i programu koji je ustanovio dr Zaviša I. Janjić, redovni profesor, član SANU van radnog sastava; prema istovetnom planu i programu ovaj kurs se predaje poslednjih godina na Institutu za meteorologiju Fizičkog fakulteta. Zbirka obuhvata celokupan materijal iz skripte PRAKTIKUM REŠENIH ZADATAKA IZ MODELIRANJA ATMOSFERE I SA PRIMERIMA RAČUNARSKIH PROGRAMA U FORTRANU I MATLABU autora dr Milivoja B. Gavrilova i mr Ivane A. Tošić. Skripta sadrži originalno formulisane zadatke koji su formirani tokom školske godine 1996/97. i 1997/98. kada je dr Milivoj B. Gavrilov držao nastavu, a mr Ivana A. Tošić vežbe iz predmeta *Modeliranje atmosfere I*. Takođe, ova Zbirka obuhvata deo zadataka iz skripte SKRIPTA IZ DINAMIČKE METEOROLOGIJE IV autora dr Miodraga Rančića.

Zbirka je prvenstveno namenjena meteorolozima i specijalistima koji se bave problemima modeliranja atmosfere. Pored njih, Zbirku mogu koristiti i stručnjaci u drugim oblastima koji se sreću sa problemima numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina hidrodinamike i/ili drugih običnih diferencijalnih jednačina talasnog tipa i/ili hiperboličnih i eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Termini i simboli u Zbirci usklađeni su sa uobičajenim međunarodnim i domaćim standardima. Pored klasičnog ili analitičkog pristupa u rešavanju zadataka, Zbirka sadrži i listinge izvornih kodova kompjuterskih programa u jezicima FORTRAN i MATLAB, koji automatizuju izložene numeričke procedure i vizuelizuju pojedne numeričke rezultate. Za većinu zadataka navedena je (autorima dostupna) literatura koja ukazuje na teorijsku osnovu, ishodište zadatka ili materiju značajnu za zadatak.

Zadaci su grupisani u sedam glava prema uobičajenim kriterijumima za razvrstavanje problema u numeričkom rešavanju hidrodinamičkih jednačina. Zbirka počinje zadacima u kojima se rešavaju problemi iz osnovnih postavki vezanih za diskretno predstavljanje kontinualnih funkcija. Zatim se preko zadataka iz oblasti stabilnosti i vremenskog diferenciranja prelazi na problem linearne advekcije. Najobimniji deo Zbirke se odnosi na probleme prostornog i/ili horizontalnog diferenciranja, gravitaciono-inercijalnih i Rosbijevih talasa, a detaljno su obrađeni i zadaci iz nelinearne advekcije. U šestoj glava su razmatrana neka pitanja ekonomičnosti računanja. Autori smatraju važnom i poslednju glavu u kojoj su izloženi zadaci koji ilustruju operatorski račun, najvažnije numeričke operatore (definicije i svojstva), bez kojih se numerički tretman jednačina hidrodinamike ne može više zamisliti. Zbirka obuhvata četiri priloga: Spisak korišćenih oznaka i skraćenica, Grčki alfabet, Spisak osnovnih naredbi FORTRANa i MATLABa, i Literaturu. Cilj priloga je da olakšaju praćenje komplikovanog matematičkog aparata izloženog u Zbirci, kao i da obezbede efikasan podsetnik studentima prilikom savladavanja nastavnog gradiva, kao i njegovu dopunu.

Autori preporučuju čitaocima, pre svega studentima, da prvo pokušaju sa samostalnim rešavanjem zadataka, a da ponuđena rešenja konsultuju u slučaju kada zadatak ne uspeju da reše. Autori ohrabruju čitaoce da traže elegantnija rešenja zadataka, kao i da obaveste Autore o eventualnim greškama otkrivenim u Zbirci. Autori će biti zahvalni svakom ko im dostavi novo rešenje i konstruktivnu primedbu na postojeća rešenja. Takođe, preporučujemo čitaocima da numeričke rezultate dobiju pisanjem sopstvenih programa u FORTRANu i/ili MATLABu, a da numeričke rezultate navedene u Zbirci dobijene kao rezultat izvršavanja programa koriste samo kao proveru sopstvenih rezultata.

Na kraju, drago nam je što možemo ovim putem da se zahvalimo prof. Zaviši I. Janjiću na podršci tokom pisanja Zbirke. Zahvaljujemo se dr Dejanu V. Tošiću, docentu Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, na konsultacijama o programiranju numeričkih algoritama i vizuelizaciji rezultata u programskom okruženju MATLABa.

SADRŽAJ

Predgovor	1
Glava 1. Osnovi metoda konačnih razlika	1
Glava 2. Stabilnost.....	11
Glava 3. Vremenske šeme	17
3.1 Šeme primenjene na oscilatornu jednačinu	17
3.2 Šeme primenjene na jednačinu trenja.....	33
Glava 4. Advektivna jednačina	43
Glava 5. Horizontalno numeričko diferenciranje	65
5.1 Opšti pojmovi	65
5.2 Gravitaciono-inercijalni talasi	71
5.3 Rosbijevi talasi	97
5.4 Mreže B/E i C	125
5.5 Arakavin Jakobijan	131
5.6 Advekcija	145
Glava 6. Ekonomične eksplicitne i ostale šeme	159
Glava 7. Operatori	171
Lista simbola i oznaka.....	183
Grčki alfabet	187
Lista osnovnih funkcija i naredbi u FORTRANu i MATLABu	189
Literatura	191

GLAVA 1

OSNOVI METODA KONAČNIH RAZLIKA

ZADATAK 1.1.

Za kontinualnu funkciju $u = u(x, t)$, čije su nezavisno promenljive prostor x i vreme t , na dužini $L = I\Delta x$ u tačkama pravilne mreže x_i u vremenu t_0 poznate su njene diskretne (pojedinačne) vrednosti

$$u_i = u(x_i, t_0), \quad (1)$$

gde je korak mreže zadat

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \equiv \text{const}, \quad (2)$$

a $i = 0, 1, 2, \dots, I$. Zameniti $\partial u(x, t_0) / \partial x$ u nekoj tački centralnim količnikom konačnih razlika, preko:

- a) jednog koraka mreže,
- b) dva koraka mreže i
- c) $2n$ koraka mreže, $n \leq I/2$.

Rešenje:

a) Prostorni izvod zamenjen centralnim količnikom konačnih razlika preko jednog koraka mreže ima oblik (Janjić, 1993)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}, t_0} \rightarrow \frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_i, t_0)}{\Delta x}. \quad (3)$$

b) Prostorni izvod zamenjen centralnim količnikom konačnih razlika preko dva koraka mreže može se napisati (Janjić, 1993)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i, t_0} \rightarrow \frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_{i-1}, t_0)}{2\Delta x}. \quad (4)$$

c) Prostorni izvod zamenjen centralnim količnikom konačnih razlika preko $2n$ koraka mreže, kada je $n \leq I/2$, ima oblik (Gavrilov i Tošić, 1998)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i, t_0} \rightarrow \frac{u(x_{i+n}, t_0) - u(x_{i-n}, t_0)}{2n\Delta x}. \quad (5)$$

ZADATAK 1.2.

Za kontinualnu funkciju $u = u(x, t)$ poznate su diskretne vrednosti $u_i = u(x_i, t_0)$ na intervalu $L = I\Delta x$ u tačkama pravilne mreže x_i u vremenu t_0 , gde je korak mreže $\Delta x = x_i - x_{i-1} \equiv \text{const}$ i $i = 0, 1, 2, \dots, I$. Smatrajući da i raste u pozitivnom smeru x ose, odrediti u nekoj tački i i vremenu t_0 aproksimaciju za $\partial u(x, t_0)/\partial x$ preko jednog koraka mreže, koristeći:

- količnik unapred ili nizvodni količnik i
- količnik unazad ili uzvodni količnik.

Rešenje (Janjić, 1993):

- Aproksimacija izvoda količnikom unapred preko jednog koraka mreže može se napisati

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} = \frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_i, t_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

- Aproksimacija izvoda količnikom unazad preko jednog koraka mreže ima oblik

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} = \frac{u(x_i, t_0) - u(x_{i-1}, t_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

ZADATAK 1.3.

Polazeći od količnika konačnih razlika unapred preko jednog koraka mreže kao aproksimacije za $\partial u(x, t_0)/\partial x$ i koristeći Tejlorov (Taylor) red za predstavljanje funkcije u okolini tačke za koju se aproksimacija traži, odrediti

- grešku odsecanja aproksimacije i
- red tačnosti aproksimacije.

Rešenje:

- Količnik konačnih razlika unapred predstavlja aproksimaciju izvoda, oblika

$$\frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_i, t_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0}. \quad (1)$$

Razvoj $u(x_{i+1}, t_0)$ u Tejlorov red oko x_i može se napisati

$$u(x_{i+1}, t_0) = u(x_i, t_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^3 + \dots \quad (2)$$

Prebacivanjem prvog člana desne strane (2) na levu stranu i deljenjem sa Δx , dobija se

$$\frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_i, t_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, t_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, t_0} \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, t_0} (\Delta x)^2 + \dots, \quad (3)$$

odnosno,

$$\frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_i, t_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, t_0} + \varepsilon, \quad (4)$$

gde je

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, t_0} \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, t_0} (\Delta x)^2 + \dots \quad (5)$$

Oduzimanjem (1) od (4), dobija se razlika data izrazom (5), poznata pod nazivom greška odsecanja aproksimacije. Sličan postupak određivanja greške odsecanja može se naći kod Janjića (1993).

b) Red tačnosti aproksimacije je najniži eksponent kojim je stepenovan korak mreže u grešci odsecanja. Aproksimacija (1) je prvog reda tačnosti, pošto je jedinica najniži eksponent kojim je Δx stepenovano u (5), ili

$$\varepsilon = O(\Delta x). \quad (6)$$

ZADATAK 1.4.

Polazeći od količnika konačnih razlika unazad preko jednog koraka mreže kao aproksimacije za $\partial u(x, t_0)/\partial x$ i koristeći Tejlorov red za predstavljanje funkcije u okolini tačke za koju se aproksimacija traži, odrediti

- grešku odsecanja aproksimacije i
- red tačnosti aproksimacije.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

- Količnik konačnih razlika unazad predstavlja aproksimaciju izvoda, oblika

$$\frac{u(x_i, t_0) - u(x_{i-1}, t_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, t_0}. \quad (1)$$

Razvoj $u(x_{i-1}, t_0)$ u Tejlorov red oko x_i može se napisati

$$u(x_{i-1}, t_0) = u(x_i, t_0) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, t_0} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, t_0} (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, t_0} (\Delta x)^3 + \dots \quad (2)$$

Prebacivanjem prvog člana desne strane (2) na levu stranu, promenom znaka i deljenjem sa Δx , dobija se

$$\frac{u(x_i, t_0) - u(x_{i-1}, t_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, t_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, t_0} \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, t_0} (\Delta x)^2 - \dots, \quad (3)$$

odnosno,

$$\frac{u(x_i, t_0) - u(x_{i-1}, t_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, t_0} + \varepsilon. \quad (4)$$

Greška odsecanja je

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, t_0} \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, t_0} (\Delta x)^2 + \dots. \quad (5)$$

b) Aproksimacija (1) je prvog reda tačnosti, jer je jedinica najniži eksponent kojim je Δx stepenovano u (5), ili

$$\varepsilon = O(\Delta x). \quad (6)$$

ZADATAK 1.5.

Kojeg najnižeg reda tačnosti mora biti šema da bi bila konzistentna?

Rešenje:

Šema mora biti bar prvog reda tačnosti da bi bila konzistentna.

ZADATAK 1.6.

Polazeći od centralnog količnika konačnih razlika preko dva koraka mreže kao aproksimacije za $\partial u(x, t_0)/\partial x$ i koristeći Tejlorov red za predstavljanje funkcije u u okolini tačke za koju se aproksimacija traži, odrediti

- grešku odsecanja aproksimacije i
- red tačnosti aproksimacije.

Rešenje:

a) Centralni količnik konačnih razlika preko dva koraka mreže predstavlja aproksimaciju izvoda, oblika

$$\frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_{i-1}, t_0)}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, t_0}. \quad (1)$$

Razvojem u Tejlorov red (videti zadatke 1.3 i 1.4), dobija se

$$u(x_{i+1}, t_0) = u(x_i, t_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^3 + \dots, \quad (2)$$

$$u(x_{i-1}, t_0) = u(x_i, t_0) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^3 + \dots \quad (3)$$

Oduzimanjem (3) od (2) sledi

$$\frac{u(x_{i+1}, t_0) - u(x_{i-1}, t_0)}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} + \varepsilon, \quad (4)$$

gde je greška odsecanja data u obliku

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 + \dots \quad (5)$$

Sličan postupak određivanja greške odsecanja može se naći kod Janjića (1993).

b) Centralni količnik konačnih razlika preko dva koraka mreže je drugog reda tačnosti, jer je dvojka najniži eksponent kojim je Δx stepenovano u (5), ili

$$\varepsilon = O[(\Delta x)^2]. \quad (6)$$

ZADATAK 1.7.

Polazeći od centralnog količnika konačnih razlika preko četiri koraka mreže kao aproksimacije za $\partial u(x, t_0)/\partial x$ i koristeći Tejlorov red za predstavljanje funkcije u okolini tačke za koju se aproksimacija traži, odrediti

- grešku odsecanja aproksimacije i
- red tačnosti aproksimacije.

Rešenje:

a) Centralni količnik konačnih razlika preko četiri koraka mreže predstavlja aproksimaciju izvoda, oblika

$$\frac{u(x_{i+2}, t_0) - u(x_{i-2}, t_0)}{4\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0}. \quad (1)$$

Razvoj u Tejlorov red daje

$$u(x_{i+2}, t_0) = u(x_i, t_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} 2\Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} (2\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (2\Delta x)^3 + \dots, \quad (2)$$

$$u(x_{i-2}, t_0) = u(x_i, t_0) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} 2\Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} (2\Delta x)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (2\Delta x)^3 + \dots \quad (3)$$

Oduzimanjem (3) od (2), dobija se

$$\frac{u(x_{i+2}, t_0) - u(x_{i-2}, t_0)}{4\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} + \varepsilon, \quad (4)$$

gde je greška odsecanja data u obliku

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 + \dots \quad (5)$$

Rešenje (5) je identično rezultatu navedenom kod Janjića (1993).

b) Centralni količnik konačnih razlika preko četiri koraka mreže je drugog reda tačnosti, ili

$$\varepsilon = O[(\Delta x)^2]. \quad (6)$$

ZADATAK 1.8.

Napisati aproksimaciju (šemu) za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu zamenjujući izvod po vremenu količnikom unapred, a izvod u prostoru količnikom unazad. Posle toga, odrediti

- grešku odsecanja šeme i
- red tačnosti šeme.

Rešenje:

Jednodimenzionalna linearna advektivna jednačina je data

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

gde su $u = u(x, t)$ i $c = \text{const}$.

a) Šema za (1) ima oblik

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (2)$$

Razvojem u Tejlorov red, može se pisati

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,t_0} \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,t_0} (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{i,t_0} (\Delta t)^3 + \dots, \quad (3)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^3 + \dots \quad (4)$$

Prebacivanjem u (3) prvog člana desne strane na levu stranu i delenjem sa Δt , dobija se

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,t_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,t_0} \Delta t + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{i,t_0} (\Delta t)^2 + \dots \quad (5)$$

Slično, prebacivanjem u (4) prvog člana desne strane na levu stranu, promenom znaka i delenjem sa Δx , dobija se

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,t_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 + \dots \quad (6)$$

Zamenom (5) i (6) u (2), sledi

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \varepsilon = 0, \quad (7)$$

gde je

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,t_0} \Delta t + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{i,t_0} (\Delta t)^2 + \dots + c \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,t_0} \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,t_0} (\Delta x)^2 + \dots \right]. \quad (8)$$

Izrazom (8) je definisana greška odsecanja šeme. Rešenje (8) je identično rezultatu dobijenom kod Mesingera i Arakave (Arakawa), (1976).

b) Ako se red tačnosti šeme definiše kao najniži eksponent kojim su stepenovani koraci mreže u grešci odsecanja, posmatrana šema je prvog reda tačnosti, ili

$$\varepsilon = O(\Delta t) + O(\Delta x). \quad (9)$$

ZADATAK 1.9.

Odrediti parametar α tako da šema

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \alpha f^n + (1 - \alpha) f^{n-1}, \quad (1)$$

bude drugog reda tačnosti, pri čemu je

$$\frac{dU}{dt} = f. \quad (2)$$

Rešenje (Rančić, 1988):

Razvojem u Tejlorov red, dobija se

$$U^{n+1} = U^n + \frac{dU^n}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 U^n}{dt^2} (\Delta t)^2 + O(\Delta t)^3, \quad (3)$$

$$f^{n-1} = f^n - \frac{df^n}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f^n}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots \quad (4)$$

Korišćenjem (3) i (4), količnik konačnih razlika se formira u obliku

$$\frac{1}{\Delta t} \left[U + \frac{dU}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots - U \right] = \alpha f + (1 - \alpha) \left[f - \frac{df}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots \right]. \quad (5)$$

Nakon sređivanja (5), dobija se

$$\frac{dU}{dt} = f - \Delta t \left[(1 - \alpha) \frac{df}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dt^2} \right] + O[(\Delta t)^2]. \quad (6)$$

Iz (6) i korišćenjem (2), greška odsecanja je

$$\varepsilon = \left(\alpha - \frac{3}{2} \right) \Delta t \frac{df}{dt} + O[(\Delta t)^2]. \quad (7)$$

Na osnovu (7) sledi da je šema drugog reda tačnosti ako je

$$\alpha = \frac{3}{2}. \quad (8)$$

Napomena: Ovako se dobija Adams-Bašfortova (Adams-Bashforth) šema (pogledati Glavu 3).

ZADATAK 1.10.

Zadata je aproksimacija jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine u obliku

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i = -c \left[\alpha \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right) + \beta \left(\frac{u_i - u_{i-2}}{2\Delta x} \right) \right]. \quad (1)$$

Odrediti parametre α i β tako da aproksimacija bude drugog reda tačnosti.

Rešenje (Rančić, 1988):

Razvojem u_{i-1} i u_{i-2} u Tejlorov red oko x_i i zamenom tako dobijenih vrednosti u (1), aproksimacija dobija oblik

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i = -c \left\{ \alpha \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots \right] + \beta \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{2\Delta x}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(2\Delta x)^2}{3!} + \dots \right] \right\}. \quad (2)$$

Aproksimacija (2) je drugog reda tačnosti ako je

$$\alpha + \beta = 1, \quad (3)$$

$$\alpha + 2\beta = 0, \quad (4)$$

odakle sledi

$$\alpha = 2, \quad (5)$$

$$\beta = -1. \quad (6)$$

ZADATAK 1.11.

Zadata je aproksimacija jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine u obliku

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -c \left[\alpha \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right) + \beta \left(\frac{u_i - u_{i-2}}{2\Delta x} \right) + \gamma \left(\frac{u_i - u_{i-3}}{3\Delta x} \right) \right]. \quad (1)$$

Odrediti parametre α , β i γ tako da aproksimacija bude trećeg reda tačnosti.

Rešenje (Rančić, 1988):

Razvojem u_{i-1} , u_{i-2} i u_{i-3} u Tejlorov red oko x_i i zamenom tako dobijenih vrednosti u (1), aproksimacija dobija oblik

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -c \left\{ \alpha \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{3!} - \dots \right] + \beta \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(2\Delta x)}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(2\Delta x)^2}{3!} - \dots \right] + \right. \\ \left. + \gamma \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(3\Delta x)}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(3\Delta x)^2}{3!} - \dots \right] \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Aproksimacija (2) je trećeg reda tačnosti ako je

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (3)$$

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0, \quad (4)$$

$$\alpha + 4\beta + 9\gamma = 0. \quad (5)$$

Rešavanjem sistema (3)-(5), tražene vrednosti parametara se dobijaju, redom

$$\alpha = 3, \quad (6)$$

$$\beta = -3, \quad (7)$$

$$\gamma = 1. \quad (8)$$

ZADATAK 1.12.

Dokazati konzistentnost aproksimacije

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Delta t - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) (\Delta t)^2 - \dots + c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) (\Delta x)^2 + \dots \right] = 0, \quad (1)$$

i odrediti na koju se analitičku jednačinu svodi.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Posmatranjem graničnog slučaja

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \left\{ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Delta t - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) (\Delta t)^2 - \dots + c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta x + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) (\Delta x)^2 + \dots \right] \right\} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Aproksimacija (1) se u graničnom slučaju svodi na jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu.

GLAVA 2

STABILNOST

ZADATAK 2.1.

Upotrebom direktnog metoda ispitati stabilnost šeme za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu u obliku

$$u_i^{n+1} = (1 - \mu)u_i^n + \mu u_{i-1}^n, \quad (1)$$

gde su $\mu = c \Delta t / \Delta x$ i $1 - \mu \geq 0$.

Rešenje:

Polazeći od pretpostavke da je analitičko rešenje jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine ograničeno, dovoljno je ispitati ograničenost numeričkog rešenja. Koristeći relacije

$$A = B + C, \quad (2)$$

$$|A| \leq |B| + |C|, \quad (3)$$

i znajući da je $1 - \mu \geq 0$, (1) se može napisati

$$|u_i^{n+1}| \leq (1 - \mu)|u_i^n| + \mu|u_{i-1}^n|. \quad (4)$$

Obeležavajući maksimalne vrednosti numeričkih rešenja u tačkama mreže $i\Delta x$ na vremenskim nivoima $(n+1)\Delta t$ i $n\Delta t$ sa $\text{Max}_i|u_i^{n+1}|$ i $\text{Max}_i|u_i^n|$, i zamenom maksimalnih vrednosti u (4), dobija se

$$\text{Max}_i|u_i^{n+1}| \leq \text{Max}_i|u_i^n|. \quad (5)$$

Pošto je numeričko rešenje na prognostičkom nivou $(n+1)\Delta t$ manje ili jednako od rešenja na aktuelnom nivou $n\Delta t$, ograničenost (stabilnost) numeričkog rešenja u_i^n je dokazana. Znači, šema (1) je stabilna kada je $1 - \mu \geq 0$. Ovde navedeni postupak rešavanja je zasnovan na sličnom razmatranju kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 2.2.

Upotrebom energetskeg metoda ispitati stabilnost šeme za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu u obliku

$$u_i^{n+1} = (1-\mu)u_i^n + \mu u_{i-1}^n, \quad (1)$$

gde su $\mu = c \Delta t / \Delta x$ i $1-\mu \geq 0$.

Rešenje (Mesinger i Arakava, 1976):

Polazeći od pretpostavke da je rešenje jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine ograničeno, treba proveriti da li je suma kvadrata numeričkog rešenja u svim tačkama mreže i na svim nivoima vremena, takođe, ograničena. Ako jeste, može se smatrati da je i svaka vrednost u_i^n ograničena, iz čega proizilazi da je šema stabilna.

Kvadriranjem i sumiranjem (1) preko svih i , dobija se

$$\sum_i (u_i^{n+1})^2 = \sum_i \left[(1-\mu)^2 (u_i^n)^2 + 2\mu(1-\mu)u_i^n u_{i-1}^n + \mu^2 (u_{i-1}^n)^2 \right]. \quad (2)$$

Korišćenjem cikličnih graničnih uslova, tj. pretpostavljajući da su vrednosti na krajevima domena integracije u_{i-1} i u_i jednake, može se napisati

$$\sum_i (u_{i-1}^n)^2 = \sum_i (u_i^n)^2. \quad (3)$$

Na osnovu Švarcove¹ (Schwarz) nejednačine sledi

$$\sum_i u_i^n u_{i-1}^n \leq \sqrt{\sum_i (u_i^n)^2} \sqrt{\sum_i (u_{i-1}^n)^2}. \quad (4)$$

Zamenom (3) u drugi množilac na desnoj strani (4), dobija se

$$\sum_i u_i^n u_{i-1}^n \leq \sum_i (u_i^n)^2. \quad (5)$$

Smenom (5) i (3) u drugi i treći član na desnoj strani (2), nastaje

$$\sum_i (u_i^{n+1})^2 \leq \left[(1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu) + \mu^2 \right] \sum_i (u_i^n)^2, \quad (6)$$

a nakon sređivanja se svodi na

¹

$$\sum xy \leq \sqrt{\sum x^2} \sqrt{\sum y^2}$$

$$\sum_i (u_i^{n+1})^2 \leq \sum_i (u_i^n)^2. \quad (7)$$

Šema je stabilna kada je $1 - \mu \geq 0$ pri cikličnim graničnim uslovima.

ZADATAK 2.3.

Upotrebom Fon Nojmanovog (Von Neumann) metoda odrediti uslov za stabilnost šeme, gde su $U^0, U^1, \dots, U^n, U^{n+1}, \dots$ amplitude numeričkih rešenja na vremenskim nivoima $0, 1, \dots, n, n+1, \dots$, redom.

Rešenje:

Faktor povećanja (pojačanja) $|\lambda|$ se definiše izrazom

$$|U^{n+1}| = |\lambda| |U^n|, \quad (1)$$

odnosno

$$|U^n| = |\lambda|^n |U^{(0)}|. \quad (2)$$

Polazeći od pretpostavke da je analitičko rešenje ograničeno, dovoljno je ispitati ograničenost numeričkog rešenja, odnosno zahtevati uslov

$$|U^n| < B, \quad (3)$$

gde je B neki konačan broj. Zamenom (2) u (3) za faktor povećanja se dobija

$$|\lambda|^n < B', \quad (4)$$

gde je $B' = B / |U^{(0)}|$. Logaritmovanjem (4) i stavljanjem

$$n = \frac{t}{\Delta t}, \quad (5)$$

dobija se

$$\ln|\lambda| < \frac{B'}{t} \Delta t, \quad (6)$$

gde je $B'' = \ln B'$. Uvodeći pretpostavku da numeričko rešenje mora biti ograničeno u konačnom vremenu t , sledi da i faktor B''/t mora, takođe, imati ograničenu vrednost, odnosno

$$\ln|\lambda| \leq O(\Delta t). \quad (7)$$

Uvodeći malu vrednost δ , može se napisati

$$|\lambda| = 1 + \delta. \quad (8)$$

Vraćanjem (8) u (7) i razvojem tako dobijenog izraza u Tejlorov red, dobija se

$$\ln(1 + \delta) \approx \delta. \quad (9)$$

Potreban uslov za stabilnost postaje

$$\delta \leq O(\Delta t), \quad (10)$$

što je ekvivalentno zahtevu

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t), \quad (11)$$

ili

$$|\lambda| \leq 1. \quad (12)$$

Ovde prikazani generalizovani postupak može se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 2.4.

Upotrebom Fon Nojmanovog metoda ispitati stabilnost šeme za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu u obliku

$$u_i^{n+1} = (1 - \mu)u_i^n + \mu u_{i-1}^n, \quad (1)$$

gde su $\mu = c \Delta t / \Delta x$ i $1 - \mu \geq 0$.

Rešenje (Mesinger i Arakava, 1976):

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku

$$u_i^n = U^n e^{iki\Delta x}, \quad (2)$$

gde je k talasni broj u x pravcu, šema za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu postaje

$$U^{n+1} = (1 - \mu)U^n + \mu U^n e^{-ik\Delta x}. \quad (3)$$

Znajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (4)$$

iz (3) za faktor povećanja se dobija

$$\lambda = 1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta x}, \quad (5)$$

ili

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x). \quad (6)$$

Iz uslova za stabilnost sledi

$$2\mu(1-\mu)(1-\cos k\Delta x) \geq 0, \quad (7)$$

odnosno, dovoljan uslov za stabilnost je

$$\mu \leq 1 \text{ i } \mu \geq 0. \quad (8)$$

ZADATAK 2.5.

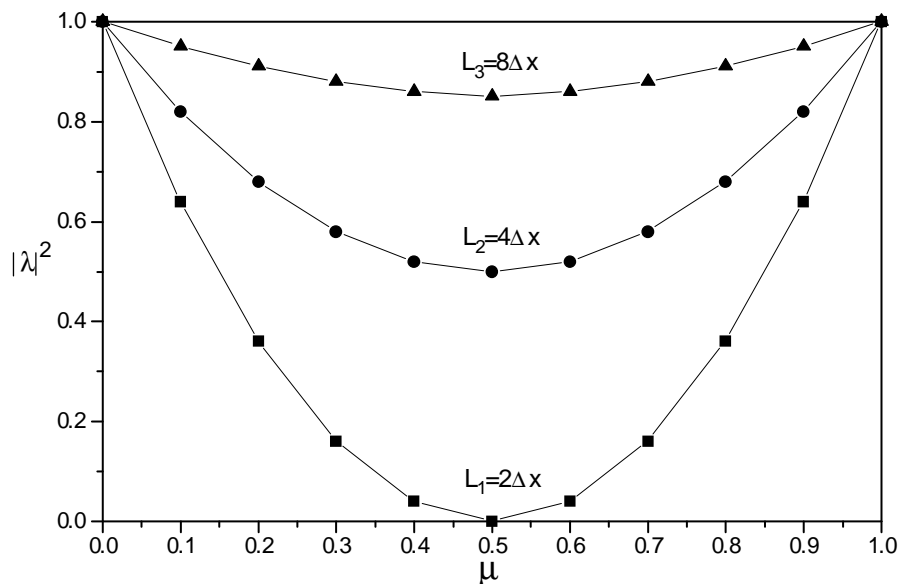
Primenom Fon Nojmanovog metoda na neku šemu za faktor povećanja se dobija

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1-\mu)(1-\cos k\Delta x), \quad (1)$$

gde su $\mu = c\Delta t/\Delta x$ i $0 \leq \mu \leq 1$. Analitički ispitati (1) u zavisnosti od μ za talasne brojeve, $L_1 = 2\Delta x$, $L_2 = 4\Delta x$ i $L_3 = 8\Delta x$, i grafički prikazati ovu zavisnost.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Parabola (1) za tri talasne dužine ($L_1 = 2\Delta x$, $L_2 = 4\Delta x$ i $L_3 = 8\Delta x$) prikazana je na Slici 1. Ona ima minimum u tački $\mu = 1/2$ nezavisno od vrednosti talasnih brojeva. Uočava se da porastom talasnih brojeva amortizacija raste. Za $\mu = 0$ i $\mu = 1$, šema je neutralna, dok je amortizujuća za $\mu < 1$.



Slika 1. Grafik zavisnosti $|\lambda|^2$ od μ za $L_1 = 2\Delta x$, $L_2 = 4\Delta x$ i $L_3 = 8\Delta x$.

ZADATAK 2.6.

Primenom Fon Nojmanovog metoda na neku šemu za faktor povećanja se dobija

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x), \quad (1)$$

gde su $\mu = c \Delta t / \Delta x$ i $0 \leq \mu \leq 1$. Napisati program u FORTRANu za izračunavanje $|\lambda|^2$ kada su poznate vrednosti μ i na osnovu dobijenih rezultata nacrtati grafike zavisnosti $|\lambda|^2$ od μ za talasne dužine $L_1 = 2\Delta x$, $L_2 = 4\Delta x$ i $L_3 = 8\Delta x$.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Primer programa u FORTRANu za izračunavanje $|\lambda|^2$ dat je u Lisitngu 1.

```

C      *****
C      *
C      *      PROGRAM ZA IZRACUNAVANJE STABILNOSTI
C      *
C      *      PROGRAMERI: I.A.TOSIC i M.B.GAVRILOV, BEOGRAD, 1997
C      *
C      *****
C
C      PROGRAM STABILNOST
C      REAL MI
C      DIMENSION AL(11,4), MI(11)
C      OPEN (UNIT=10, FILE='LAMBDA.DAT')
C
C      PI=3.1415967
C
C      DO 20 J=1,4
C          DO 20 I=0,10
C              MI(I)=I*0.1
C              AL(I,J)=1.-2.*MI(I)*(1.-MI(I))*(1.-COS(PI/J))
20    CONTINUE
C
C      DO 30 I=0,10
C          WRITE (11,40) MI(I),AL(I,1),AL(I,2),AL(I,4)
40    FORMAT (F5.1,3(2X,F5.2))
30    CONTINUE
C
C      CLOSE(UNIT=10)
C
C      END

```

Listing 1. Program u FORTRANu za izračunavanje $|\lambda|^2$ od μ .

Grafik zavisnosti $|\lambda|^2$ od μ za talasne dužine $L_1 = 2\Delta x$, $L_2 = 4\Delta x$ i $L_3 = 8\Delta x$ dobijen upotrebom programa u FORTRANu je prikazan na Slici 1.

GLAVA 3

VREMENSKE ŠEME

3.1 ŠEME PRIMENJENE NA OSCILATORNU JEDNAČINU

ZADATAK 3.1.

Upotrebom Fon Nojmanovog metoda na primeru oscilatorne jednačine ispitati stabilnost:

- a) Ojlerove (Euler) ili šeme unapred;
- b) šeme unazad;
- c) trapezoidne šeme;
- d) Matsunove (Matsuno) šeme; i
- e) Hjunove (Heun) šeme.

Rešenje (Mesinger i Arakava, 1976):

Oscilatorna jednačina se može napisati

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U, \quad (1)$$

gde su $U = U(t)$ i $p = \omega\Delta t$.

- a) Ojlerova ili šema unapred primenjena na (1) ima oblik

$$U^{n+1} = U^n + ipU^n. \quad (2)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (3)$$

za faktor povećanja iz (2) se dobija

$$\lambda = 1 + ip, \quad (4)$$

$$|\lambda| = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Pretpostavljajući da je p relativno malo i razvojem desne strane (5) u Tejlorov red, sledi

$$|\lambda| = 1 + \frac{p^2}{2} + \dots, \quad (6)$$

odnosno, Ojlerova šema je uvek nestabilna.

b) Šema unazad primenjena na (1) daje

$$U^{n+1} = U^n + ipU^{n+1}. \quad (7)$$

Koristeći (3) za faktor povećanja iz (7) se dobija

$$\lambda = \frac{1+ip}{1+p^2}, \quad (8)$$

$$|\lambda| = (1+p^2)^{-1/2}. \quad (9)$$

Šema unazad je uvek stabilna i amortizujuća.

c) Trapezoidna šema u slučaju oscilatorne jednačine ima oblik

$$U^{n+1} = U^n + ip \frac{1}{2} (U^n + U^{n+1}), \quad (10)$$

a faktor povećanja je

$$\lambda = \frac{1-p^2/4+ip}{1+p^2/4}, \quad (11)$$

$$|\lambda| = 1. \quad (12)$$

Trapezoidna šema je uvek neutralna.

d) Matsunova šema na primeru oscilatorne jednačine dobija oblik

$$U^{(n+1)*} = U^n + ipU^n, \quad (13)$$

$$U^{n+1} = U^n + ipU^{(n+1)*}. \quad (14)$$

U ovom slučaju, faktor povećanja je

$$\lambda = 1 - p^2 + ip, \quad (15)$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 - (p^2 - p^4)}. \quad (16)$$

Matsunova šema je stabilna za $|p| \leq 1$, odnosno, mora biti

$$\Delta t \leq \frac{1}{|\omega|}. \quad (17)$$

e) Hjunova šema daje

$$U^{(n+1)*} = U^n + ipU^n, \quad (18)$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{2} ip (U^n + U^{(n+1)*}). \quad (19)$$

Faktor povećanja je

$$\lambda = 1 - \frac{p^2}{2} + ip, \quad (20)$$

$$|\lambda| = \left(1 + \frac{1}{4}p^4\right)^{1/2}. \quad (21)$$

Za malo p i razvojem desne strane (21) u Tejlorov red, dobija se

$$|\lambda| = 1 + \frac{p^4}{8} + \dots \quad (22)$$

Hjunova šema je uvek nestabilna. Međutim, pošto je greška odsecanja ove šeme četvrtog reda tačnosti, ili

$$\varepsilon = O[(\Delta t)^4], \quad (23)$$

Hjunova šema proizvodi slabu nestabilnost.

ZADATAK 3.2.

Na primeru oscilatorne jednačine ispitati relativnu promenu faze, θ/p , u slučaju:

- Ojlerove ili šeme unapred;
- šeme unazad; i
- trapezoidne šeme.

Rešenje:

Opšta aproksimacija za oscilatornu jednačinu (1) iz zadatka 3.1 u slučaju Ojlerove šeme, šeme unazad i trapezoidne šeme ima oblik

$$U^{n+1} = U^n + ip(\alpha U^n + \beta U^{n+1}), \quad (1)$$

gde parametri α i β zadovoljavaju uslov

$$\alpha + \beta = 1. \quad (2)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (3)$$

za realni i imaginarni deo faktora povećanja se dobija

$$\lambda_{RE} = \frac{1 - \alpha\beta p^2}{1 + \beta^2 p^2}, \quad (4)$$

$$\lambda_{IM} = \frac{p}{1 + \beta^2 p^2}. \quad (5)$$

Znajući da se promena faze numeričkog rešenja po jednom koraku u vremenu može napisati

$$\theta = \arctan \frac{\lambda_{IM}}{\lambda_{RE}}, \quad (6)$$

iz (4) i (5) se dobija

$$\theta = \arctan \frac{p}{1 - \alpha\beta p^2}, \quad (7)$$

dok je promena faze tačnog rešenja po jednom koraku u vremenu definisana

$$p = \omega\Delta t. \quad (8)$$

Pošto je relativna promena faze data odnosom (7) i (8)

$$r = \frac{\theta}{p}, \quad (9)$$

u konkretnom slučaju se dobija

$$r = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \alpha\beta p^2}. \quad (10)$$

Za male vrednosti p izraz (10) se može razvojem u Tejlorov red dovesti u oblik

$$r \approx \frac{1}{p} \left\{ p \left[\frac{1}{1 - \alpha\beta p^2} \right] - \frac{p^3}{3} \left[\frac{1}{(1 - \alpha\beta p^2)^3} \right] \right\}. \quad (11)$$

Nakon sređivanja članova u uglastim zagradama² u (11), konačno, opšti izraz za relativnu promenu faze postaje

²Uvodeći da je $x = \alpha\beta p^2$, opšta formula za članove u uglastim zagradama izraza (11) u zadatku 3.2 ima oblik

$$(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-x)^n. \quad (1)$$

Pošto važi

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}, \quad (2)$$

analogno, u slučaju negativne vrednosti k , dobija se

$$\binom{-k}{n} = \frac{(-k)!}{n!(-k-n)!}. \quad (3)$$

Posmatraće se slučajevi:

a) kada je $k = 1$, izraz (1) postaje

$$r \approx 1 + \left(\alpha\beta - \frac{1}{3} \right) p^2. \quad (12)$$

a) Kada je $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, izraz (1) se svodi na Ojlerovu šemu, a (12) postaje

$$r \approx 1 - \frac{1}{3} p^2. \quad (13)$$

b) Zamenivši $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, šema (1) prelazi u šemu unazad, a (12) dobija oblik

$$r \approx 1 - \frac{1}{3} p^2. \quad (14)$$

c) U uslovima kada je $\alpha \equiv \beta = 1/2$ izraz (1) daje trapezoidnu šemu, a (12) ima oblik

$$r \approx 1 - \frac{1}{12} p^2. \quad (15)$$

Pošto je r uvek manje od jedan, sve tri šeme su usporavajuće. Slična razmatranja za dobijanje (13), (14) i (15) mogu se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 3.3.

Na primeru oscilatorne jednačine ispitati relativnu promenu faze, θ/p , koristeći:

a) Matsunovu šemu i

b) Hjunovu šemu.

Rešenje:

Opšta aproksimacija oscilatorne jednačine u slučaju Matsunove i Hjunove šeme ima oblik

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + \dots, \quad (4)$$

gde su

$$\binom{-1}{0} = \frac{(-1)!}{0!(-1)!} = 1, \quad (5)$$

$$\binom{-1}{1} = \frac{(-1)!}{1!(-2)!} = -1; \quad (6)$$

b) kada je $k = 3$, izraz (1) postaje

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-x)^n = \binom{-3}{0} (-x)^0 + \binom{-3}{1} (-x)^1 + \dots, \quad (7)$$

odnosno,

$$(1-x)^{-3} = 1 + 3x + \dots \quad (8)$$

$$U^{(n+1)*} = U^n + ipU^n, \quad (1)$$

$$U^{n+1} = U^n + ip(\alpha U^n + \beta U^{(n+1)*}), \quad (2)$$

gde parametri α i β zadovoljavaju uslov

$$\alpha + \beta = 1. \quad (3)$$

Za realni i imaginarni deo faktora povećanja se dobija

$$\lambda_{RE} = 1 - \beta p^2, \quad (4)$$

$$\lambda_{IM} = p. \quad (5)$$

Promena faze numeričkog rešenja po jednom koraku u vremenu može se napisati

$$\theta = \arctan \frac{p}{1 - \beta p^2}. \quad (6)$$

Razvojem (6) u Tejlorov red za male vrednosti p i korišćenjem definicije (videti zadatak 3.2) za relativnu promenu faze r se dobija

$$r \approx \frac{1}{p} \left\{ p \left[\frac{1}{1 - \beta p^2} \right] - \frac{p^3}{3} \left[\frac{1}{(1 - \beta p^2)^3} \right] \right\}. \quad (7)$$

Nakon sređivanja članova u uglastim zagradama² u (7), konačno, opšti izraz za relativnu promenu faze postaje

$$r \approx 1 + \left(\beta - \frac{1}{3} \right) p^2. \quad (8)$$

a) Kada je $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, izrazi (1) i (2) se svode na Matsunovu šemu, a opšti izraz (8) za relativnu promenu faze ima oblik

$$r \approx 1 + \frac{2}{3} p^2. \quad (9)$$

b) Zamenjujući $\alpha \equiv \beta = 1/2$ u (8), relativna promena faze za Hjunovu šemu dobija oblik

$$r \approx 1 + \frac{1}{6} p^2. \quad (10)$$

Pošto je r u oba slučaja veće od jedan, šeme su ubrzavajuće, ali je Hjunova šema manje ubrzavajuća. Slična razmatranja za dobijanje (9) i (10) mogu se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 3.4.

Šema za diferenciranje po vremenu primenjena na oscilatornu jednačinu ima oblik

$$U^{n+1/2} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t f^n, \quad (1)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t f^{n+1/2}. \quad (2)$$

Kada je Δt malo, odrediti:

- faktor povećanja upotrebom Fon Nojmanovog metoda i
- relativnu promenu faze.

Rešenje:

- Zamenjujući (2) u (1) i primenom Fon Nojmanovog metoda, za faktor povećanja se dobija

$$\lambda = 1 - \frac{p^2}{2} + ip. \quad (3)$$

- Pošto se realni i imaginarni delovi od (3) mogu napisati

$$\lambda_{RE} = 1 - \frac{p^2}{2}, \quad (4)$$

$$\lambda_{IM} = p, \quad (5)$$

za relativnu promenu faze se dobija

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{p^2}{2}}. \quad (6)$$

Razvojem u Tejlorov red argumenta funkcije \arctan za male vrednosti p , izraz (6) konačno postaje

$$\frac{\theta}{p} = 1 + \frac{p^2}{6} + \dots \quad (7)$$

Rezultati (3) i (7) se mogu naći kod Rančića (1988).

ZADATAK 3.5.

Šema za diferenciranje po vremenu primenjena na oscilatornu jednačinu ima oblik

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t \frac{1}{2} \left[f^n + \frac{1}{2} (f^{n-1} + f^{n+1}) \right]. \quad (1)$$

Kada je Δt malo, odrediti izraze za:

- faktor povećanja upotrebom Fon Nojmanovog metoda i
- relativnu promenu faze.

Rešenje (Rančić, 1988):

- Primenom Fon Nojmanovog metoda (1) se može napisati

$$U^{n+1} = U^{n-1} + ip \left[U^n + \frac{1}{2} (U^{n-1} + U^{n+1}) \right], \quad (2)$$

gde je $p = \omega\Delta t$. Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (3)$$

jednačina za faktor povećanja ima oblik

$$\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2} ip \right) - ip\lambda - \left(1 + \frac{1}{2} ip \right) = 0. \quad (4)$$

Rešavanjem (4) se dobija

$$\lambda_1 = \frac{ip + 2}{2 - ip}, \quad (5)$$

$$\lambda_2 = \frac{ip - 2}{2 - ip}. \quad (6)$$

Kada $p \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 1$, a $\lambda_2 \rightarrow -1$. Rešenje povezano sa λ_1 je fizičko rešenje, a rešenje povezano sa λ_2 je računsko rešenje. Šema je neutralna, jer je

$$|\lambda_1| \equiv |\lambda_2| = 1. \quad (7)$$

- Realni i imaginarni delovi fizičkog (5) i računskog (6) rešenja su, redom

$$\lambda_{1RE} = \frac{4 - p^2}{4 + p^2}, \quad (8)$$

$$\lambda_{1IM} = \frac{4p}{4 + p^2}, \quad (9)$$

$$\lambda_{2RE} = -1, \quad (10)$$

$$\lambda_{2IM} = 0. \quad (11)$$

Formiranjem od (8)-(11) izraza za relativnu promenu faze³ fizičkog, r_1 , i računskog, r_2 , rešenja, konačno se dobija

$$r_1 \approx 1 - \frac{1}{12} p^2, \quad (12)$$

$$r_2 \approx 0. \quad (13)$$

Dakle, šema je usporavajuća.

ZADATAK 3.6.

Dokazati da postoji identičnost u izrazima za faktor povećanja, $|\lambda|$, kod šeme unazad i Matsunove šeme u slučaju malih vrednosti promene faze tačnog rešenja, $p = \omega\Delta t$.

Rešenje (Rančić, 1988):

Faktori povećanja $|\lambda|_U$ i $|\lambda|_M$ za šemu unazad i Matsunovu šemu (videti zadatak 3.1) imaju oblik, redom

$$|\lambda|_U = (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

$$|\lambda|_M = \left[1 - (p^2 - p^4)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

³ Razvojem u Tejlorov red izraza za relativnu promenu faze fizičkog i računskog rešenja se dobija

$$r = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]} - \frac{1}{3} \frac{p^2}{\left[1 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]^3} + \dots,$$

$$r = \left[1 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \dots\right] - \frac{1}{3} p^2 \left[1 + 3\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \dots\right].$$

Za male vrednosti p izrazi (1)⁴ i (2)⁵ se mogu napisati

$$|\lambda|_U = 1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{8}p^4, \quad (3)$$

$$|\lambda|_M = 1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{8}p^4. \quad (4)$$

Zbog identičnosti izraza (3) i (4) sledi da se šema unazad i Matsunova šema ponašaju na isti način za male vrednosti p .

⁴ Razvojem (1) iz zadatka 3.6 u Tejlorov red, može se pisati

$$(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} p^{2n}. \quad (1)$$

Izračunavanjem vrednosti

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots}{1\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots} = -\frac{1}{2}, \quad (2)$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots}{2\left(-\frac{5}{2}\right)\dots} = \frac{3}{8}, \quad (3)$$

i njihovom zamenom u (1), konačno se dobija

$$(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{8}p^4. \quad (4)$$

⁵ Uvodeći da je

$$x = p^4 - p^2, \quad (1)$$

i razvojem (2) iz zadatka 3.6 u Tejlorov red, može se pisati

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, \quad (2)$$

odnosno, vraćanjem (1) u (2), konačno se dobija

$$(1+p^4-p^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{8}p^4 - \dots. \quad (3)$$

ZADATAK 3.7.

Ispitati prirodu i stabilnost numeričkog rešenja preskočne šeme primenjene na oscilatornu jednačinu upotrebom Fon Nojmanovog metoda. Analizirati dobijene rezultate za različite vrednosti p .

Rešenje:

Preskočna šema primenjena na oscilatornu jednačinu glasi

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2ipU^n. \quad (1)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (2)$$

za faktor povećanja se dobija

$$\lambda^2 - 2ip\lambda - 1 = 0. \quad (3)$$

Rešenja (3) su

$$\lambda_1 = ip + \sqrt{1 - p^2}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = ip - \sqrt{1 - p^2}. \quad (5)$$

Kada $p \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 1$, a $\lambda_2 \rightarrow -1$. Rešenje povezano sa λ_1 je fizičko rešenje, a rešenje povezano sa λ_2 je računsko rešenje.

Posmatraće se dva slučaja.

i) Kada je $p \leq 1$, (4) i (5) se mogu napisati

$$|\lambda|^2 = 1, \quad (6)$$

odnosno, šema je neutralna, kako za fizičko, tako i za računsko rešenje.

ii) Kada je $p > 1$, (4) i (5) se mogu napisati, redom

$$\lambda_1 = i\left(p + \sqrt{p^2 - 1}\right), \quad (7)$$

$$\lambda_2 = i\left(p - \sqrt{p^2 - 1}\right). \quad (8)$$

Od (7) i (8) se dobija

$$|\lambda_1| = \left|p + \sqrt{p^2 - 1}\right|, \quad (9)$$

$$|\lambda_2| = \left| p - \sqrt{p^2 - 1} \right|, \quad (10)$$

odnosno,

$$|\lambda_1| > 1, \quad (11)$$

$$|\lambda_2| < 1. \quad (12)$$

Vidi se da je fizičko rešenje povezano sa (11) nestabilno, dok je računsko rešenje povezano sa (12) amortizujuće. Razmatranje slično ovom može se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 3.8.

Ispitati prirodu i stabilnost numeričkog rešenja Adams-Bašfortove šeme primenjene na oscilatornu jednačinu upotrebom Fon Nojmanovog metoda.

Rešenje:

Adams-Bašfortova šema primenjena na oscilatornu jednačinu ima oblik

$$U^{n+1} = U^n + ip \left(\frac{3}{2} U^n - \frac{1}{2} U^{n-1} \right). \quad (1)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (2)$$

za faktor povećanja se dobija

$$\lambda^2 - \left(1 + \frac{3}{2} ip \right) \lambda + \frac{1}{2} ip = 0. \quad (3)$$

Rešenja (3) su

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} ip + \sqrt{1 - \frac{9}{4} p^2 + ip} \right), \quad (4)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} ip - \sqrt{1 - \frac{9}{4} p^2 + ip} \right). \quad (5)$$

Kada $p \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 1$, a $\lambda_2 \rightarrow 0$. Rešenje povezano sa λ_1 je fizičko rešenje, a rešenje povezano sa λ_2 je računsko rešenje. Pošto je računsko rešenje amortizovano, smatra se da je to dobra osobina Adams-Bašfortove šeme.

Analiza $|\lambda|$ za sve vrednosti p je složena zbog kvadratnog korena u (4) i (5). Zbog toga će se razmatrati samo slučaj kada je p relativno malo. Izrazi⁶ (4) i (5) se tada mogu pisati

$$\lambda_1 = 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}ip^3 - \frac{1}{8}p^4 + \dots, \quad (6)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}ip + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}ip^3 + \frac{1}{8}p^4 - \dots \quad (7)$$

Nakon grupisanja, izrazi (6) i (7) dobijaju oblik

$$\lambda_1 = \left(1 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{8}p^4 - \dots\right) + i\left(p + \frac{1}{4}p^3 + \dots\right), \quad (8)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}p^4 + \dots\right) + i\left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^3 - \dots\right), \quad (9)$$

odakle se izračunavanjem dobija

$$|\lambda_1| = \left(1 + \frac{1}{2}p^4 + \dots\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

$$|\lambda_2| = \left(\frac{1}{4}p^2 + \dots\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Zanemarujući izostavljene članove u (10) i (11), zbog njihovog malog uticaja na analizu stabilnosti, ponovnim razvojem u Tejlorov red tako formiranih izraza, dobija se

$$|\lambda_1| = 1 + \frac{1}{4}p^4 + \dots, \quad (12)$$

$$|\lambda_2| = \frac{1}{2}p + \dots \quad (13)$$

Fizičko rešenje povezano sa (12) je nestabilno. Pošto je greška odsecanja četvrtog reda tačnosti, ili

⁶ Uvodeći da je

$$x = -\frac{9}{4}p^2 + ip, \quad (1)$$

i razvojem u Tejlorov red članova koji sadrže koren u (4) i (5) iz zadatka 3.8, može se napisati

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, \quad (2)$$

odnosno, konačno se dobija

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4. \quad (3)$$

$$\varepsilon = O\left[(\Delta x)^4\right] \quad (14)$$

Adams-Bašfortova šema proizvodi slabu nestabilnost, dok računsko rešenje ne raste tokom vremena. Razmatranje slično ovom može se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 3.9.

Napisati program u FORTRANu za računanje i grafičko prikazivanje $|\lambda|$ u funkciji od p , na primeru oscilatorne jednačine za:

- Ojlerovu ili šemu unapred;
- šemu unazad;
- trapezoidnu šemu;
- Matsunovu šemu; i
- Hjunovu šemu.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Faktori povećanja za tražene šeme (videti zadatak 3.1) dati su redom

a)

$$|\lambda| = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}},$$

b)

$$|\lambda| = (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}},$$

c)

$$|\lambda| = 1,$$

d)

$$|\lambda| = \left[1 - (p^2 - p^4)\right]^{\frac{1}{2}},$$

e)

$$|\lambda| = \left(1 + \frac{1}{4}p^4\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Primer programa u FORTRANu za izračunavanje $|\lambda|$ dat je u Listingu 2. Izračunavanje je obavljeno u intervalu $0 \leq p \leq 1.4$, pri čemu je $\Delta p = 0.1$.

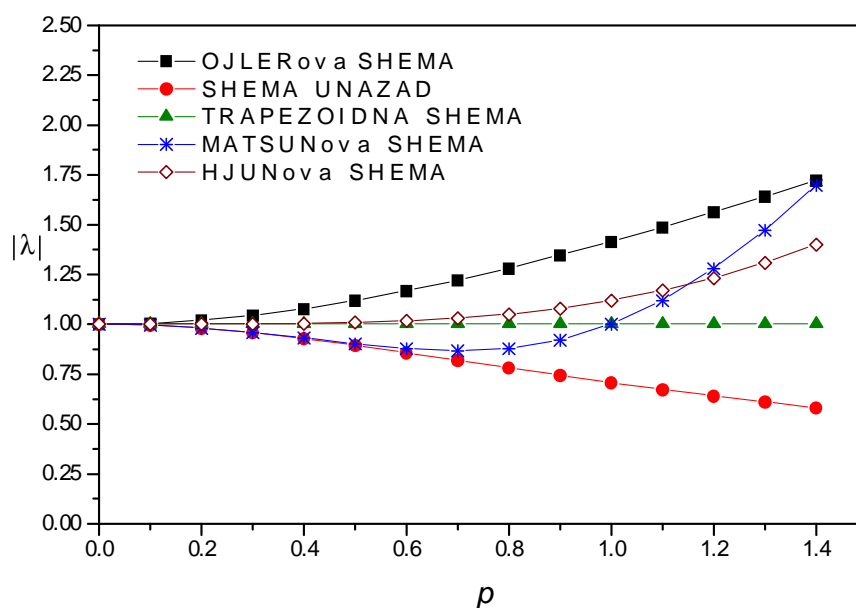
```

C *****
C *
C *   PROGRAM ZA IZRACUNAVANJE STABILNOSTI VREMENSKIH SEMA   *
C *   ZA RAZLICITE VREDNOSTI DT I W=CONST                     *
C *
C *   OZNAKE FAKTORA POVECANJA                                 *
C *   OL = OJLER UNAPRED                                       *
C *   UL = UNAZAD                                             *
C *   TL = TRAPEZOIDNA                                         *
C *   HL = HJUNOVA                                            *
C *   ML = MATSUNOVA SHEMA                                    *
C *
C *   PROGRAMERI: I.A. TOSIC i M.B. GAVRILOV, BEOGRAD, 1997  *
C *
C *****
C PROGRAM SHEMA
C
C PARAMETER (W=10E-4, DT=1.)
C REAL ML
C OPEN (UNIT=9, FILE='lambda.dat')
C
C DO 10 I=0,10000,100
C   P = W*DT*I
C   OL = SQRT(1.+P**2)
C   UL = 1./SQRT(1.+P**2)
C   TL = 1.
C   ML = SQRT(1.-P**2+P**4)
C   HL = SQRT(1.+25*P**4)
C   IF (P.GT.1.5) GO TO 10
C   WRITE (9,20) P, OL, UL, TL, ML, HL
20   FORMAT (6(F10.8,1X))
10 CONTINUE
C
C END

```

Listing 2. Program u FORTRANu za izračunavanje $|\lambda|$ u funkciji od p .

Na osnovu zadatih i izračunatih podataka upotrebom programa u FORTRANu traženi grafički prikazi dati su na Slici 2.



Slika 2. Grafik zavisnosti $|\lambda|$ od p kada je $0 \leq p \leq 1.4$.

ZADATAK 3.10.

Odrediti intervale frekvencije u kojima amortizujući uticaj Matsunove šeme primenjene na oscilatornu jednačinu raste/opada kada je $0 \leq p \leq 1$ i grafički prikazati dobijene rezultate.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Faktor povećanja za Matsunovu šemu ima oblik (videti zadatak 3.1)

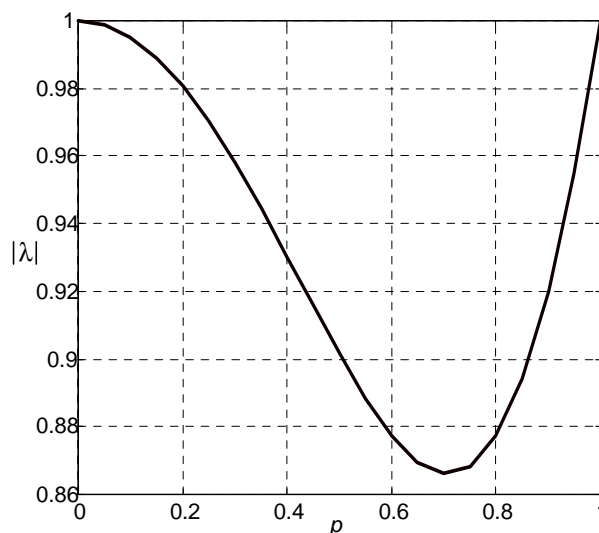
$$|\lambda| = \left[1 - (p^2 - p^4) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Iz zahteva za ekstremnu vrednost izraza (1), dobija se uslov

$$\frac{p(1-2p^2)}{\sqrt{1-p^2+p^4}} = 0. \quad (2)$$

Na osnovu (2) sledi da (1) ima minimum kada je $p \equiv p_{\min} = \pm 1/\sqrt{2}$. Dalje, analizom (2) može se ustanoviti da je Matsunova šema amortizujuća u intervalu $0 < p < 1$, dok je neutralna u tačkama $p = 0$ i $p = 1$. Međutim, porastom frekvencije amortizujući uticaj šeme raste u intervalu $0 < p < p_{\min}$, opada u intervalu $p_{\min} < p < 1$, dok u tački $p = p_{\min}$ amortizacija ima maksimalni efekat.

Na osnovu analize, grafik zavisnosti $|\lambda|$ od p ima izgled kao na Slici 3.



Slika 3. Grafik zavisnosti $|\lambda|$ od p za Matsunovu šemu, kada je $0 \leq p \leq 1$.

3.2 ŠEME PRIMENJENE NA JEDNAČINU TRENJA

ZADATAK 3.11.

Na primeru jednačine trenja ispitati stabilnost upotrebom Fon Nojmanovog metoda, koristeći:

- Ojlerovu ili šemu unapred;
- šemu unazad; i
- trapezoidnu šemu.

Rešenje:

Jednačina trenja ima oblik

$$\frac{dU}{dt} = -\kappa U, \quad (1)$$

gde je $U = U(t)$, a $\kappa > 0$.

Opšti izraz jednačine trenja u slučaju Ojlerove šeme, šeme unazad i trapezoidne šeme može se napisati

$$U^{n+1} = U^n - \kappa \Delta t (\alpha U^n + \beta U^{n+1}), \quad (2)$$

gde parametri α i β zadovoljavaju uslov

$$\alpha + \beta = 1. \quad (3)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (4)$$

opšti izraz za faktor povećanja ima oblik

$$\lambda = \frac{1 - \alpha K}{1 + \beta K}, \quad (5)$$

gde je $K = \kappa \Delta t$.

a) Kada je $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, izraz (2) se svodi na Ojlerovu šemu, a za faktor povećanja iz (5) se dobija

$$\lambda = 1 - K. \quad (6)$$

Ojlerova šema je stabilna kada je

$$|1 - K| < 1, \quad (7)$$

odnosno,

$$0 < K < 2. \quad (8)$$

Da rešenje ne bi menjalo znak od koraka do koraka u vremenu, potrebno je da bude $K < 1$.

b) Zamenjujući $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ u (5), faktor povećanja za šemu unazad ima oblik

$$\lambda = \frac{1}{1+K}. \quad (9)$$

Kada je $K > 0$, šema unazad je uvek stabilna, a rešenje nikada ne menja znak.

c) U slučaju kada je $\alpha \equiv \beta = 1/2$ izraz (5) se svodi na faktor povećanja trapezoidne šeme

$$\lambda = \frac{2-K}{2+K}. \quad (10)$$

Ponovo, ako je $K > 0$ trapezoidna šema je uvek stabilna. Rešenje ne menja znak kada je $K < 2$.

Razmatranje slično ovom može se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 3.12.

Ispitati stabilnost Ojlerove šeme preko dvostrukog koraka u vremenu na primeru jednačine trenja upotrebom Fon Nojmanovog metoda.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Ojlerova šema preko dva koraka u vremenu primenjena na jednačinu trenja ima oblik

$$U^{n+1} = (1-2K)U^{n-1}. \quad (1)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (2)$$

za faktor povećanja se dobija

$$\lambda^2 = 1-2K. \quad (3)$$

Rešavanjem (3) se dobija

$$\lambda_1 = \sqrt{1-2K}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{1-2K}. \quad (5)$$

Kada $K \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 1$, a $\lambda_2 \rightarrow -1$. Rešenje povezano sa λ_1 je fizičko rešenje, a rešenje povezano sa λ_2 je računsko rešenje. Za $0 < K < 1$ rešenja (4) i (5) su uvek stabilna.

ZADATAK 3.13.

Upotrebom Fon Nojmanovog metoda na primeru jednačine trenja ispitati stabilnost:

- a) Matsunove šeme i
- b) Hjunove šeme.

Rešenje:

Opšti izraz jednačine trenja u slučaju Matsunove i Hjunove šeme ima oblik

$$U^{(n+1)*} = U^n - KU^n, \quad (1)$$

$$U^{n+1} = U^n - K(\alpha U^n + \beta U^{(n+1)*}), \quad (2)$$

gde parametri α i β zadovoljavaju uslov

$$\alpha + \beta = 1. \quad (3)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (4)$$

za opšti izraz faktora povećanja se dobija

$$\lambda = 1 - K + \beta K^2. \quad (5)$$

a) Kada je $\beta = 1$, izrazi (1) i (2) se svode na Matsunovu šemu, a faktor povećanja na osnovu (5) postaje

$$\lambda = 1 - K + K^2. \quad (6)$$

Šema je stabilna kada je

$$|1 - K + K^2| < 1, \quad (7)$$

odakle sledi

$$0 < K < 1, \quad (8)$$

što je ujedno i kriterijum da rešenje ne menja znak.

b) U slučaju kada je $\beta = 1/2$, iz (5) se dobija faktor povećanja za Hjunovu šemu

$$\lambda = 1 - K + \frac{1}{2} K^2. \quad (9)$$

Iz uslova

$$\left|1 - K + \frac{1}{2}K^2\right| < 1, \quad (10)$$

sledi da je

$$0 < K < 2, \quad (11)$$

rešenje stabilno i da ne menja znak. Razmatranje slično ovom može se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 3.14.

Upotrebom Fon Nojmanovog metoda na primeru jednačine trenja ispitati prirodu i stabilnost:

- preskočne šeme i
- Adams-Bašfortove šeme.

Rešenje:

a) Preskočna šema primenjena na jednačinu trenja ima oblik

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2KU^n. \quad (1)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (2)$$

za faktor povećanja se dobija

$$\lambda^2 + 2K\lambda - 1 = 0. \quad (3)$$

Rešenja (3) su

$$\lambda_1 = -K + \sqrt{1 + K^2}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = -K - \sqrt{1 + K^2}. \quad (5)$$

Kada $K \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 1$, a $\lambda_2 \rightarrow -1$. Rešenje povezano sa λ_1 je fizičko rešenje, a rešenje povezano sa λ_2 je računsko rešenje. Za $K > 0$ fizičko rešenje je uvek stabilno, a računsko rešenje je uvek nestabilno.

b) Adams-Bašfortova šema primenjena na jednačinu trenja ima oblik

$$U^{n+1} = U^n - K\left(\frac{3}{2}U^n - \frac{1}{2}U^{n-1}\right). \quad (6)$$

Koristeći (2), za faktore povećanja se dobijaju

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} K + \sqrt{1 - K + \frac{9}{4} K^2} \right), \quad (7)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} K - \sqrt{1 - K + \frac{9}{4} K^2} \right). \quad (8)$$

Kada $K \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 1$, a $\lambda_2 \rightarrow 0$. Rešenje povezano sa λ_1 je fizičko rešenje, a rešenje povezano sa λ_2 je računsko rešenje, koje je amortizovano. Uslov za stabilnost računskog rešenja (8) može se napisati

$$\left| 1 - \frac{3}{2} K - \sqrt{1 - K + \frac{9}{4} K^2} \right| < 2. \quad (9)$$

Tako, uslov stabilnosti je

$$0 < K < 1. \quad (10)$$

Razmatranje slično ovom može se naći kod Mesingera i Arakave (1976).

Napomena: Treba primetiti da je Adams-Bašfortova šema bila nestabilna, kao i Ojlerova i Hjunova šema kod primene na oscilatornu jednačinu.

ZADATAK 3.15.

Ispitati ponašanje faktora povećanja Adams-Bašfortove šeme primenjene na jednačinu trenja za male vrednosti K .

Rešenje (Rančić, 1988):

Adams-Bašfortova šema primenjena na jednačinu trenja ima oblik

$$U^{n+1} = U^n - K \left(\frac{3}{2} U^n - \frac{1}{2} U^{n-1} \right), \quad (1)$$

odakle se za faktore povećanja dobija

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} K + \sqrt{1 - K + \frac{9}{4} K^2} \right), \quad (2)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} K - \sqrt{1 - K + \frac{9}{4} K^2} \right). \quad (3)$$

Za malo K , izrazi⁷ (2) i (3) postaju

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2}K + \frac{5}{8}K^2, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = -K + \frac{1}{2}K^2. \quad (5)$$

Za $K > 0$, fizičko rešenje je stabilno ($\lambda_1 \rightarrow 1$), a računsko rešenje je amortizujuće ($\lambda_2 \rightarrow 0$).

ZADATAK 3.16.

Jednačina amortizovanih oscilacija ima oblik

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U - \kappa U.$$

Za članove $i\omega U$ i $-\kappa U$ primeniti preskočnu šemu i šemu unapred, redom. Ispitati prirodu i stabilnost tako dobijene šeme upotrebom Fon Nojmanovog metoda.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Šema amortizovanih oscilacija u zadanom slučaju ima oblik

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2ipU^n - 2KU^{n-1}. \quad (1)$$

Smatrajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (2)$$

za faktor povećanja se dobija

$$\lambda^2 - 2ip\lambda + 2K - 1 = 0. \quad (3)$$

Rešenja (3) su

$$\lambda_1 = ip + \sqrt{1 - 2K - p^2}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = ip - \sqrt{1 - 2K - p^2}. \quad (5)$$

⁷ Uvodeći da je

$$x = -K + \frac{9}{4}K^2, \quad (1)$$

i razvojem u Tejlorov red članova koji sadrže koren u (2) i (3) iz zadatka 3.15, može se pisati

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Kada $K \rightarrow 0$ i $p \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow 1$, a $\lambda_2 \rightarrow -1$. Rešenje povezano sa λ_1 je fizičko rešenje, a rešenje povezano sa λ_2 je računsko rešenje.

Za ispitivanje stabilnosti šeme, izrazi (4) i (5) se svode na

$$|\lambda|^2 = 1 - 2K. \quad (6)$$

Šema je stabilna kada je

$$0 \leq K \leq 1. \quad (7)$$

ZADATAK 3.17.

Aproksimacija oscilatorne jednačine je zadata u obliku preskočne šeme. Korišćenjem Ojlerove i Hjunove šeme za izračunavanje početne vrednosti amplitude, $U^{(1)}$, odrediti koja od ponuđene dve šeme daje manju amplitudu računskog rešenja,

$$A = |U^{(1)} - \lambda_1 U^{(0)}|. \quad (1)$$

Rešenje (Rančić, 1988):

Upotreba preskočne šeme u početnom trenutku vremena zahteva poznavanje početne vrednosti, jer se koriste tri nivoa u vremenu. Zbog toga se obično za izračunavanje početne vrednosti koristi neka od šema sa dva vremenska nivoa.

Upotrebom Ojlerove i Hjunove šeme početne vrednosti amplitude su, redom

$$U_O^{(1)} = (1 + ip)U_O^{(0)}, \quad (2)$$

$$U_H^{(1)} = \left(1 + ip - \frac{1}{2}p^2\right)U_H^{(0)}. \quad (3)$$

Faktor povećanja fizičkog rešenja preskočne šeme (videti zadatak 3.7) je

$$\lambda_1 = ip + \sqrt{1 - p^2}. \quad (4)$$

Zamenjujući (2) i (4), odnosno (3) i (4) u (1), dobija se

$$A_O = \left|1 - \sqrt{1 - p^2}\right| |U_O^{(0)}|, \quad (5)$$

$$A_H = \left| \left(1 - \frac{1}{2}p^2 + ip\right) - \left(ip + \sqrt{1 - p^2}\right) \right| |U_H^{(0)}|, \quad (6)$$

gde su A_O i A_H oznake za amplitude preskočne šeme u početnom trenutku vremena dobijene upotrebom Ojlerove i Hjunove šeme, redom.

Da bi se uporedile amplitude A_O i A_H , posmatraće se slučaj kada je p malo. Nakon sređivanja⁸ u (5) i (6), dobija se

$$A_O = \left| \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} p^4 + \dots \right| |U_O^{(0)}|, \quad (7)$$

$$A_H = \left| \frac{1}{8} p^4 + \dots \right| |U_H^{(0)}|. \quad (8)$$

Izostavljanjem članova višeg reda izrazi za amplitude se konačno mogu napisati

$$A_O = \frac{1}{2} p^2 |U_O^{(0)}|, \quad (9)$$

$$A_H = \frac{1}{8} p^4 |U_H^{(0)}|. \quad (10)$$

Pošto je $p < 1$, upotreba Hjunove šeme u početnom trenutku vremena proizvodi manju amplitudu računskog rešenja od Ojlerove šeme.

ZADATAK 3.18.

Upoređujući greške odsecanja preskočne šeme i Adams-Bašfortove šeme, ustanoviti koja je tačnija.

Rešenje (Rančić, 1988):

Posmatrajmo opšti oblik obične diferencijalne jednačine prvog reda

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t), \quad (1)$$

gde je $U = U(t)$.

Preskočna i Adams-Bašfortova šema primenjene na (1) su, redom

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} = f^n, \quad (2)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1}. \quad (3)$$

⁸ Razvoj članova koji sadrže kvadratni koren u izrazima (5) i (6) iz zadatka 3.17 u Tejlorov red, može se napisati

$$\left(1 - p^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{8} p^4$$

Razvojem u Tejlorov red U^{n+1} , U^{n-1} i f^{n-1} oko tačke na nivou n , dobija se

$$U^{n+1} = U^n + \frac{dU^n}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 U^n}{dt^2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 U^n}{dt^3} (\Delta t)^3 + \dots, \quad (4)$$

$$U^{n-1} = U^n - \frac{dU^n}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 U^n}{dt^2} (\Delta t)^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3 U^n}{dt^3} (\Delta t)^3 + \dots, \quad (5)$$

$$f^{n-1} = f^n - \left(\frac{df}{dt} \right)^n \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)^n (\Delta t)^2 + \dots \quad (6)$$

Zamenom (4) i (5) u (2), preskočna šema se može napisati

$$\frac{dU}{dt} + \varepsilon_P = f, \quad (7)$$

gde je greška odsecanja preskočne šeme

$$\varepsilon_P = \frac{1}{6} \frac{d^3 U}{dt^3} (\Delta t)^2 + \dots \quad (8)$$

Zamenom (4) i (6) u (3), Adams-Bašfortova šema se može napisati u obliku

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2!} \frac{d^2 U}{dt^2} \Delta t + \frac{1}{3!} \frac{d^3 U}{dt^3} (\Delta t)^2 + \dots = \frac{3}{2} f - \frac{1}{2} \left(f - \frac{df}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots \right). \quad (9)$$

Dalje, sređivanjem (9), dobija se

$$\frac{dU}{dt} + \varepsilon_{AB} = f, \quad (10)$$

gde greška odsecanja Adams-Bašfortove ima oblik

$$\varepsilon_{AB} = \frac{5}{12} \frac{d^3 U}{dt^3} (\Delta t)^2 + \dots \quad (11)$$

Upoređujući (8) i (11) uočava se da su šeme drugog reda tačnosti, ali je preskočna šema tačnija jer je

$$\varepsilon_P < \varepsilon_{AB}. \quad (12)$$

NAMERNO PRAZNA STRANA

GLAVA 4

ADVEKTIVNA JEDNAČINA

ZADATAK 4.1.

Napisati aproksimaciju za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu primenom Matsunove šeme za diferenciranje u vremenu i centralnog količnika konačnih razlika za diferenciranje u prostoru, a potom

- a) odrediti red tačnosti dobijene aproksimacije;
- b) ispitati stabilnost aproksimacije primenom Fon Nojmanovog metoda; i
- c) naći koji se talasi najviše amortizuju.

Rešenje:

Jednodimenzionalna linearna advektivna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

gde su $u = u(x, t)$ i $c = \text{const}$.

Zbog iterativne prirode Matsunove šeme, aproksimacija za (1) se piše u dva koraka

$$\frac{u_i^{(n+1)*} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}, \quad (2)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{(n+1)*} - u_{i-1}^{(n+1)*}}{2\Delta x}. \quad (3)$$

Iz (2) formiranjem $u_{i+1}^{(n+1)*}$ i $u_{i-1}^{(n+1)*}$, i zamenom u (3), aproksimacija advektivne jednačine (1), dobija oblik

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + c^2 \Delta t \frac{u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n}{(2\Delta x)^2}. \quad (4)$$

Ovakav primer šeme za advektivnu jednačinu postoji kod Mesingera i Arakave (1976).

a) Razvojem u_{i+1}^n i u_{i-1}^n (videti zadatak 1.6), u_{i+2}^n i u_{i-2}^n (videti zadatak 1.7) i u_i^{n+1} (videti zadatak 1.8) u Tejlorov red oko tačke $i\Delta x$, $n\Delta t$ se dobija

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,n} \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,n} (\Delta t)^2 + \dots - u_i^n \right] = \\ & = -c \frac{1}{2\Delta x} \left[u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,n} \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,n} (\Delta x)^3 + \dots \right. \\ & \quad \left. - u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,n} \Delta x - \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,n} (\Delta x)^3 - \dots \right] \quad (5) \\ & + c^2 \frac{\Delta t}{(2\Delta x)^2} \left[u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,n} (2\Delta x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n} (2\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,n} (2\Delta x)^3 + \dots \right. \\ & \quad \left. - 2u_i^n + u_i^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,n} (2\Delta x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n} (2\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,n} (2\Delta x)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Sređivanjem (5), kao što je to učinjeno kod Rančića (1988), dobija se

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \Delta t \left[\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,n} + \dots \right] = -c \frac{\partial u_i}{\partial x} - c \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,n} (\Delta x)^2 + \dots \right] + c^2 \Delta t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n} + \dots, \quad (6)$$

odnosno,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c \frac{\partial u_i}{\partial x} = \varepsilon, \quad (7)$$

gde je

$$\varepsilon = \Delta t \left[-\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,n} + c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n} - \dots \right] + (\Delta x)^2 \left[-\frac{c}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,n} + \dots \right]. \quad (8)$$

Tako, greška odsecanja tražene aproksimacije je prvog reda tačnosti u vremenu i drugog reda tačnosti u prostoru, odnosno

$$\varepsilon = O[\Delta t, (\Delta x)^2]. \quad (9)$$

b) Zamenom u (4) rešenja u talasnom obliku

$$u_i^n = \hat{u}^n e^{iki\Delta x}, \quad (10)$$

i nakon sređivanja se dobija

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n (1 - \mu i \sin X - \mu^2 \sin^2 X), \quad (11)$$

gde su $\mu = c \Delta t / \Delta x$ i $X = k \Delta x$. Znajući da je

$$\hat{u}^{n+1} = \lambda \hat{u}^n, \quad (12)$$

iz (11) za faktor povećanja se dobija

$$\lambda = 1 - \mu i \sin X - \mu^2 \sin^2 X. \quad (13)$$

Iz uslova za stabilnost $|\lambda| \leq 1$, na osnovu (13) sledi da je

$$\mu^2 \sin^2 X (1 - \mu^2 \sin^2 X) \geq 0. \quad (14)$$

Pošto je $\sin^2 X \leq 1$, konačno se za stabilnost dobija uslov

$$\mu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (15)$$

Uslov (15) je poznat pod nazivom Kurant-Fridriks-Levi (Courant-Friedrichs-Lewy, 1928) ili CFL kriterijum stabilnosti.

c) Najviše će biti amortizovan talas čije je $|\lambda|^2$ minimalno, što se dobija iz uslova

$$\frac{\partial}{\partial k} |\lambda|^2 = 0, \quad (16)$$

odnosno

$$\Delta x \mu^2 \sin 2k\Delta x (2\mu^2 \sin^2 k\Delta x - 1) = 0. \quad (17)$$

Izraz (17) ima dve ekstremne vrednosti

$$\sin 2k\Delta x = 0, \quad (18)$$

$$2\mu^2 \sin^2 k\Delta x = 1. \quad (19)$$

Iz (18) se dobija minimalna vrednost faktora povećanja za

$$2k\Delta x = \pi. \quad (20)$$

Dakle, najviše se amortizuje talas dužine

$$L = 4\Delta x. \quad (21)$$

Isti zaključak se može naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 4.2.

Pokazati da Leks-Vendrofova (Lax-Wendroff) šema predstavlja konzistentnu aproksimaciju za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Leks-Vendrofova šema ima oblik

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (1)$$

Posmatranjem graničnog slučaja i primenom zakona distribucije, šema (1) se može napisati

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right] + c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] - \frac{1}{2} c^2 \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[\Delta t \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Granične vrednosti prva dva člana desne strane (2), mogu se napisati

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right] \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,n}, \quad (3)$$

$$c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] \rightarrow c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,n}, \quad (4)$$

odnosno, čine konzistentnu aproksimaciju vremenskih i prostornih izvoda. Za izračunavanje graničnih vrednosti trećeg člana desne strane (2), može se napisati

$$-\frac{1}{2} c^2 \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[\Delta t \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] = -\frac{1}{2} c^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \left\{ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \right\}. \quad (5)$$

Granična vrednost izraza u velikoj zagradi sa desne strane (5) daje

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n}, \quad (6)$$

odnosno, čini konzistentnu aproksimaciju drugog izvoda. Zamenom izvoda iz (6) u član na desnoj strani (5) u graničnom slučaju se dobija

$$-\frac{1}{2} c^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\Delta t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,n} \right] \rightarrow 0. \quad (7)$$

Vraćanjem izračunatih graničnih vrednosti (3), (4) i (7) na desnu stranu (2), konačno se u graničnom slučaju dobija

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8)$$

ZADATAK 4.3.

Odrediti uslove stabilnosti za aproksimaciju jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine formirane od šeme unapred za vremensko diferenciranje i količnika unazad za prostorno diferenciranje u slučaju strujanja zadanog:

- a) uzvodno i
- b) nizvodno.

Rešenje (Rančić, 1988):

Tražena aproksimacija za advektivnu jednačinu preko jednog vremenskog i prostornog koraka ima oblik

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (1)$$

U ovakvim slučajevima je najprimerenije za ispitivanje stabilnosti koristiti Fon Nojmanov metod. Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku

$$u_i^n = \hat{u}^n e^{iki\Delta x}, \quad (2)$$

i nakon sređivanja dobija se

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n (1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta x}), \quad (3)$$

gde je $\mu = c \Delta t / \Delta x$. Znajući da je

$$\hat{u}^{n+1} = \lambda \hat{u}^n, \quad (4)$$

iz (3) se za faktor povećanja dobija

$$\lambda = 1 - \mu + \mu \cos k\Delta x - i\mu \sin k\Delta x. \quad (5)$$

Da bi se ispitala stabilnost (1), potrebno je analizirati

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x). \quad (6)$$

- a) U slučaju uzvodnog strujanja, tj. kada je $c > 0$, analizom (6) može se ustanoviti da je šema
- stabilna, kada je $0 < \mu < 1$;
 - neutralna, kada je $\mu = 0$ i $\mu = 1$; i
 - nestabilna, kada je $\mu < 0$ i $\mu > 1$.
- b) U slučaju nizvodnog strujanja, kada je $c < 0$, sledi da je $\mu < 0$, pa je šema uvek nestabilna.

ZADATAK 4.4.

Odrediti talas kojeg najviše amortizuje aproksimacija za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu formirane od šeme unapred za vremensko diferenciranje i količnika unazad za prostorno diferenciranje.

Rešenje (Mesinger i Arakawa, 1976):

Pošto su uslovi formiranja tražene aproksimacije isti kao u zadatku 4.3, za faktor povećanja se može pisati

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x). \quad (1)$$

Najviše će biti amortizovan talas čije je $|\lambda|^2$ minimalno, što se nalazi iz uslova

$$\frac{\partial}{\partial k} |\lambda|^2 = 0, \quad (2)$$

odnosno,

$$2\Delta x \mu(\mu - 1) \sin(k\Delta x) = 0. \quad (3)$$

Izraz (3) daje tri ekstremne vrednosti

$$\mu = 0, \quad (4)$$

$$\mu = 1, \quad (5)$$

$$\sin k\Delta x = 0. \quad (6)$$

Minimalna vrednost faktora povećanja iz (6) se dobija za

$$k\Delta x = \pi. \quad (7)$$

Dakle, najviše se amortizuje talas dužine

$$L = 2\Delta x. \quad (8)$$

ZADATAK 4.5.

Odrediti kriterijum stabilnosti šeme četvrtog reda tačnosti za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu oblika

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -c \left(\frac{4}{3} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} \right)^n, \quad (1)$$

i uporediti dobijeni rezultat sa šemom drugog reda tačnosti iste jednačine.

Rešenje (Rančić, 1988):

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku

$$u_i^n = U^n e^{iki\Delta x}, \quad (2)$$

dobija se

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2ipU^n, \quad (3)$$

gde je

$$p = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{4}{3} \sin k\Delta x - \frac{1}{6} \sin 2k\Delta x \right). \quad (4)$$

Posmatraće se uslov stabilnosti za sve talasne dužine u slučaju maksimalne vrednosti $|p|$, tj. kada je

$$\frac{\partial}{\partial k} |p| = 0. \quad (5)$$

Nakon diferenciranja i sređivanja (4) se može napisati

$$\frac{4}{3} \Delta x \cos k\Delta x - \frac{1}{3} \Delta x \cos 2k\Delta x = 0. \quad (6)$$

Transformacijom (6)

$$-2 \cos^2 k\Delta x + 4 \cos k\Delta x + 1 = 0, \quad (7)$$

odnosno, posmatranjem samo vrednosti manje od jedan

$$\cos k\Delta x = 0.23, \quad (8)$$

za argument se konačno dobija

$$k\Delta x \approx 77^\circ. \quad (9)$$

Zamenom (9) u (4) i iz uslova stabilnosti preskočne šeme, $|p| < 1$, (videti zadatak 3.7) dobija se

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 0.82. \quad (10)$$

Za stabilnost šeme četvrtog reda tačnosti u slučaju jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine potrebno je izabrati korak u vremenu za oko 18% manji od koraka u vremenu kod šeme drugog reda tačnosti primenjene na istu jednačinu.

ZADATAK 4.6.

Upotreba šema četvrtog i drugog reda tačnosti za prostorne izvode u jednodimenzionalnoj linearnoj advektivnoj jednačini dovodi do diferencijalno-diferencijskih jednačina

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -c \left(\frac{4}{3} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} \right), \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -c \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right). \quad (2)$$

- Uporediti fazne brzine jednačina (1) i (2) za talase od četiri i dva intervala mreže;
- izračunati grupnu brzinu talasa od dva intervala mreže; i
- grafički prikazati zavisnost faznih i grupnih brzina od talasnih brojeva.

Rešenje:

- Zamenom u (1) i (2) rešenja u talasnom obliku

$$u_i(t) = U(t)e^{iki\Delta x}, \quad (3)$$

dobijaju se diferencijalno-diferencijske jednačine, redom

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_i = -ickU \left(\frac{4}{3} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2k\Delta x}{2k\Delta x} \right), \quad (4)$$

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_i = -ick \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} U. \quad (5)$$

Zamenom talasnog rešenja u obliku

$$u(x,t) = U(t)e^{ikx}, \quad (6)$$

u jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu (videti zadatak 4.1), dobija se

$$\frac{dU}{dt} = -ickU. \quad (7)$$

Upoređujući desne strane (4) i (5) sa (7), fazne brzine šema četvrtog i drugog reda tačnosti su, redom

$$c_{(4)}^* = c \left(\frac{4 \sin k\Delta x}{3} - \frac{1 \sin 2k\Delta x}{3} \right), \quad (8)$$

$$c_{(2)}^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}. \quad (9)$$

Postupak za dobijanje (8) i (9) čitalac može naći u tekstu Mesingera i Arakave (1976). Za talas dužine $L = 4\Delta x$, odnosno $k\Delta x = \pi/2$, iz (8) i (9) se dobija

$$c_{(4)}^* = \frac{8c}{3\pi}, \quad (10)$$

$$c_{(2)}^* = \frac{2c}{\pi}. \quad (11)$$

Upoređivanje (10) i (11) daje

$$c_{(4)}^* = 1.33c_{(2)}^*. \quad (12)$$

Za talas od dva intervala mreže, $L = 2\Delta x$, odnosno, $k\Delta x = \pi$, a na osnovu (8) i (9) sledi

$$c_{(4)}^* = c_{(2)}^* = 0. \quad (13)$$

b) Primenjujući definiciju grupne brzine

$$c_g = \frac{\partial(kc)}{\partial k}, \quad (14)$$

na (8), (9) i analitičku vrednost, redom, se dobija

$$c_{g(4)}^* = c \left(\frac{4}{3} \cos k\Delta x - \frac{1}{3} \cos 2k\Delta x \right), \quad (15)$$

$$c_{g(2)}^* = c \cos k\Delta x, \quad (16)$$

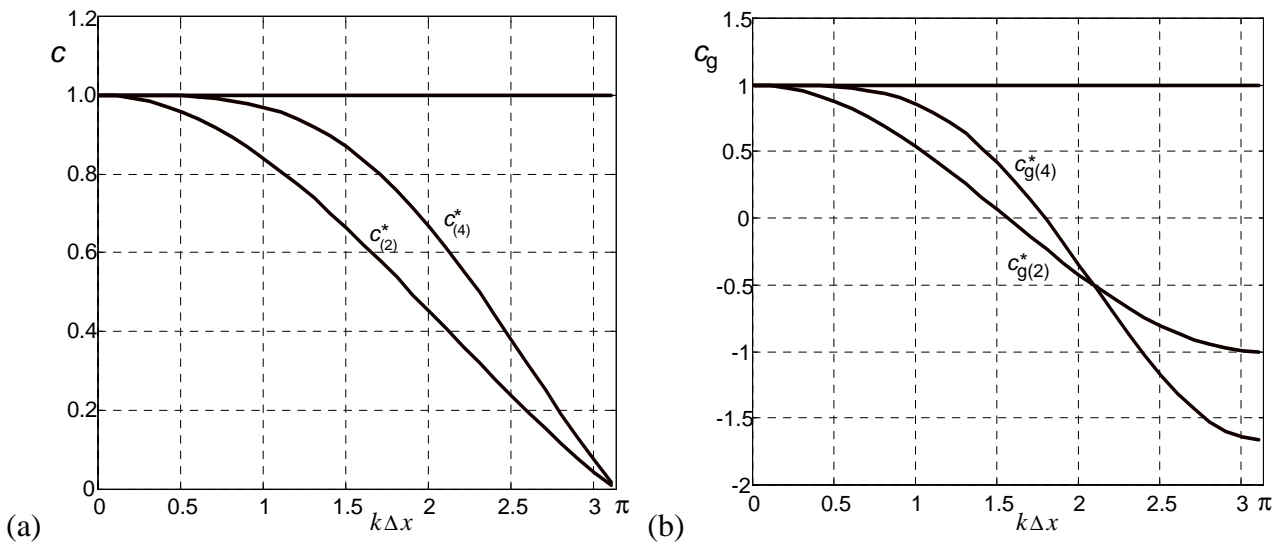
$$c_g = c. \quad (17)$$

Za talas od dva intervala mreže, $L = 2\Delta x$, odnosno, $k\Delta x = \pi$, grupne brzine iz (15) i (16) su, redom

$$c_{g(4)}^* = -\frac{5}{3}c,$$

$$c_{g(2)}^* = -c.$$

c) Grafički prikazi ponašanja faznih i grupnih brzina za šeme četvrtog i drugog reda tačnosti u zavisnosti od talasnih brojeva dati su na Slici 4 (Gavrilov i Tošić, 1998).



Slika 4. (a) fazne i (b) grupne brzine za šeme četvrtog i drugog reda tačnosti.

ZADATAK 4.7.

Naći izraz za faznu brzinu i ispitati stabilnost aproksimacije za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu ($c > 0$) dobijenu diskretizacijom samo prostornog izvoda primenom količnika unazad prvog reda tačnosti. Takođe, odrediti ponašanje fazne brzine za malo k i naći talas sa najvećom amortizacijom.

Rešenje:

Diferencijalno-diferencijski oblik jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine ima oblik

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}. \quad (1)$$

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku

$$u_i(t) = U(t)e^{iki\Delta x}, \quad (2)$$

dobija se

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_i = -c \frac{1 - \cos k\Delta x + i \sin k\Delta x}{\Delta x} U. \quad (3)$$

Upoređujući desne strane izraza (3) i izraza (7) iz zadatka 4.6, fazna brzina šeme (1) je

$$c^* = -ic \frac{(1 - \cos k\Delta x + i \sin k\Delta x)}{k\Delta x}. \quad (4)$$

Pošto je (4) kompleksno, realni i imaginarni delovi se mogu napisati

$$c_{RE}^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}, \quad (5)$$

$$c_{IM}^* = -c \frac{\sin^2(k\Delta x/2)}{k\Delta x/2}. \quad (6)$$

Rešenje jednačine (7) iz zadatka 4.6, korišćenjem kompleksne amplitude, može se prikazati u obliku

$$U(t) = U(0)e^{-ikt_{RE}^*} e^{kt_{IM}^*}. \quad (7)$$

Član $e^{-ikt_{RE}^*}$ opisuje talasno ponašanje, dok član $e^{kt_{IM}^*}$ opisuje promenu amplitude u vremenu. Da bi rešenje bilo

- stabilno (amplituda se amortizuje), potrebno je da $c_{IM}^* < 0$ i
- nestabilno (amplituda raste), treba da je $c_{IM}^* > 0$.

Posmatrajući (6) uočava se da je $c_{IM}^* < 0$, na osnovu čega sledi da je šema stabilna.

Smatrajući da je k malo, transformacijom⁹ (5) i (6) i formiranjem izraza za kompleksnu faznu brzinu dobija se

$$c^* = c \left\{ \left[1 - \frac{(k\Delta x)^2}{3!} + \dots \right] + i \left[\frac{k\Delta x}{2} - \frac{(k\Delta x)^3}{24} + \dots \right] \right\}. \quad (8)$$

Znajući da je za amortizaciju potreban uslov $c_{IM}^* < 0$, najviše će biti amortizovan talas kada je

$$\frac{\partial}{\partial k} (kc_{IM}^*) = 0, \quad (9)$$

odnosno,

$$2 \sin \frac{k\Delta x}{2} \cos \frac{k\Delta x}{2} = 0. \quad (10)$$

Iz (10) se dobija

$$\sin k\Delta x = 0. \quad (11)$$

⁹ Razvojem u Tejlorov red (5) i (6) iz zadatka 4.7, dobija se

$$\sin(k\Delta x) = k\Delta x - \frac{(k\Delta x)^3}{3!} + \dots, \quad (1)$$

$$\sin^2(k\Delta x) = -(k\Delta x)^2 + \frac{(k\Delta x)^4}{3} - \dots. \quad (2)$$

Dakle, najviše se amortizuje talas dužine

$$L = 2\Delta x. \quad (12)$$

Ovde navedeni postupak potiče od Rančića (1988).

ZADATAK 4.8.

Ispitati stabilnost jednodimenzionalne linearne advektivne jednačine koristeći energetski metod.

Rešenje (Mesinger i Arakawa, 1976):

Za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu jedna od mogućih šema može se napisati u opštem obliku

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\frac{1}{2}\mu(u_{i+1}^* - u_{i-1}^*). \quad (1)$$

Ovde je $\mu = c\Delta t/\Delta x$, a

$$u_i^* = \alpha u_i^n + \beta u_i^{n+1}, \quad (2)$$

gde parametri α i β zadovoljavaju uslov

$$\alpha + \beta = 1. \quad (3)$$

Da bi se primenio energetski metod, pomnožiće se (1) sa u_i^* i sabrati za sve i , čime nastaje

$$\sum_i u_i^* (u_i^{n+1} - u_i^n) = -\frac{1}{2}\mu \sum_i u_i^* (u_{i+1}^* - u_{i-1}^*). \quad (4)$$

Pošto je desna strana (4) jednaka nuli prilikom korišćenja cikličnih graničnih uslova, izraz (4) postaje

$$\sum_i u_i^* (u_i^{n+1} - u_i^n) = 0. \quad (5)$$

Dodavanjem i oduzimanjem u (5) člana $(u_i^{n+1} - u_i^n)(u_i^{n+1} + u_i^n)/2$ i nakon sređivanja dobija se

$$\sum_i (u_i^{n+1} - u_i^n) \left[u_i^* - \frac{1}{2}(u_i^{n+1} + u_i^n) \right] = -\frac{1}{2} \sum_i \left[(u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2 \right]. \quad (6)$$

Zamena (2) u (6) i koristeći (3), dovodi do

$$\sum_i (u_i^{n+1} - u_i^n) \left[\alpha u_i^n + (1-\alpha)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_i^{n+1} + u_i^n) \right] = -\frac{1}{2} \sum_i \left[(u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2 \right], \quad (7)$$

odnosno, dobija se

$$\sum_i (u_i^{n+1} - u_i^n)^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) = \sum_i \frac{1}{2} \left[(u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2 \right]. \quad (8)$$

Kada je $\alpha > 1/2$, šema je nestabilna; ako je $\alpha = 1/2$, šema je neutralna; za $\alpha < 1/2$ šema je amortizujuća, a njena ukupna energija $\sum_i (u_i^n)^2 / 2$ opada tokom vremena.

ZADATAK 4.9.

Jedna od konzistentnih aproksimacija za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu može se napisati u obliku

$$\frac{1}{6\Delta t} \left[u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + 4(u_i^{n+1} - u_i^n) + u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n \right] + \frac{c}{4\Delta x} \left[(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \right] = 0. \quad (1)$$

Odrediti uslov stabilnosti.

Rešenje (Rančić, 1988):

Koristeći Fon Nojmanov metod, odnosno zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku

$$u_i^n = U^n e^{iki\Delta x}, \quad (2)$$

dobija se

$$U^{n+1} = \left(\frac{1 - Ai}{1 + Ai} \right) U^n. \quad (3)$$

Ovde je

$$A = \frac{3}{2} \mu \frac{\sin k\Delta x}{(2 + \cos k\Delta x)}, \quad (4)$$

gde je $\mu = c \Delta t / \Delta x$. Znajući da je

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad (5)$$

dobija se

$$|\lambda| = 1, \quad (6)$$

odnosno šema je neutralna.

ZADATAK 4.10.

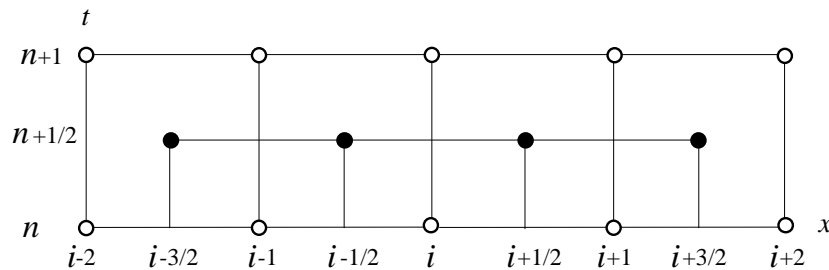
Gadova (Gaddova) šema nastaje ako se drugi korak Leks-Vendrofove šeme definiše u obliku

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \left[(1 + \alpha) \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \alpha \frac{u_{i+3/2}^{n+1/2} - u_{i-3/2}^{n+1/2}}{3\Delta x} \right]. \quad (1)$$

- Odrediti parametar α tako da (1) aproksimira četvrti red tačnosti u prostoru;
- za tako dobijenu šemu odrediti uslov stabilnosti Fon Nojmanovim metodom; i
- odrediti parametar α tako da se (1) svodi na Leks-Vendrofov šemu.

Rešenje:

- Prostorno-vremenski raspored tačaka je prikazan na Slici 5.



Slika 5. Prostorno-vremenska mreža tačaka za Leks-Vendrofov šemu.

Aproksimacije za jednodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu, formirane upotrebom centralnih količnika konačnih razlika u prostoru i šema unapred u vremenu u četiri tačke ($u_{i+1/2}^{n+1/2}$, $u_{i+3/2}^{n+1/2}$, $u_{i-1/2}^{n+1/2}$ i $u_{i-3/2}^{n+1/2}$) označene simbolom "•" na Slici 5, mogu se napisati

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (2)$$

$$u_{i+3/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i+2}^n + u_{i+1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n), \quad (3)$$

$$u_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_i^n + u_{i-1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad (4)$$

$$u_{i-3/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i-1}^n - u_{i-2}^n). \quad (5)$$

Zamenom (2), (3), (4) i (5) u (1), i nakon sređivanja, dobija se

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & -c \left[\left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{3} \right) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{2}{3} \alpha \frac{u_{i+2}^n - u_{i-2}^n}{4\Delta x} \right] + \\ & + c^2 \frac{\Delta t}{2} \left[(1 + \alpha) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{4}{3} \alpha \frac{u_{i+2}^n - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + u_{i-2}^n}{(2\Delta x)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Razvojem u_i^n u Tejlorov red oko x_i , može se napisati

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4], \quad (7)$$

$$\frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]. \quad (8)$$

Zamenom (7) i (8) u aproksimaciju (6) i nakon sređivanja, dobija se

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & -c \frac{\partial u}{\partial x} - c \left[\frac{1}{3!} (1 - 2\alpha) \right] \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] + \\ & + c^2 \frac{\Delta t}{2} \left[(1 + \alpha) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{4}{3} \alpha \frac{u_{i+2}^n - (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - u_{i-2}^n}{(2\Delta x)^2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Od (9) nastaje šema četvrtog reda tačnosti u prostoru kada je

$$\alpha = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Prethodni postupak je utemeljen na razmatranju Rančića (1988).

b) Nakon primene Fon Nojmanovog metoda na (6), za kriterijum stabilnosti se dobija

$$(1 - \mu^2) \left[1 + \frac{4}{3} \alpha \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \right] - \frac{4}{3} \alpha \geq 0. \quad (11)$$

Kada je $\alpha = 1/2$, iz (11) sledi

$$\mu^2 \leq 1 - \frac{2}{3 \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \right)}, \quad (12)$$

odnosno, maksimalna vrednost desne strane (12) postaje

$$\mu^2 \leq \frac{3}{5}. \quad (13)$$

c) Kada je $\alpha = 0$, izraz (6) se svodi na originalnu Leks-Vendrofov šemu, a uslov stabilnosti postaje

$$\mu \leq 1. \quad (14)$$

ZADATAK 4.11.

Napisati aproksimaciju za dvodimenzionalnu linearnu advektivnu jednačinu primenom centralnih količnika konačnih razlika za diferenciranje u prostoru. Zatim, iz uslova stabilnosti preskočne šeme ispitati stabilnost prethodno dobijene aproksimacije i uporediti tako dobijen uslov sa jednodimenzionalnim slučajem.

Rešenje:

Dvodimenzionalna linearna advektivna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c_x \frac{\partial q}{\partial x} + c_y \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

gde je $q = q(x, y, t)$, a c_x i c_y su konstantne komponente brzine advekcije u x i y pravcu, tako da je

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}. \quad (2)$$

Primenom na (1) centralnih količnika konačnih razlika za diferenciranje u prostoru, diferencijalno-diferencijaska jednačina postaje

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{i,j} + c_x \frac{q_{i+1,j} - q_{i-1,j}}{2\Delta x} + c_y \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0. \quad (3)$$

Zamenom u (3) rešenja u talasnom obliku

$$q_{i,j} = U(t)e^{i(ki\Delta x + lj\Delta y)}, \quad (4)$$

gde su k i l talasni brojevi u x i y pravcu, aproksimacija dvodimenzionalne linearne advektivne jednačine ima oblik

$$\frac{dU}{dt} = i \left(-c_x \frac{\sin k\Delta x}{\Delta x} - c_y \frac{\sin l\Delta y}{\Delta y} \right) U(t). \quad (5)$$

Upoređujući (5) sa osilatornom jednačinom, $dU/dt = i\omega U$, diskretna vrednost frekvencije se određuje

$$\omega^* = - \left(c_x \frac{\sin k\Delta x}{\Delta x} + c_y \frac{\sin l\Delta y}{\Delta y} \right). \quad (6)$$

Iz uslova za stabilnost preskočne šeme primenjene na oscilatornu jednačinu (videti zadatak 3.7), $|\omega\Delta t| \leq 1$, uslov za stabilnost je sada

$$\left| \left(c_x \frac{\sin k\Delta x}{\Delta x} + c_y \frac{\sin l\Delta y}{\Delta y} \right) \Delta t \right| \leq 1. \quad (7)$$

Uvodeći da je $d \equiv \Delta x = \Delta y$ i znajući da trigonometrijski članovi imaju najveću vrednost kada je

$$\sin kd = 1, \quad (8)$$

$$\sin ld = 1, \quad (9)$$

uslov za maksimalnu vrednost leve strane (7) može da se napiše

$$\left| \frac{1}{d} (c_x + c_y) \Delta t \right| \leq 1. \quad (10)$$

Na kraju, maksimalna vrednost (10) se dobija kada je

$$\frac{d}{dc_x} (c_x + \sqrt{c^2 - c_x^2}) = 0, \quad (11)$$

odnosno,

$$c_x = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad (12)$$

$$c_y = \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (13)$$

Maksimalna vrednost (7) se postiže kada se advekcija vrši pod uglom od $\pi/4$ sa x -osom. Zamenom (12) i (13) u (10) kao uslov linearne stabilnosti (CFL kriterijum) se dobija

$$\left| \sqrt{2} c \frac{\Delta t}{d} \right| \leq 1. \quad (14)$$

Vrlo sličan tretman dvodimenzionalne advektivne jednačine može se naći kod Mesingera i Arakave (1976). Upoređujući (14) i CFL kriterijum za jednodimenzionalni slučaj

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, \quad (15)$$

vidi se da je korak u vremenu $\sqrt{2}$ puta veći u dvodimenzionalnom, nego u jednodimenzionalnom slučaju.

ZADATAK 4.12.

Polazeći od zadatka 4.11, nacrtati oblast dozvoljenih talasnih brojeva na dijagramu sa osama kd i ld , gde su koraci $\Delta x = \Delta y \equiv d$ i izračunati talasnu dužinu najkraćeg talasa u dvodimenzionalnom slučaju.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Najkraća talasna dužina koju mreža raspoznaje u oba pravca je

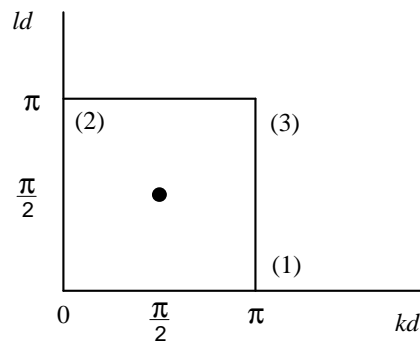
$$L = 2d, \quad (1)$$

a maksimalni talasni brojevi u x i y pravcu su

$$kd = \pi, \quad (2)$$

$$ld = \pi. \quad (3)$$

Na osnovu (2) i (3) oblast dozvoljenih talasnih brojeva prikazana je na Slici 6 u obliku kvadrata.



Slika 6. Oblast dozvoljenih talasnih brojeva.

Posmatranjem Slike 6 uočava se da u oblasti dozvoljenih talasnih brojeva:

- ugao (1) ima $L_x = 2\Delta x$, $L_y = 0$;
- ugao (2) ima $L_x = 0$, $L_y = 2\Delta y$; i
- ugao (3) ima $L_x = 2\Delta x$, $L_y = 2\Delta y$.

Najkraći talas u dvodimenzionalnom slučaju ima talasnu dužinu

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}. \quad (4)$$

Zamenom (2) i (3) u (4) konačno se dobija

$$L = \sqrt{2}d. \quad (5)$$

Pravilna kvadratna dvodimenzionalna mreža, pri istom koraku, može da prikaže talase $\sqrt{2}$ puta kraćih talasnih dužina od jednodimenzionalne mreže.

ZADATAK 4.13.

Nelinearni član ima oblik

$$u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

gde je $u = \sin kx$. Posmatranjem talasa čija je dužina $L = 4\Delta x/3$, odrediti (preslikani) talasni broj, k_p , novonastale talasne komponente iz nelinearnog člana i grafički predstaviti ovaj talas u mreži tačaka.

Rešenje:

Pišući da je

$$\sin kx = \sin[(k - 2k_{\max}) + 2k_{\max}]x, \quad (2)$$

odnosno, razvojem desne strane (2), dobija se

$$\sin kx = \sin(k - 2k_{\max})x \cos 2k_{\max}x + \cos(k - 2k_{\max})x \sin 2k_{\max}x. \quad (3)$$

Znajući da je

$$k_{\max} = \pi/\Delta x, \quad (4)$$

$$x = i\Delta x, \quad (5)$$

$$\cos 2k_{\max}x = 1, \quad (6)$$

$$\sin 2k_{\max}x = 0, \quad (7)$$

iz (3) se dobija

$$\sin kx = -\sin k_p x, \quad (8)$$

gde je

$$k_p = 2k_{\max} - k. \quad (9)$$

Na osnovu (8) se uočava da su u diskretnom slučaju talasni broj osnovne komponente, k , i talasni broj novonastale komponente, k_p , identični.

Za posmatrani talas

$$L = \frac{4}{3}\Delta x, \quad (10)$$

odnosno

$$k = \frac{3\pi}{2\Delta x}, \quad (11)$$

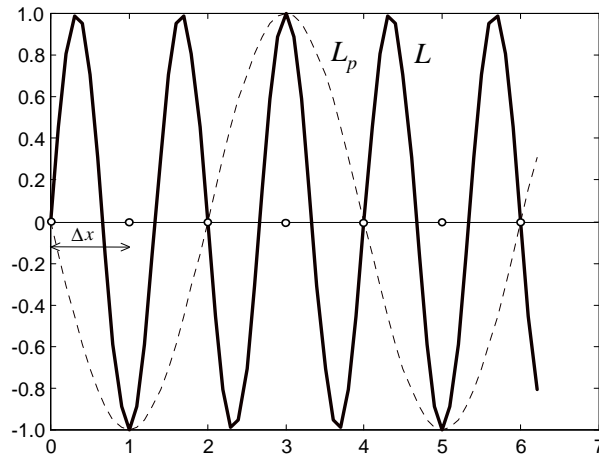
i koristeći (9), novonastali talasni broj iz nelinearnog člana je

$$k_p = \frac{\pi}{2\Delta x}. \quad (12)$$

Na osnovu (12) za novonastalu talasnu dužinu se dobija

$$L_p = 4\Delta x. \quad (13)$$

U mreži tačaka datoj na Slici 7 prikazani su talasi $L = 4\Delta x/3$ (punom linijom) i $L_p = 4\Delta x$ (isprekidanom linijom). Slično razmatranje može se naći kod Mesingera i Arakave (1976).



Slika 7. Talasi talasnih dužina $L = 4\Delta x/3$ (puna linija) i $L_p = 4\Delta x$ (isprekidana linija).

ZADATAK 4.14.

Jednodimenzionalna linearna advektivna jednačina može se metodom konačnog elementa aproksimirati

$$\frac{1}{12\Delta t} \left[u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^{n-1} + 4(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^{n-1} \right] + \frac{c}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0. \quad (1)$$

- Ispitati stabilnost aproksimacije (1);
- izračunati faznu brzinu, ako je Δt malo u poređenju sa $\Delta x / c$; i
- uporediti faznu i grupnu brzinu aproksimacije (1) i šeme četvrtog reda tačnosti za talasne dužine $L_1 = 2\Delta x$, $L_2 = 4\Delta x$ i $L_3 = 6\Delta x$.

Rešenje:

- Zamenom u (1) talasnog rešenja

$$u_i^n = A e^{i(\alpha n \Delta t - k i \Delta x)}, \quad (2)$$

dobija se

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{1}{3} \sin \alpha \Delta t \left(\frac{2 + \cos k \Delta x}{\sin k \Delta x} \right), \quad (3)$$

gde su A amplituda i α neki parametar. CFL kriterijum stabilnosti nalaže uslov

$$-\frac{1}{3} \sin \alpha \Delta t \left(\frac{2 + \cos k \Delta x}{\sin k \Delta x} \right) \leq 1. \quad (4)$$

Maksimalna vrednost (4) se obezbeđuje za

$$\sin \alpha \Delta t = 1, \quad (5)$$

i za maksimalnu vrednost člana u zagradi

$$k \Delta x = \frac{2\pi}{3}. \quad (6)$$

Na osnovu (4), (5) i (6) za kriterijum stabilnosti (3) se dobija

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 0.58. \quad (7)$$

Upoređujući (7) i uslov (10) iz zadatka 4.5 uočava se da je kriterijum stabilnosti aproksimacije (1) strožiji od kriterijuma stabilnosti šeme četvrtog reda tačnosti.

b) Upoređivanjem u kontinualnom slučaju talasnog rešenja

$$u = A e^{ik(x-ct)}, \quad (8)$$

sa (2), opšti izraz za faznu brzinu aproksimacije (1) ima oblik

$$c^* = -\frac{\alpha}{k}. \quad (9)$$

Korišćenjem (3), od (9) postaje

$$c^* = \frac{1}{k} \frac{\arcsin w}{w} \frac{3 \sin k \Delta x}{(2 + \cos k \Delta x)} \frac{c}{\Delta x}, \quad (10)$$

gde je

$$w = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\sin k \Delta x}{(2 + \cos k \Delta x)}. \quad (11)$$

Ako je Δt malo u poređenju sa $\Delta x / c$ i znajući

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\arcsin w}{w} \rightarrow 1, \quad (12)$$

od (10) se izraz za faznu brzinu transformiše

$$c^* = \frac{c}{k \Delta x} \frac{3 \sin k \Delta x}{(2 + \cos k \Delta x)}, \quad (13)$$

ili konačno

$$c^* = \frac{c}{k \Delta x} \frac{\sin k \Delta x}{\left[1 - \frac{2}{3} \sin^2 \left(\frac{k \Delta x}{2} \right) \right]}. \quad (14)$$

c) Grupna brzina aproksimacije (1) je

$$c_g^* = 3c \frac{2 \cos k\Delta x + 1}{(2 + \cos k\Delta x)^2}. \quad (15)$$

Za zadate talasne dužine odnos izraza za fazne brzine (14) i (8) iz zadatka 4.6 prikazan je u Tabeli 1.

Tabela 1. Odnos faznih brzina.

L	$2\Delta x$	$4\Delta x$	$6\Delta x$
$c_g^* / c_{g(4)}^*$	0/0	9/8	36/35

Za zadate talasne dužine odnos grupnih brzina (15) i (15) iz zadatka 4.6 prikazan je u Tabeli 2.

Tabela 2. Odnos grupnih brzina.

L	$2\Delta x$	$4\Delta x$	$6\Delta x$
$c_g^* / c_{g(4)}^*$	9/5	9/4	144/125

Identično razmatranje čitalac može naći kod Rančića (1988).

GLAVA 5

HORIZONTALNO NUMERIČKO DIFERENCIRANJE

5.1 OPŠTI POJMOVI

ZADATAK 5.1.

Odrediti oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za kvadratne mreže A, B, C, D i E prema Arakavinoj notaciji, smatrajući da je na svim mrežama najkraće rastojanje između istorodnih tačaka d' .

Rešenje (Janjić, 1993):

Maksimalni talasni brojevi u nekom pravcu se definišu kao brojevi najkraćih talasa koji mogu stati na intervalu 2π , odnosno

$$k = \frac{2\pi}{L_x}, \quad (1)$$

$$l = \frac{2\pi}{L_y}, \quad (2)$$

gde su L_x i L_y talasne dužine najkraćih talasa u x i y pravcu. Pošto su

$$L_x = 2d', \quad (3)$$

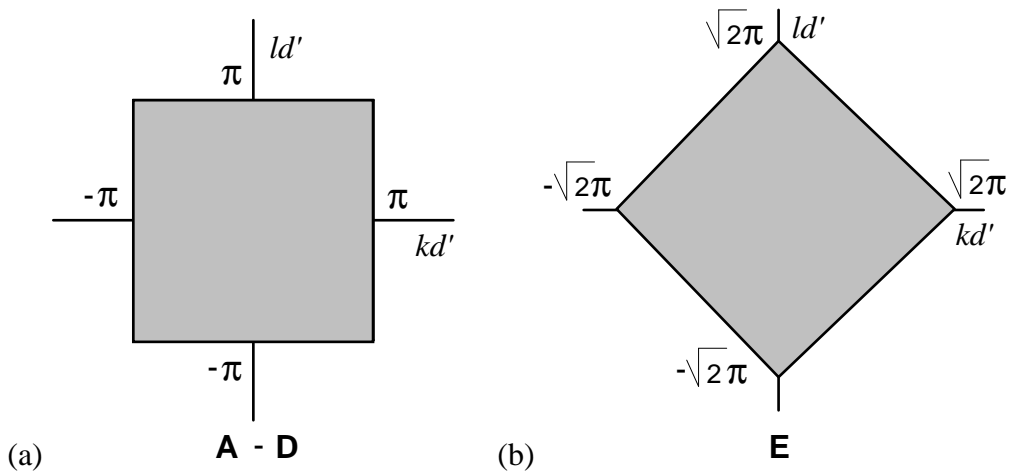
$$L_y = 2d', \quad (4)$$

na osnovu (1) i (2) se konačno dobija

$$kd' = \pi, \quad (5)$$

$$ld' = \pi. \quad (6)$$

Oblasti dozvoljenih talasnih brojeva prikazane su na Slici 8a za mreže A, B, C i D, kada je $d' = d$, a na Slici 8b za E mrežu, pri čemu je $d' = d/\sqrt{2}$.



Slika 8. Oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za: (a) A, B, C i D mreže; (b) E mrežu.

ZADATAK 5.2.

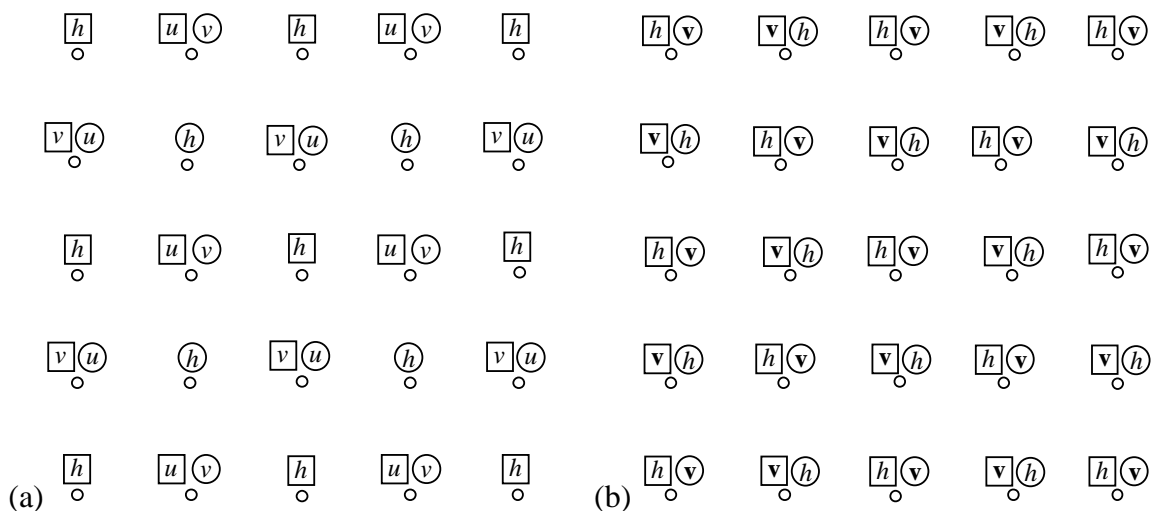
Pokazati da se:

- polurazmaknuta E mreža može dobiti superpozicijom dve C mreže; a
- nerazmaknuta A mreža može dobiti kombinacijom dve E mreže.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

a) E mreža prikazana na Slici 9a sastavljena je od dve C mreže. Jedna C mreža je prikazana veličinama u kvadratima, dok je druga označena veličinama u krugovima.

b) A mreža prikazana na Slici 9b je sastavljena od dve E mreže. Jedna E mreža je prikazana veličinama u kvadratima, dok je druga označena veličinama u krugovima.



Slika 9. (a) E mreža; (b) A mreža.

ZADATAK 5.3.

Znajući raspored zavisno promenljivih h , u , v , χ i ψ na Arakavinim kvadratnim mrežama, korišćenjem centralnih količnika konačnih razlika preko najkraćih rastojanja istorodnih tačaka d' i osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke:

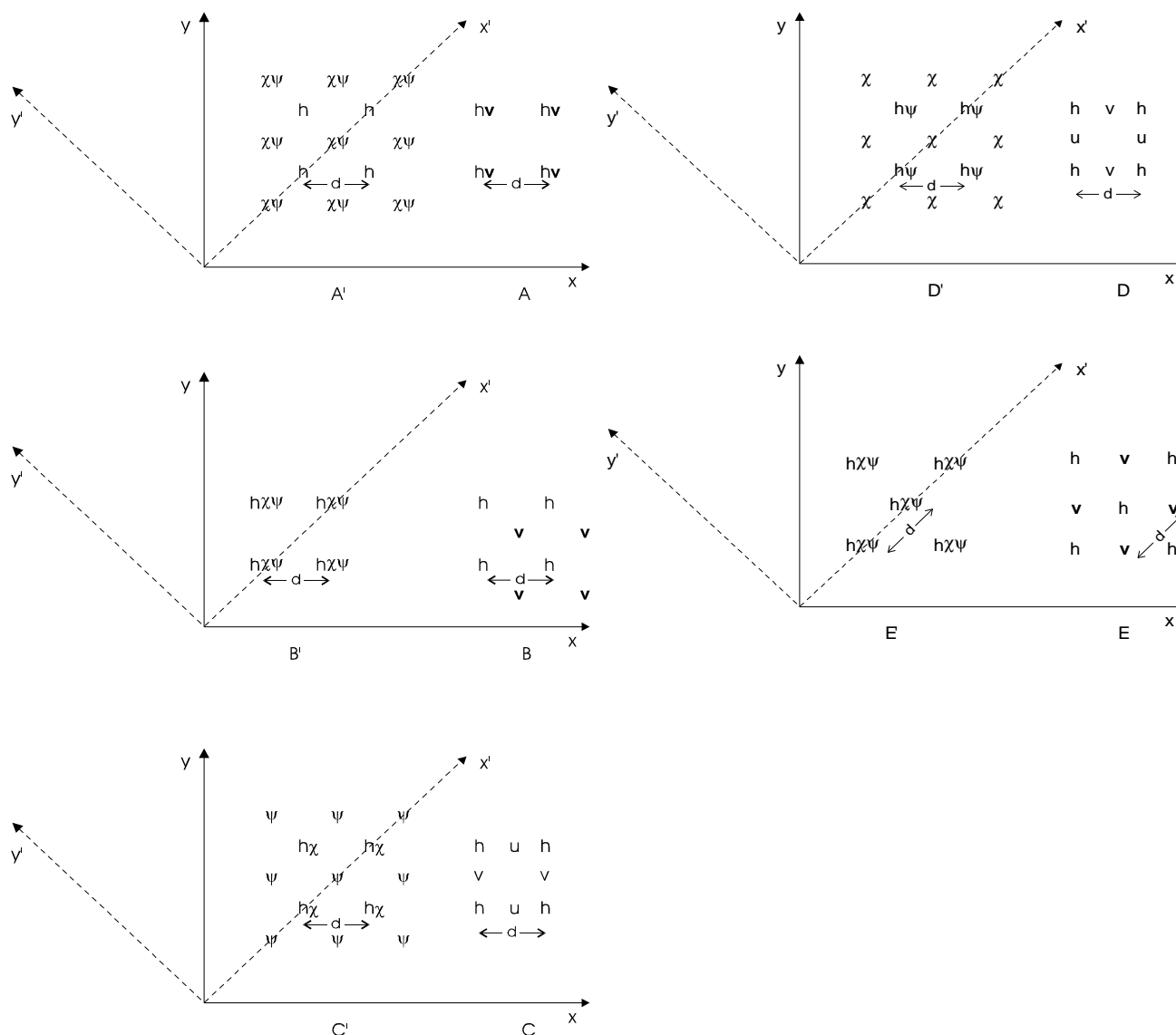
a) izraziti vetar preko potencijala brzine i strujne funkcije; i

b) pronaći relacije između amplituda vetra i potencijala brzine, odnosno strujne funkcije u analitičkom i diskretnom slučaju, pretpostavljajući talasnu prirodu rešenja.

Rešenje:

Na pet panela Slike 10 prikazane su Arakavine kvadratne mreže označene sa:

- A, B, C, D i E u čijim su čvorovima zadate zavisno promenljive h , u i v ; i
- A', B', C', D' i E' u čijim su čvorovima zadate zavisno promenljive h , χ i ψ .



Slika 10. Prostorni raspored promenljivih h , u , v , χ i ψ na Arakavinim kvadratnim mrežama.

Centralni količnik konačnih razlika preko najkraćih rastojanja istorodnih tačaka i osrednjavanje iz dve najbliže istorodne tačke duž x pravca se definišu

$$(\delta_x a)_{i,j} \equiv \delta_x a = \frac{1}{d'}(a_{i+1/2,j} - a_{i-1/2,j}), \quad (1)$$

$$(\overline{a})_{i,j}^x \equiv \overline{a}^x = \frac{1}{2}(a_{i+1/2,j} + a_{i-1/2,j}), \quad (2)$$

gde je a neka promenljiva, a d' je najkraće rastojanje između istorodnih tačaka. Na analogan način se definišu duž y pravca centralni količnik konačnih razlika, $(\delta_y a)_{i,j}$, i osrednjavanje, $(\overline{a})_{i,j}^y$.

Istovremeno, mešoviti operatori se definišu

$$\delta_{xy} a \equiv \delta_x (\delta_y a) \equiv \delta_y (\delta_x a), \quad (3)$$

$$\overline{a}^{xy} \equiv \overline{\overline{a}^x}^y \equiv \overline{\overline{a}^y}^x. \quad (4)$$

Napomena: Uбудuće će se za operatore (1)-(4) koristiti nazivi centralni količnici konačnih razlika, odnosno, operatori osrednjavanja.

a) Korišćenjem relacija iz analitičkog slučaja

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (5)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad (6)$$

i posmatranjem Arakavinih mreža na Slici 10, tražene aproksimacije za vetar na mrežama, redom, mogu se napisati

$$u_A = -\overline{\delta_y \psi}^x + \overline{\delta_x \chi}^y, \quad (7)$$

$$v_A = \overline{\delta_x \psi}^y + \overline{\delta_y \chi}^x, \quad (8)$$

$$u_B = -\overline{\delta_y \psi}^x + \overline{\delta_x \chi}^y, \quad (9)$$

$$v_B = \overline{\delta_x \psi}^y + \overline{\delta_y \chi}^x, \quad (10)$$

$$u_C = -\delta_y \psi + \delta_x \chi, \quad (11)$$

$$v_C = \delta_x \psi + \delta_y \chi, \quad (12)$$

$$u_D = -\delta_y \psi + \delta_x \chi, \quad (13)$$

$$v_D = \delta_x \psi + \delta_y \chi, \quad (14)$$

$$u_E = -\delta_y \Psi + \delta_x \chi, \quad (15)$$

$$v_E = \delta_x \Psi + \delta_y \chi. \quad (16)$$

Identični rezultati ovde prikazanim mogu se naći kod Janjića (1993).

b) Zamenom talasnih rešenja u obliku

$$u, v, \chi, \Psi = \hat{u}, \hat{v}, \hat{\chi}, \hat{\Psi} e^{i(kx+ly)} \quad (17)$$

u analitičkim izrazima (5) i (6), relacije između amplituda vetra i potencijala brzine, odnosno strujne funkcije su

$$\hat{u} = i(-\psi l + \chi k), \quad (18)$$

$$\hat{v} = i(\psi k + \chi l). \quad (19)$$

Ponovo, zamenom talasnih rešenja oblika

$$(u, v, \chi, \Psi)_{A-E} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\chi}, \hat{\Psi})_{A-E} e^{i(kid'+lj d')} \quad (20)$$

u diskretnim izrazima (7)-(16), relacije između amplituda vetra i potencijala brzine, odnosno strujne funkcije su

$$\hat{u}_A = \frac{2i}{d} \left(-\hat{\Psi} \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{ld}{2} + \hat{\chi} \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{ld}{2} \right), \quad (21)$$

$$\hat{v}_A = \frac{2i}{d} \left(\hat{\Psi} \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{ld}{2} + \hat{\chi} \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{ld}{2} \right), \quad (22)$$

$$\hat{u}_B = \frac{2i}{d} \left(-\hat{\Psi} \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{ld}{2} + \hat{\chi} \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{ld}{2} \right), \quad (23)$$

$$\hat{v}_B = \frac{2i}{d} \left(\hat{\Psi} \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{ld}{2} + \hat{\chi} \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{ld}{2} \right), \quad (24)$$

$$\hat{u}_C = \frac{2i}{d} \left(-\hat{\Psi} \sin \frac{ld}{2} + \hat{\chi} \sin \frac{kd}{2} \right), \quad (25)$$

$$\hat{v}_C = \frac{2i}{d} \left(\hat{\Psi} \sin \frac{kd}{2} + \hat{\chi} \sin \frac{ld}{2} \right), \quad (26)$$

$$\hat{u}_D = \frac{2i}{d} \left(-\hat{\Psi} \sin \frac{ld}{2} + \hat{\chi} \sin \frac{kd}{2} \right), \quad (27)$$

$$\hat{v}_D = \frac{2i}{d} \left(\hat{\Psi} \sin \frac{kd}{2} + \hat{\chi} \sin \frac{ld}{2} \right), \quad (28)$$

$$\hat{u}_E = \frac{\sqrt{2}i}{d} \left(-\hat{\psi} \sin \frac{ld}{\sqrt{2}} + \hat{\chi} \sin \frac{kd}{\sqrt{2}} \right), \quad (29)$$

$$\hat{v}_E = \frac{\sqrt{2}i}{d} \left(\hat{\psi} \sin \frac{kd}{\sqrt{2}} + \hat{\chi} \sin \frac{ld}{\sqrt{2}} \right). \quad (30)$$

Identični rezultati ovde prikazanim mogu se naći kod Gavrilov i Tošić (1998).

5.2 GRAVITACIONO-INERCIJALNI TALASI

ZADATAK 5.4.

Diskretizacijom prostornih izvoda jednodimenzionalnog linearizovanog sistema jednačina za gravitacione talase na nerazmaknutoj mreži, odrediti:

- faznu brzinu;
- grupnu brzinu; i
- uporediti ovako dobijene brzine sa analitičkim slučajem.

Rešenje:

Jednodimenzionalni linearizovani sistem jednačina za plitku vodu gravitacionih talasa ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

gde su $g, H = \text{const}$.

- Upotrebom centralnih količnika konačnih razlika (1) i (2) se mogu napisati

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i = -g \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2d}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_i = -H \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2d}, \quad (4)$$

gde je d korak mreže. Zamenom u (3) i (4) talasnih rešenja

$$u_i = \hat{u} e^{i(kd - v^* t)}, \quad (5)$$

$$h_i = \hat{h} e^{i(kd - v^* t)}, \quad (6)$$

dobija se

$$v^* \hat{u} - \frac{g}{d} \sin(kd) \hat{h} = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{H}{d} \sin(kd) \hat{u} - v^* \hat{h} = 0. \quad (8)$$

Rešavanjem algebarskog sistema (7) i (8) za frekvenciju u diskretnom slučaju se dobija

$$v^* = \pm \frac{\sqrt{gH}}{d} \sin kd. \quad (9)$$

Polazeći od opšteg izraza za faznu brzinu

$$c = \frac{v}{k}, \quad (10)$$

u diskretnom slučaju se dobija

$$c^* = \pm \sqrt{gH} \frac{\sin kd}{kd}. \quad (11)$$

b) Polazeći od definicije grupne brzine

$$c_g = \frac{dv}{dk}, \quad (12)$$

u diskretnom slučaju se dobija

$$c_g^* = \pm \sqrt{gH} \cos kd. \quad (13)$$

c) Zamenom u (1) i (2) rešenja u talasnom obliku

$$u = \hat{u} e^{i(kx-vt)}, \quad (14)$$

$$h = \hat{h} e^{i(kx-vt)}, \quad (15)$$

i nakon sređivanja, za faznu i grupnu brzinu u analitičkom slučaju se dobija

$$c = \pm \sqrt{gH}, \quad (16)$$

$$c_g = c. \quad (17)$$

Upoređivanjem (11) i (16) uočava se da je u diskretnom slučaju fazna brzina funkcija talasnog broja, dok je u analitičkom slučaju konstantna. Iz toga proizilazi da su gravitacioni talasi u diskretnom slučaju disperzioni, zbog grupne brzine koja nije konstantna. Identično razmatranje čitalac može naći kod Mesingera i Arakave (1976).

ZADATAK 5.5.

Diskretizacijom prostornih izvoda u dvodimenzionalnom linearizovanom sistemu jednačina za plitku vodu na A mreži, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izračunati i grafički prikazati normalizovane apsolutne frekvencije gravitaciono-inercijalnih talasa, $|v|/f$. Uporediti dobijene rezultate sa analitičkim rešenjem.

Rešenje:

Dvodimenzionalni linearizovani sistem jednačina za plitku vodu u analitičkom obliku glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + fv, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - fu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (3)$$

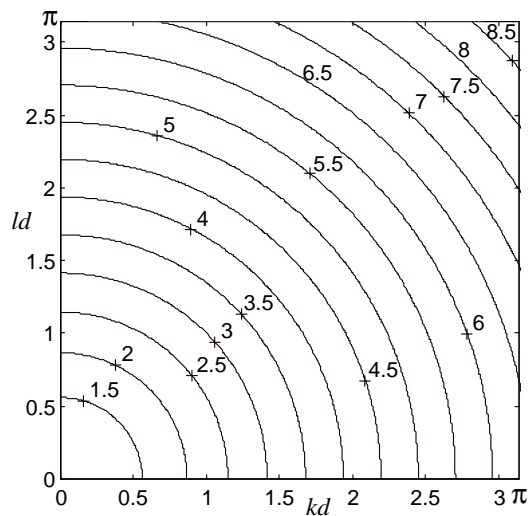
Zamenom u (1), (2) i (3) rešenja u talasnom obliku

$$u, v, h = \hat{u}, \hat{v}, \hat{h} e^{i(kx+ly-vt)}, \quad (4)$$

i nakon sređivanja, za normalizovanu frekvenciju se dobija

$$\left(\frac{v}{f} \right)^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{d^2} (X^2 + Y^2), \quad (5)$$

gde su $\lambda = \sqrt{gH}/f$, $X = kd$ i $Y = ld$. Na Slici 11 prikazane su normalizovane apsolutne frekvencije, $|v|/f$, u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa. Uočava se da frekvencije uvek rastu sa porastom talasnih brojeva.



Slika 11. Normalizovane apsolutne frekvencije u analitičkom slučaju.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 3.

```
% FREKV2AN.M 21:59 4/9/98
% Izracunavanje 2D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% u analitickom slucaju kada je lambda/d=2
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
a = 0; b = pi; korak = 0.01;
% generisanje pravougaone oblasti
X = a:korak:b; Y = a:korak:b; [x,y] = meshgrid(X,Y);
% visine na kojima se crtaju konture
CH1 = [1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5];
%lambda/d=2
ld = 2;
% frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = sqrt(1+ld^2*(x.^2+y.^2));
% crtanje frekvencija
figure(1);
CANAL=contour(X,Y,ANAL,CH1);clabel(CANAL);title('analiticki slucaj');
axis('square');axis([0 b 0 b]);brojose=gca;xlabel('kd'); ylabel('ld');
tikovi = 0:0.5:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
```

Listing 3. Izračunavanje normalizovane apsolutne frekvencije u analitičkom slučaju za grafički prikaz na Slici 11.

Korišćenjem operatora (1)-(4) iz zadatka 5.3, sistem (1)-(3) na A mreži može se napisati

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\overline{\delta_x h^x} + fv, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\overline{\delta_y h^y} - fu, \quad (7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\left(\overline{\delta_x u^x} + \overline{\delta_y v^y}\right). \quad (8)$$

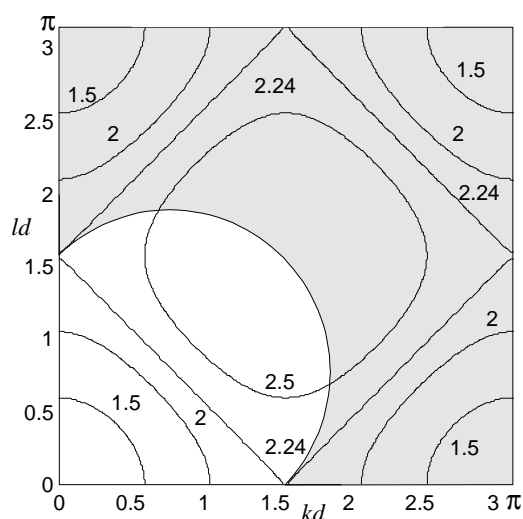
Zamenom u (6)-(8) talasnih rešenja

$$(u, v, h)_{i,j} = \hat{u}, \hat{v}, \hat{h} e^{i(kid+ljd-v^*t)}, \quad (9)$$

za normalizovanu frekvenciju se dobija (Arakawa i Lamb, 1977)

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{d^2} (\sin^2 X + \sin^2 Y). \quad (10)$$

Na Slici 12 prikazane su normalizovane apsolutne frekvencije, $|v^*|/f$, na A mreži u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa. Upoređujući Slike 11 i 12, uočava se osenčena oblast u kojoj diskretne frekvencije opadaju sa porastom talasnih brojeva.



Slika 12. Normalizovane apsolutne frekvencije na A mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 4.

```
% FREKV2A.M 22:06 4/9/98
% Izracunavanje 2D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na A mrezi kada je lambda/d=2
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
a = 0; b = pi; korak = 0.01;
% generisanje pravougaone oblasti
X = a:korak:b; Y = a:korak:b; [x,y] = meshgrid(X,Y);
% visine na kojima se crtaju konture
CH2 = [0 0.5 1 1.5 2 2.25 2.5 3];
%lambda/d=2
ld = 2;
% frekvencije na A mrezi
A = sqrt(1 +ld^2*(sin(x).^2+sin(y).^2));
% crtanje frekvencija
figure(1);
CA = contour(X,Y,A,CH2); clabel(CA); title('A-mreza');
axis('square');axis([0 b 0 b]);brojose=gca;xlabel('kd'); ylabel('ld');
tikovi = 0:0.5:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
```

Listing 4. Izračunavanje normalizovane apsolutne frekvencije na A mreži za grafički prikaz na Slici 12.

ZADATAK 5.6.

Diskretizacijom prostornih izvoda u dvodimenzionalnom linearizovanom sistemu jednačina za plitku vodu na B mreži, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izračunati i grafički prikazati normalizovane apsolutne frekvencije gravitaciono-inercijalnih talasa, $|v|/f$. Uporediti dobijene rezultate sa analitičkim rešenjem.

Rešenje:

Korišćenjem operatora (1)-(4) iz zadatka 5.3, sistem (1)-(3) iz zadatka 5.5 na B mreži ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\overline{\delta_x h^y} + fv, \quad (1)$$

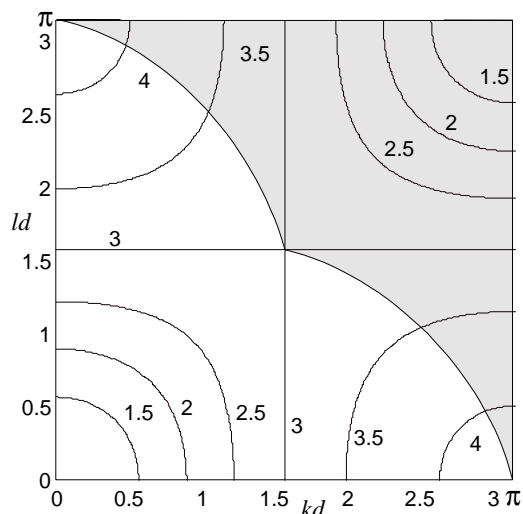
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\overline{\delta_y h^x} - fu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H(\overline{\delta_x u^y} + \overline{\delta_y v^x}). \quad (3)$$

Zamenom u (1)-(3) talasnih rešenja (9) iz zadatka 5.5 za normalizovanu frekvenciju se dobija (Arakawa i Lamb, 1977)

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = 1 + 4\frac{\lambda^2}{d^2} \left(\sin^2 \frac{X}{2} \cos^2 \frac{Y}{2} + \cos^2 \frac{X}{2} \sin^2 \frac{Y}{2} \right). \quad (4)$$

Na Slici 13 prikazane su normalizovane apsolutne frekvencije, $|v^*|/f$, na B mreži u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa. Upoređujući Slike 11 i 13, uočava se osenčena oblast u kojoj diskretne frekvencije opadaju sa porastom talasnih brojeva.



Slika 13. Normalizovane apsolutne frekvencije na B mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 5.

```
% FREKV2B.M 22:08 4/9/98
% Izracunavanje 2D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na B mrezi kada je lambda/d=2
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
a = 0; b = pi; korak = 0.01;
% generisanje pravougaone oblasti
X = a:korak:b; Y = a:korak:b; [x,y] = meshgrid(X,Y);
% visine na kojima se crtaju konture
CH1 = [1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5];
%lambda/d=2
ld = 2;
% frekvencije na B mrezi
B=sqrt(1+4*ld^2*(sin(x/2).^2.*cos(y/2).^2+sin(y/2).^2.*cos(x/2).^2));
% crtanje frekvencija
figure(1);
CB = contour(X,Y,B,CH1); clabel(CB); title('B-mreza');
axis('square');axis([0 b 0 b]);brojose=gca;xlabel('kd'); ylabel('ld');
tikovi = 0:0.5:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
```

Listing 5. Izračunavanje normalizovane apsolutne frekvencije na B mreži za grafički prikaz na Slici 13.

ZADATAK 5.7.

Diskretizacijom prostornih izvoda u dvodimenzionalnom linearizovanom sistemu jednačina za plitku vodu na C mreži, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izračunati i grafički prikazati normalizovane apsolutne frekvencije gravitaciono-inercijalnih talasa, $|v|/f$. Uporediti dobijene rezultate sa analitičkim rešenjem.

Rešenje:

Korišćenjem operatora (1)-(4) iz zadatka 5.3, sistem (1)-(3) iz zadatka 5.5 na C mreži ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\delta_x h + f\bar{v}^{x,y}, \quad (1)$$

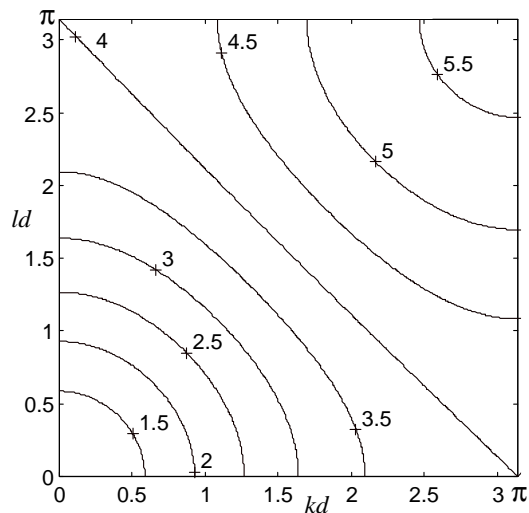
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\delta_y h - f\bar{u}^{x,y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H(\delta_x u + \delta_y v). \quad (3)$$

Zamenom u (1)-(3) talasnih rešenja (9) iz zadatka 5.5, za normalizovanu frekvenciju se dobija (Arakawa i Lamb, 1977)

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{X}{2} \cos^2 \frac{Y}{2} + 4 \frac{\lambda^2}{d^2} \left(\sin^2 \frac{X}{2} + \sin^2 \frac{Y}{2} \right). \quad (4)$$

Na Slici 14 prikazane su normalizovane apsolutne frekvencije, $|v^*|/f$, na C mreži u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za $\lambda/d=2.0$ dobijene iz MATLAB programa. Upoređujući Slike 11 i 14, uočava se sporiji rast diskretnih frekvencija sa porastom talasnih brojeva.



Slika 14. Normalizovane apsolutne frekvencije na C mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 6.

```
% FREKV2C.M 12:30 1/5/98
% Izracunavanje 2D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na C mrezi kada je lambda/d=2
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
a = 0; b = pi; korak = 0.01;
% generisanje pravougaone oblasti
X = a:korak:b; Y = a:korak:b; [x,y] = meshgrid(X,Y);
% visine na kojima se crtaju konture
CH2 = [1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5];
%lambda/d=2
ld = 2;
C =sqrt(cos(x/2).^2.*cos(y/2).^2 + 4*ld^2*(sin(x/2).^2+sin(y/2).^2));
% crtanje frekvencija
figure(1);
CC = contour(X,Y,C,CH2); clabel(CC); title('C-mreza');
axis('square');axis([0 b 0 b]);brojose=gca;xlabel('kd'); ylabel('ld');
tikovi = 0:0.5:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
```

Listing 6. Izračunavanje normalizovane apsolutne frekvencije na C mreži za grafički prikaz na Slici 14.

ZADATAK 5.8.

Diskretizacijom prostornih izvoda u dvodimenzionalnom linearizovanom sistemu jednačina za plitku vodu na D mreži, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izračunati i grafički prikazati normalizovane apsolutne frekvencije gravitaciono-inercijalnih talasa, $|v|/f$. Uporediti dobijene rezultate sa analitičkim rešenjem.

Rešenje:

Korišćenjem operatora (1)-(4) iz zadatka 5.3, sistem (1)-(3) iz zadatka 5.5 na D mreži ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \overline{\delta_x h^{yx}} + f \overline{v^{yx}}, \quad (1)$$

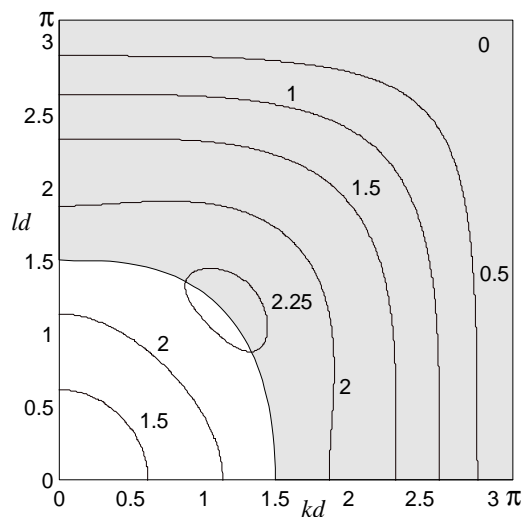
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \overline{\delta_y h^{xy}} - f \overline{u^{xy}}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(\overline{\delta_x u^{yx}} + \overline{\delta_y v^{xy}} \right). \quad (3)$$

Zamenom u (1)-(3) talasnih rešenja (9) iz zadatka 5.5 za normalizovanu frekvenciju se dobija (Arakawa i Lamb, 1977)

$$\left(\frac{v^*}{f} \right)^2 = \cos^2 \frac{X}{2} \cos^2 \frac{Y}{2} + \frac{\lambda^2}{d^2} \left(\sin^2 X \cos^2 \frac{Y}{2} + \cos^2 \frac{X}{2} \sin^2 Y \right). \quad (4)$$

Na Slici 15 prikazane su normalizovane apsolutne frekvencije, $|v^*|/f$, na D mreži u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa. Upoređujući Slike 11 i 15, uočava se osenčena oblast u kojoj diskretne frekvencije opadaju sa porastom talasnih brojeva.



Slika 15. Normalizovane apsolutne frekvencije na D mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 7.

```
% FREKV2D.M 22:11 4/9/98
% Izracunavanje 2D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na D mrezi kada je lambda/d=2
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
a = 0; b = pi; korak = 0.01;
% generisanje pravougaone oblasti
X = a:korak:b; Y = a:korak:b; [x,y] = meshgrid(X,Y);
% visine na kojima se crtaju konture
CH2 = [0 0.5 1 1.5 2 2.25 2.5 3];
%lambda/d=2
ld = 2;
% frekvencije na D mrezi
D = sqrt(cos(x/2).^2.*cos(y/2).^2+ ...
    ld^2*(sin(x).^2.*cos(y/2).^2+cos(x/2).^2.*sin(y).^2));
% crtanje frekvencija
figure(1);
CD = contour(X,Y,D,CH2); clabel(CD); title('D-mreza');
axis('square');axis([0 b 0 b]);brojose=gca;xlabel('kd'); ylabel('ld');
tikovi = 0:0.5:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
```

Listing 7. Izračunavanje normalizovane apsolutne frekvencije na D mreži za grafički prikaz na Slici 15.

ZADATAK 5.9.

Diskretizacijom prostornih izvoda u dvodimenzionalnom linearizovanom sistemu jednačina za plitku vodu na E mreži, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika, izračunati i grafički prikazati normalizovane apsolutne frekvencije gravitaciono-inercijalnih talasa, $|v|/f$. Uporediti dobijene rezultate sa analitičkim rešenjem.

Rešenje:

Korišćenjem operatora (1)-(4) iz zadatka 5.3, sistem (1)-(3) iz zadatka 5.5 na E mreži ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\delta_x h + fv, \quad (1)$$

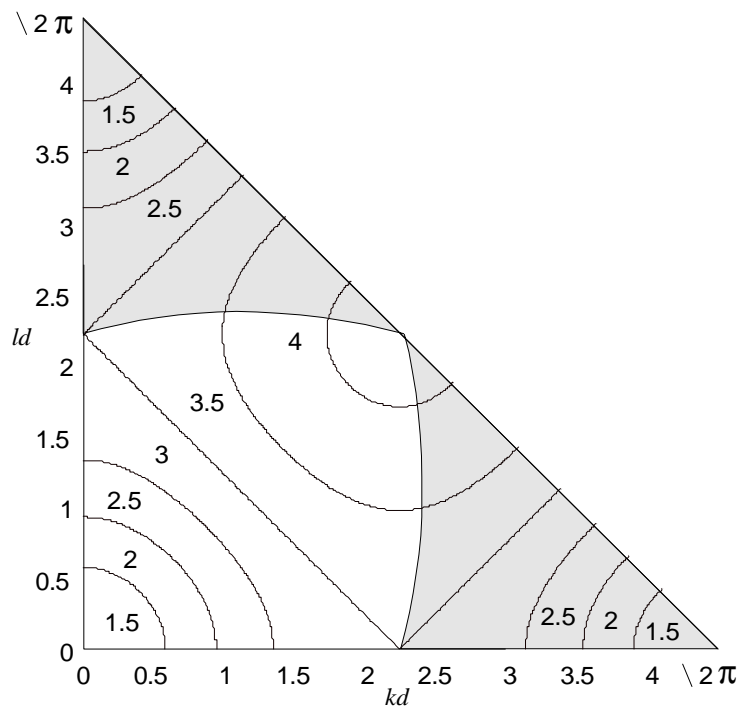
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\delta_y h - fu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H(\delta_x u + \delta_y v). \quad (3)$$

Zamenom u (1)-(3) talasnih rešenja (9) iz zadatka 5.5 za normalizovanu frekvenciju se dobija (Arakawa i Lamb, 1977)

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = 1 + 2\frac{\lambda^2}{d^2}\left(\sin^2\frac{X}{\sqrt{2}} + \sin^2\frac{Y}{\sqrt{2}}\right). \quad (4)$$

Na Slici 16 prikazane su normalizovane apsolutne frekvencije, $|v^*|/f$, na E mreži u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa. Upoređujući Slike 11 i 16, uočavaju se dve osenčene oblasti u kojima diskretne frekvencije opadaju sa porastom talasnih brojeva.



Slika 16. Normalizovane apsolutne frekvencije na E mreži.

```

% FREKV2E.M 22:12 4/9/98
% Izracunavanje 2D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na E mrezi kada je lambda/d=2
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
r = sqrt(2); a = 0; b = pi; korak = 0.01;
% generisanje oblasti
X = a:korak:r*b; Y = a:korak:r*b; [x,y] = meshgrid(X,Y);
% visine na kojima se crtaju konture
CH1 = [1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5];
% lambda/d=2
ld = 2;
% frekvencije na E mrezi
E = sqrt(1 + 2*ld^2*(sin(x/r).^2+sin(y/r).^2));
% crtanje frekvencija
figure(1);
CE = contour(X,Y,E,CH1); clabel(CE); title('E-mreza');
axis('square'); axis([0 r*b 0 r*b]); brojose = gca;
tikovi = 0:0.5:r*b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
xlabel('kd'); ylabel('ld');

```

Listing 8. Izračunavanje normalizovane apsolutne frekvencije na E mreži za grafički prikaz na Slici 16.

ZADATAK 5.10.

Polazeći od opštih izraza za frekvenciju gravitaciono-inercijalnih talasa:

- napisati program u FORTRANu za izračunavanje jednodimenzionalne normalizovane apsolutne frekvencije, $|v|/f$, u analitičkom slučaju i na A mreži;
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 2.0$ i
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 0.1$.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

a) Svođenjem na jednu dimenziju izraza (5) i (10) za normalizovane frekvencije (videti zadatak 5.5) u analitičkom i diskretnom (Winninghoff, 1968) slučaju se dobija

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 X^2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 X. \quad (2)$$

Primer programa u FORTRANu za izračunavanje normalizovanih apsolutnih frekvencija i rezultati programa dati su u Listingu 9.

```

C *****
C * PROGRAM FREKVA1D ZA IZRACUNAVANJE 1D FREKVENCIJA GIT *
C * NA A MREZI I U ANAL. SLUCAJU KADA JE LAMDA/D=2 i 0.1 *
C * *
C * PROGRAMERI: I.A. TOSIC i M.B. GAVRILOV, BEOGRAD, 1997 *
C *****
PROGRAM FREKVA1D
C
C REAL LD1, LD2
C
C OPEN(UNIT=11,FILE='AMREZA2.DAT')
C OPEN(UNIT=21,FILE='AMREZA01.DAT')
C
C PI = 3.141596
C LD1 = 2.0
C LD2 = 0.1
C
C DO 10 I=0,10
C X = I/10.*PI
C A = SQRT(1. + LD1**2*SIN(X)**2)
C ANAL = SQRT(1. + LD1**2*X**2)
C WRITE(11,12) X, A, ANAL
12 FORMAT(3F15.5)
10 CONTINUE
C
C DO 20 I=0,10
C X = I/10.*PI
C A = SQRT(1. + LD2**2*SIN(X)**2)
C ANAL = SQRT(1. + LD2**2*X**2)
C WRITE(21,12) X, A, ANAL
20 CONTINUE
C
C CLOSE(UNIT=11)
C CLOSE(UNIT=21)
C END

```

TABELA REZULTATA ZA LAMBDA/D=2.0		
X	A	ANAL
0.00000	1.00000	1.00000
0.31416	1.17557	1.18101
0.62832	1.54336	1.60597
0.94248	1.90211	2.13379
1.25664	2.14896	2.70491
1.57080	2.23607	3.29691
1.88496	2.14896	3.90029
2.19912	1.90211	4.51048
2.51328	1.54336	5.12506
2.82744	1.17557	5.74261
3.14160	1.00000	6.36227

TABELA REZULTATA ZA LAMBDA/D=0.1		
X	A	ANAL
0.00000	1.00000	1.00000
0.31416	1.00048	1.00049
0.62832	1.00173	1.00197
0.94248	1.00327	1.00443
1.25664	1.00451	1.00786
1.57080	1.00499	1.01226
1.88496	1.00451	1.01761
2.19912	1.00327	1.02390
2.51328	1.00173	1.03110
2.82744	1.00048	1.03920
3.14160	1.00000	1.04819

Listing 9. Izračunavanje normalizovanih apsolutnih frekvencija i prikaz rezultata u analitičkom slučaju i na A mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovanih apsolutnih frekvencija dat je u Listingu 10.

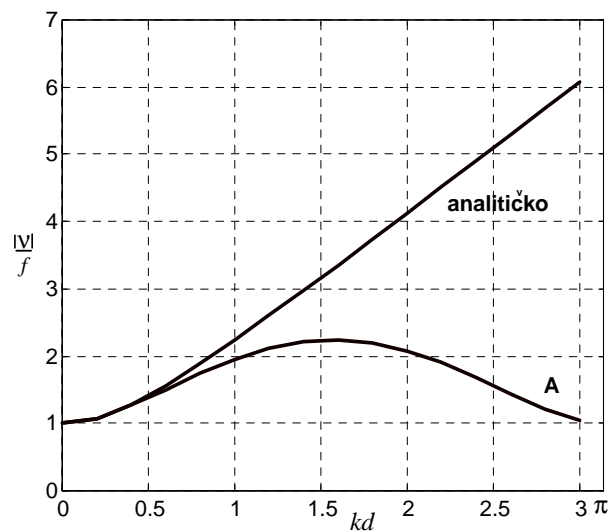

```

% FREKV1A.M 22:15 4/9/98
% Izracunavanje 1D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na A mrezi kada je lambda/d=2.0 i 0.1
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
%generisanje x-ose
a = 0; b = pi; korak = 0.1; x = a:korak:b;
% vrednost za lambda/d
disp('uneti vrednost za ld 0.1 ili 2')
ld=input('ld=')
%frekvencije na A mrezi
A = sqrt(1 +ld^2*sin(x).^2);
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = sqrt(1+ld^2*x.^2);
%crtanje frekvencija
figure(1); plot(x,ANAL,x,A);
title('A-mreza'); xlabel('kd'); ylabel('ni/f'); grid

```

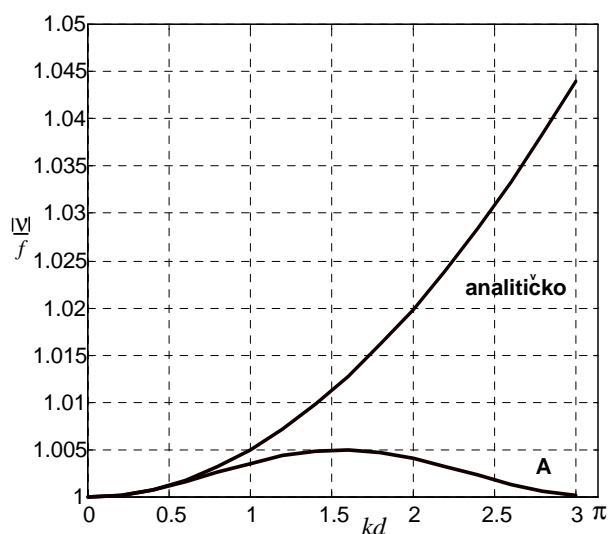
Listing 10. Izračunavanje normalizovanih apsolutnih frekvencija za grafički prikaz na Slikama 17 i 18 u analitičkom slučaju i na A mreži.

b) Na Slici 17 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 17. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na A mreži za $\lambda/d = 2.0$.

c) Na Slici 18 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 0.1$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 18. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na A mreži za $\lambda/d = 0.1$.

ZADATAK 5.11.

Polazeći od opštih izraza za frekvenciju gravitaciono-inercijalnih talasa:

- napisati program u FORTRANu za izračunavanje jednodimenzionalne normalizovane apsolutne frekvencije, $|v|/f$, u analitičkom slučaju i na B mreži;
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 2.0$ i
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 0.1$.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

a) Svođenjem na jednu dimenziju izraza (5) (videti zadatak 5.5) i (4) (videti zadatak 5.6) za normalizovane frekvencije u analitičkom i diskretnom (Winninghoff, 1968) slučaju, dobija se

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 X^2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = 1 + 4\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{X}{2}. \quad (2)$$

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 11.

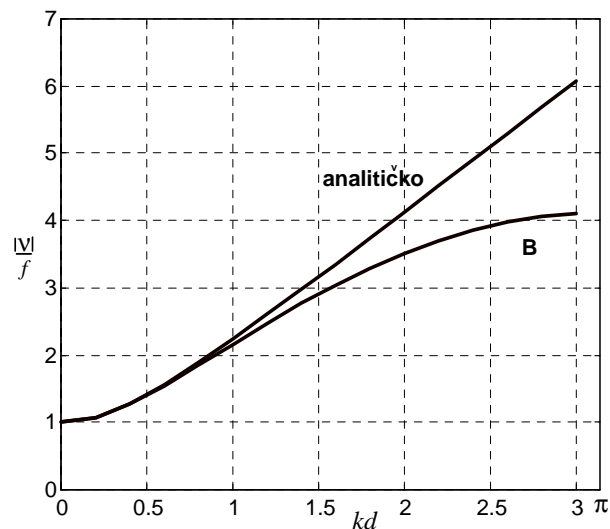
```

% FREKV1B.M 22:23 4/9/98
% Izracunavanje 1D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na B mrezi kada je lambda/d=2.0 i 0.1
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
%generisanje x-ose
a = 0; b = pi; korak = 0.1; x = a:korak:b;
% vrednost za lambda/d
disp('uneti vrednost za ld 0.1 ili 2')
ld=input('ld=')
%frekvencije na B mrezi
B = sqrt(1 +4*ld^2*sin(x/2).^2);
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = sqrt(1+ld^2*x.^2);
%crtanje frekvencija
figure(1); plot(x,ANAL,x,B);
title('B-mreza'); xlabel('kd'); ylabel('ni/f'); grid

```

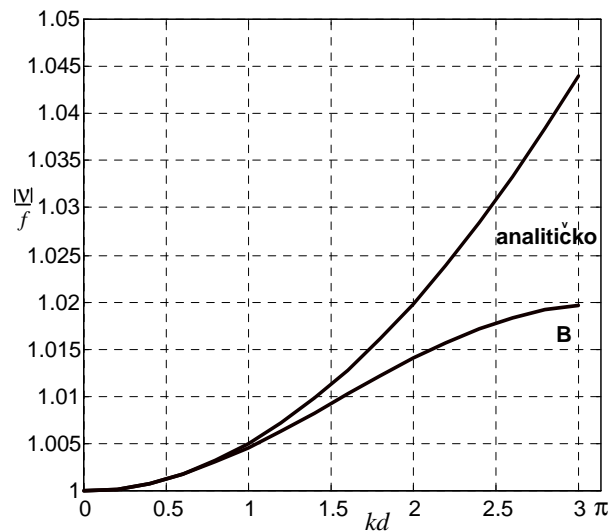
Listing 11. Izračunavanje normalizovanih apsolutnih frekvencija za grafički prikaz na Slikama 19 i 20 u analitičkom slučaju i na B mreži.

b) Na Slici 19 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 19. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na B mreži za $\lambda/d = 2.0$.

c) Na Slici 20 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 0.1$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 20. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na B mreži za $\lambda/d = 0.1$.

ZADATAK 5.12.

Polazeći od opštih izraza za frekvenciju gravitaciono-inercijalnih talasa:

- napisati program u FORTRANu za izračunavanje jednodimenzionalne normalizovane apsolutne frekvencije, $|v|/f$, u analitičkom slučaju i na C mreži;
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 2.0$ i
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 0.1$.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

a) Svođenjem na jednu dimenziju izraza (5) (videti zadatak 5.5) i (4) (videti zadatak 5.7) za normalizovane frekvencije u analitičkom i diskretnom (Winninghoff, 1968) slučaju, dobija se

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 X^2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{X}{2} + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{X}{2}. \quad (2)$$

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 12.

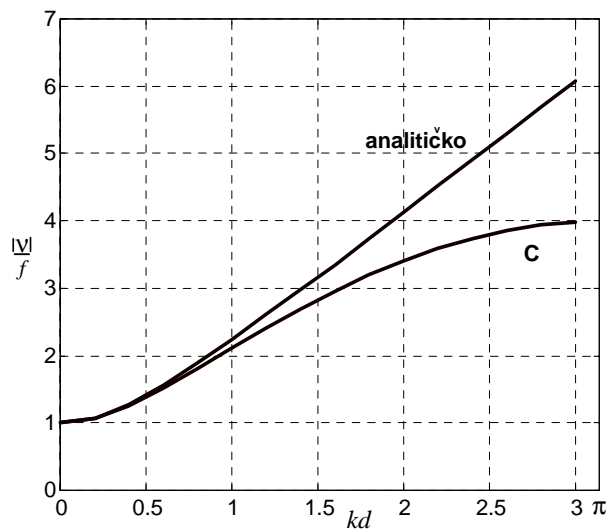
```

% FREKV1C.M 22:28 4/9/98
% Izracunavanje 1D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na C mrezi kada je lambda/d=2.0 i 0.1
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
%generisanje x-ose
a = 0; b = pi; korak = 0.1; x = a:korak:b;
% vrednost za lambda/d
disp('uneti vrednost za ld 0.1 ili 2')
ld=input('ld=')
%frekvencije na C mrezi
C = sqrt( cos(x/2).^2 + 4*ld^2*sin(x/2).^2 );
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = sqrt(1+ld^2*x.^2);
%crtanje frekvencija
figure(1); plot(x,ANAL,x,C);
title('C-mreza'); xlabel('kd'); ylabel('ni/f'); grid

```

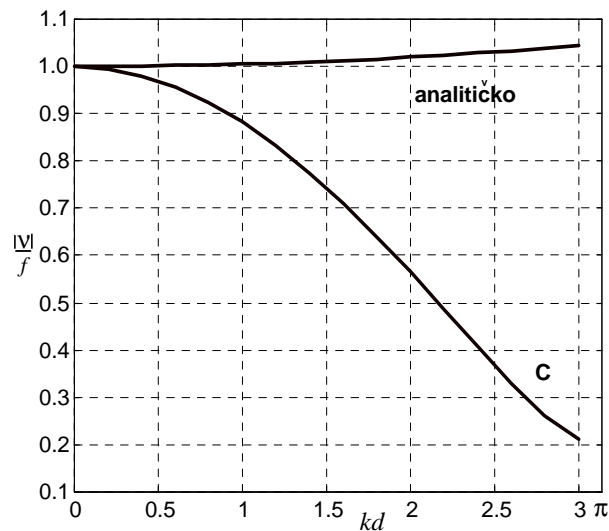
Listing 12. Izračunavanje normalizovanih apsolutnih frekvencija za grafički prikaz na Slikama 21 i 22 u analitičkom slučaju i na C mreži.

b) Na Slici 21 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 21. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na C mreži za $\lambda/d = 2.0$.

c) Na Slici 22 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 0.1$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 22. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na C mreži za $\lambda/d = 0.1$.

ZADATAK 5.13.

Polazeći od opštih izraza za frekvenciju gravitaciono-inercijalnih talasa:

- napisati program u FORTRANu za izračunavanje jednodimenzionalne normalizovane apsolutne frekvencije, $|v|/f$, u analitičkom slučaju i na D mreži;
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 2.0$ i
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 0.1$.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

a) Svođenjem na jednu dimenziju izraza (5) (videti zadatak 5.5) i (4) (videti zadatak 5.8) za normalizovane frekvencije u analitičkom i diskretnom (Winninghoff, 1968) slučaju, dobija se

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 X^2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{X}{2} + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 X. \quad (2)$$

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 13.

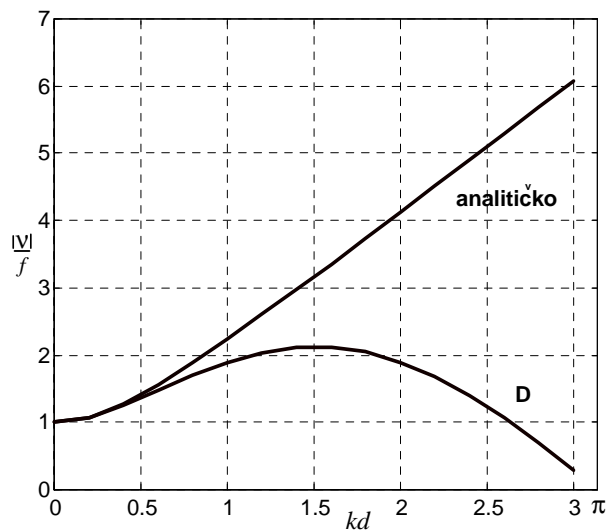
```

% FREKV1D.M 22:31 4/9/98
% Izracunavanje 1D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na D mrezi kada je lambda/d=2.0 i 0.1
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
%generisanje x-ose
a = 0; b = pi; korak = 0.1; x = a:korak:b;
% vrednost za lambda/d
disp('uneti vrednost za ld 0.1 ili 2')
ld=input('ld=')
%frekvencije na D mrezi
D = sqrt( cos(x/2).^2 + ld^2*sin(x).^2);
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = sqrt(1+ld^2*x.^2);
%crtanje frekvencija
figure(1); plot(x,ANAL,x,D);
title('D-mreza'); xlabel('kd'); ylabel('ni/f'); grid

```

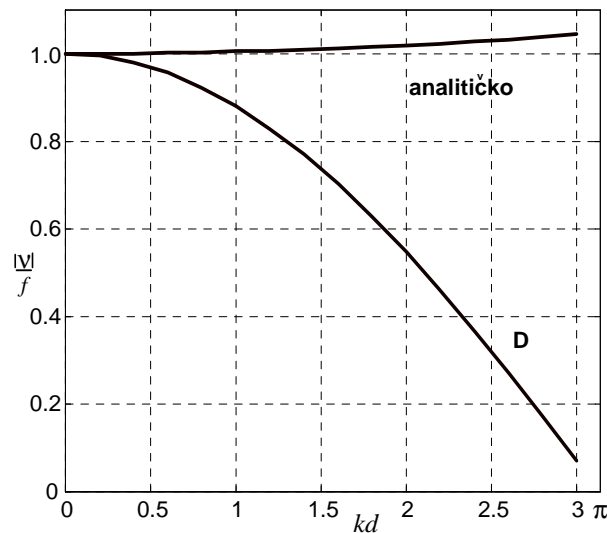
Listing 13. Izračunavanje normalizovanih apsolutnih frekvencija za grafički prikaz na Slikama 23 i 24 u analitičkom slučaju i na D mreži.

b) Na Slici 23 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 23. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na D mreži za $\lambda/d = 2.0$.

c) Na Slici 24 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 0.1$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 24. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na D mreži za $\lambda/d = 0.1$.

ZADATAK 5.14.

Polazeći od opštih izraza za frekvenciju gravitaciono-inercijalnih talasa:

- napisati program u FORTRANu za izračunavanje jednodimenzionalne normalizovane apsolutne frekvencije, $|v|/f$, u analitičkom slučaju i na E mreži;
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 2.0$ i
- prikazati grafički dobijene rezultate kada je $\lambda/d = 0.1$.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

a) Svođenjem na jednu dimenziju izraza (5) (videti zadatak 5.5) i (4) (videti zadatak 5.9) za normalizovane frekvencije u analitičkom i diskretnom (Winninghoff, 1968) slučaju, dobija se

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 X^2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{X}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje normalizovane apsolutne frekvencije dat je u Listingu 14.

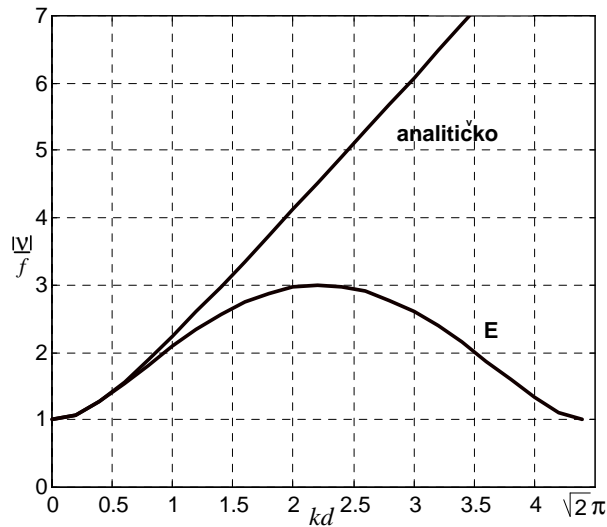

```

% FREKVLE.M 20:17 1/5/98
% Izracunavanje 1D normalizovanih apsolutnih frekvencija
% gravitaciono-inercijalnih talasa
% na E mrezi kada je lambda/d=2.0 i 0.1
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
clear all, close all
r = sqrt(2);
%generisanje x-ose
a = 0; b = pi; korak = 0.1; x = a:korak:r*b;
% vrednost za lambda/d
disp('uneti vrednost za ld 0.1 ili 2')
ld=input('ld=')
%frekvencije na E mrezi
E = sqrt(1 + 2*ld^2*sin(x/r).^2);
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = sqrt(1+ld^2*x.^2);
%crtanje frekvencija
figure(1); plot(x,ANAL,x,E);
title('E-mreza'); xlabel('kd'); ylabel('ni/f'); grid

```

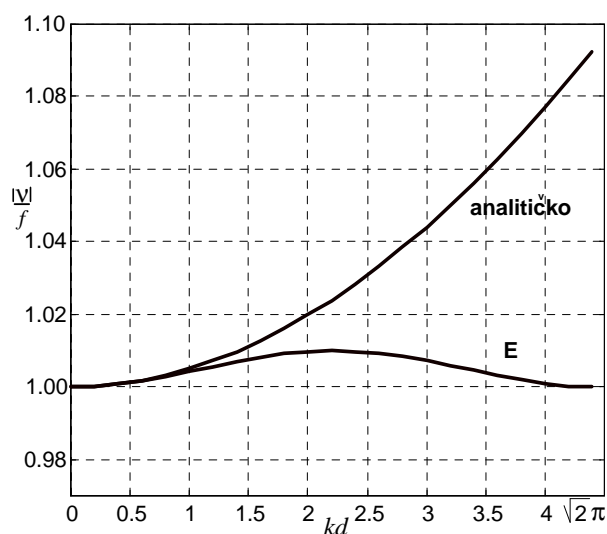
Listing 14. Izračunavanje normalizovanih apsolutnih frekvencija za grafički prikaz na Slikama 25 i 26 u analitičkom slučaju i na E mreži.

b) Na Slici 25 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 2.0$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 25. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na E mreži za $\lambda/d = 2.0$.

c) Na Slici 26 prikazane su zavisnosti $|v|/f$ od kd u diskretnom i analitičkom slučaju za $\lambda/d = 0.1$ dobijene iz MATLAB programa.



Slika 26. Zavisnost $|v|/f$ od kd u analitičkom slučaju i na E mreži za $\lambda/d = 0.1$.

ZADATAK 5.15.

Dokazati identičnost (ekvivalentnost) mreža B i E za gravitaciono-inercijalne talase.

Rešenje (Rančić, 1988):

Zamenom rešenja u talasnom obliku

$$(u, v, h)_B = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h})_B e^{i(k_B d + l_B j d - v^* t)}, \quad (1)$$

u sistem (1)-(3) u zadatku 5.6, na B mreži se dobija

$$-i v^* \hat{u}_B = -2 \frac{g i}{d} \sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} \hat{h}_B + f \hat{v}_B, \quad (2)$$

$$-i v^* \hat{v}_B = -2 \frac{g i}{d} \sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} \hat{h}_B - f \hat{u}_B, \quad (3)$$

$$-i v^* \hat{h}_B = -\frac{2iH}{d} \left(\sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} \hat{u}_B + \sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} \hat{v}_B \right). \quad (4)$$

Zamenom rešenja u talasnom obliku

$$(u, v, h)_E = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h})_E e^{i(k_E \sqrt{2} d + l_E j \sqrt{2} d - v^* t)}, \quad (5)$$

u sistem (1)-(3) u zadatku 5.9, na E mreži se dobija

$$-iv^* \hat{u}_E = -\sqrt{2} \frac{gi}{d} \sin \frac{k_E d}{\sqrt{2}} \hat{h}_E + f \hat{v}_E, \quad (6)$$

$$-iv^* \hat{v}_E = -\sqrt{2} \frac{gi}{d} \sin \frac{l_E d}{\sqrt{2}} \hat{h}_E - f \hat{u}_E, \quad (7)$$

$$-iv^* \hat{h}_E = -\frac{\sqrt{2}iH}{d} \left(\sin \frac{k_E d}{\sqrt{2}} \hat{u}_E + \sin \frac{l_E d}{\sqrt{2}} \hat{v}_E \right). \quad (8)$$

Pošto su B i E mreže rotirane jedna u odnosu na drugu za $\pi/4$, relacije između komponenti brzina na mrežama se mogu napisati u obliku

$$\hat{u}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{u}_E + \hat{v}_E), \quad (9)$$

$$\hat{v}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\hat{u}_E + \hat{v}_E). \quad (10)$$

Zamenom (9) i (10) u (2)-(4), dobija se

$$-iv^* \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{u}_E + \hat{v}_E) = -2 \frac{gi}{d} \sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} \hat{h}_B + \frac{\sqrt{2}}{2} f (-\hat{u}_E + \hat{v}_E), \quad (11)$$

$$-iv^* \frac{\sqrt{2}}{2} (-\hat{u}_E + \hat{v}_E) = -2 \frac{gi}{d} \sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} \hat{h}_B - f \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{u}_E + \hat{v}_E), \quad (12)$$

$$-iv^* \hat{h}_B = -\frac{2iH}{d} \left[\sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{u}_E + \hat{v}_E) + \sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (-\hat{u}_E + \hat{v}_E) \right]. \quad (13)$$

Ako se (11) sabere sa (12) i (12) oduzme od (11), a zatim se tako dobijene jednačine i (13) podele sa $\sqrt{2}$, dobija se

$$-iv^* \hat{v}_E = -\sqrt{2} \frac{gi}{d} \left(\sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} + \sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} \right) \hat{h}_B - f \hat{u}_E, \quad (14)$$

$$-iv^* \hat{u}_E = -\sqrt{2} \frac{gi}{d} \left(\sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} - \sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} \right) \hat{h}_B + f \hat{v}_E, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -iv^* \hat{h}_E = & -\frac{\sqrt{2}iH}{d} \left[\left(\sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} + \sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} \right) \hat{u}_E + \right. \\ & \left. + \left(\sin \frac{l_B d}{2} \cos \frac{k_B d}{2} - \sin \frac{k_B d}{2} \cos \frac{l_B d}{2} \right) \hat{v}_E \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Primenom adicionih teorema¹⁰ sistem (14)-(16) postaje

$$-i\nu^* \hat{u}_E = -\sqrt{2} \frac{gi}{d} \sin\left[(k_B - l_B) \frac{d}{2}\right] \hat{h}_B + f \hat{v}_E, \quad (17)$$

$$-i\nu^* \hat{v}_E = -\sqrt{2} \frac{gi}{d} \sin\left[(k_B + l_B) \frac{d}{2}\right] \hat{h}_B - f \hat{u}_E, \quad (18)$$

$$-i\nu^* \hat{h}_B = -\frac{\sqrt{2}iH}{d} \left\{ \sin\left[(k_B - l_B) \frac{d}{2}\right] \hat{u}_E + \sin\left[(k_B + l_B) \frac{d}{2}\right] \hat{v}_E \right\}. \quad (19)$$

Po analogiji sa (9) i (10), za talasne brojeve se dobija

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(k_E + l_E) = k_B, \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-k_E + l_E) = l_B. \quad (21)$$

Korišćenjem (20) i (21), i znajući da se h tačke na B i E mrežama poklapaju, očigledno je da sistem (17)-(19), B mreža, postaje identičan sistemu (6)-(8), E mreža.

¹⁰

$$\begin{aligned} \sin(k+l) \frac{d}{2} &= \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{ld}{2} + \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{ld}{2}, \\ \sin(-k+l) \frac{d}{2} &= -\sin \frac{kd}{2} \cos \frac{ld}{2} + \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{ld}{2}. \end{aligned}$$

NAMERNO PRAZNA STRANA

5.3 ROSBIJEVI TALASI

ZADATAK 5.16.

Diskretizacijom samo članova podešavanja dvodimenzionalnog linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje u bezdivergentnom slučaju, a upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izvesti komponente geostrofskog vetra na A mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Dvodimenzionalni linearizovani sistem jednačina za plitku vodu u beta ravni ima oblik

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v \right] - f_0 v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u \right] + f_0 u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

Za procese sinoptičkih i većih razmera u slučaju bezdivergentnog kretanja članovi u uglastim zagradama mogu se zanemariti u odnosu na članove podešavanja, nakon čega se sistem (1)-(3) može napisati

$$-f_0 v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$f_0 u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Iz sistema (4)-(5) za geostrofski vetar u analitičkom slučaju se dobija

$$u_g = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (6)$$

$$v_g = \frac{g}{f_0} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (7)$$

Upotrebom centralnog količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) na A mreži može se napisati

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v \right] - f_0 v + g \overline{\delta_x h}^x = 0, \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u \right] + f_0 u + g \overline{\delta_y h}^y = 0, \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + H \left(\overline{\delta_x u}^x + \overline{\delta_y v}^y \right) = 0. \quad (10)$$

Ponavljajući proceduru iz kontinualnog slučaja, zanemarujući članove u uglastim zgradama, za geostrofski vetar na A mreži se dobija

$$u_{gA}^* \equiv u = -\frac{g}{f_0} \overline{\delta_y h}^y, \quad (11)$$

$$v_{gA}^* \equiv v = \frac{g}{f_0} \overline{\delta_x h}^x. \quad (12)$$

ZADATAK 5.17.

Diskretizacijom samo članova podešavanja dvodimenzionalnog linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje u bezdivergentnom slučaju, a upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izvesti komponente geostrofskog vetra na B mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Upotrebom centralnog količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.16 na B mreži može se napisati

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v \right] - f_0 v + g \overline{\delta_x h}^y = 0, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u \right] + f_0 u + g \overline{\delta_y h}^x = 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + H \left(\overline{\delta_x u}^y + \overline{\delta_y v}^x \right) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući proceduru iz kontinualnog slučaja (videti zadatak 5.16), zanemarujući članove u uglastim zgradama, za geostrofski vetar na B mreži se dobija

$$u_{gB}^* \equiv u = -\frac{g}{f_0} \overline{\delta_y h}^x, \quad (4)$$

$$v_{gB}^* \equiv v = \frac{g}{f_0} \overline{\delta_x h}^y. \quad (5)$$

ZADATAK 5.18.

Diskretizacijom samo članova podešavanja dvodimenzionalnog linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje u bezdivergentnom slučaju, a upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izvesti komponente geostrofskog vetra na C mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Upotrebom centralnog količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.16 na C mreži može se napisati

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y \bar{v}^{xy} \right] - f_0 \bar{v}^{xy} + g \delta_x h = 0, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y \bar{u}^{xy} \right] + f_0 \bar{u}^{xy} + g \delta_y h = 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + H(\delta_x u + \delta_y v) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući proceduru iz kontinualnog slučaja (videti zadatak 5.16), zanemarujući članove u uglastim zgradama, za geostrofski vetar na C mreži se dobija

$$u_{gC}^* \equiv \bar{u}^{xy} = -\frac{g}{f_0} \delta_y h, \quad (4)$$

$$v_{gC}^* \equiv \bar{v}^{xy} = \frac{g}{f_0} \delta_x h. \quad (5)$$

ZADATAK 5.19.

Diskretizacijom samo članova podešavanja dvodimenzionalnog linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje u bezdivergentnom slučaju, a upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, izvesti komponente geostrofskog vetra na D mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Upotrebom centralnog količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.16 na D mreži može se napisati

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y \bar{v}^{xy} \right] - f_0 \bar{v}^{xy} + g \delta_x \bar{h}^{xy} = 0, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y \bar{u}^{xy} \right] + f_0 \bar{u}^{xy} + g \delta_y \bar{h}^{xy} = 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + H \left(\delta_x \bar{u}^{xy} + \delta_y \bar{v}^{xy} \right) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući proceduru iz kontinualnog slučaja (videti zadatak 5.16), zanemarujući članove u uglastim zgradama, za geostrofski vetar na D mreži se dobija

$$u_{gD}^* \equiv \bar{u}^{xy} = -\frac{g}{f_0} \delta_y \bar{h}^{xy}, \quad (4)$$

$$v_{gD}^* \equiv \bar{v}^{xy} = \frac{g}{f_0} \delta_x \bar{h}^{xy}. \quad (5)$$

ZADATAK 5.20.

Diskretizacijom samo članova podešavanja dvodimenzionalnog linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje u bezdivergentnom slučaju, a upotrebom centralnih količnika konačnih razlika, izvesti komponente geostrofskog vetra na E mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Upotrebom centralnog količnika konačnih razlika (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.16 na E mreži može se napisati

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v \right] - f_0 v + g \delta_x h = 0, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u \right] + f_0 u + g \delta_y h = 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + H (\delta_x u + \delta_y v) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući proceduru iz kontinualnog slučaja (videti zadatak 5.16), zanemarujući članove u uglastim zgradama, za geostrofski vetar na E mreži se dobija

$$u_{gE}^* \equiv u = -\frac{g}{f_0} \delta_y h, \quad (4)$$

$$v_{gE}^* \equiv v = \frac{g}{f_0} \delta_x h. \quad (5)$$

ZADATAK 5.21.

Polazeći od dvodimenzionalnog linearizovanog kvazi-geostrofskog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje, formirati jednačinu vrtložnosti u divergentnom slučaju upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja na A mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985; Gavrilov i Tošić, 1998a):

Dvodimenzionalni linearizovani kvazi-geostrofski sistem jednačina za plitku vodu u beta ravni može se napisati

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} - \beta y v_g - f_0 v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + \beta y u_g + f_0 u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (3)$$

gde su u_g i v_g komponente geostrofskog vetra (videti zadatak 5.16). Primenjujući standardnu proceduru, diferenciranjem (1) i (2) po y i x , redom, oduzimanjem prve od druge od tako dobijenih jednačina, upotrebom definicija za geostrofski vetar i jednačine (3), nakon sređivanja za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti u divergentnom slučaju se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 - \frac{f_0^2}{gH} \right) h + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

gde je

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) na A mreži može se napisati

$$\frac{\partial u_{gA}^*}{\partial t} - \beta y v_{gA}^* - f_0 v + g \overline{\delta_x h^x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_{gA}^*}{\partial t} + \beta y u_{gA}^* + f_0 u + g \overline{\delta_y h^y} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\overline{\delta_x u^x} + \overline{\delta_y v^y} \right) = 0. \quad (8)$$

Ponavljajući analogni postupak kao u analitičkom slučaju, odnosno, primenom na (6) i (7) operatora

$$-\overline{\delta_y(6)}^y, \quad (9)$$

$$\overline{\delta_x(7)}^x, \quad (10)$$

i upotrebom definicija za geostrofski vetar (videti zadatak 5.16), dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx}h}^{xx} + \overline{\delta_{yy}h}^{yy} \right) + \beta \left(\overline{\delta_x h}^{xyy} + \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy}h}^x \right) + \frac{f_0^2}{g} \left(\overline{\delta_x u}^x + \overline{\delta_y v}^y \right) = 0. \quad (11)$$

Zamenom divergentnog člana iz (8) u (11) za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx}h}^{xx} + \overline{\delta_{yy}h}^{yy} \right) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \left(\overline{\delta_x h}^{xyy} + \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy}h}^x \right) = 0. \quad (12)$$

ZADATAK 5.22.

Polazeći od dvodimenzionalnog linearizovanog kvazi-geostrofskog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje, formirati jednačinu vrtložnosti u divergentnom slučaju upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja na B mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985; Gavrilov i Tošić, 1998a):

Upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.21 na B mreži može se napisati

$$\frac{\partial u_{gB}^*}{\partial t} - \beta y v_{gB}^* - f_0 v + g \overline{\delta_x h}^y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{gB}^*}{\partial t} + \beta y u_{gB}^* + f_0 u + g \overline{\delta_y h}^x = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\overline{\delta_x u}^y + \overline{\delta_y v}^x \right) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući analogni postupak kao u analitičkom slučaju, odnosno, primenom na (1) i (2) operatora

$$-\overline{\delta_y(1)}^x, \quad (4)$$

$$\overline{\delta_x(2)}^y, \quad (5)$$

i upotrebom definicija za geostrofski vetar (videti zadatak 5.17), dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx}h}^{yy} + \overline{\delta_{yy}h}^{xx} \right) + \beta \left(\overline{\delta_x h}^{xyy} - \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy}h}^x \right) + \frac{f_0^2}{g} \left(\overline{\delta_x u}^y + \overline{\delta_y v}^x \right) = 0. \quad (6)$$

Zamenom divergentnog člana iz (3) u (6) za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx} h^{yy}} + \overline{\delta_{yy} h^{xx}} \right) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \left(\overline{\delta_x h^{xyy}} - \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy} h^x} \right) = 0. \quad (7)$$

ZADATAK 5.23.

Polazeći od dvodimenzionalnog linearizovanog kvazi-geostrofskog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje, formirati jednačinu vrtložnosti u divergentnom slučaju upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja na C mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.21 na C mreži može se napisati

$$\frac{\partial u_{gC}^*}{\partial t} - \beta y v_{gC}^* - f_0 \bar{v}^{xy} + g \delta_x h = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{gC}^*}{\partial t} + \beta y u_{gC}^* + f_0 \bar{u}^{xy} + g \delta_y h = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H(\delta_x u + \delta_y v) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući analogni postupak kao u analitičkom slučaju, odnosno, primenom na (1) i (2) operatora

$$-\delta_y(1), \quad (4)$$

$$\delta_x(2), \quad (5)$$

i upotrebom definicija za geostrofski vetar (videti zadatak 5.18), dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_{xx} h + \delta_{yy} h) + \beta \overline{\delta_x h^{xyy}} + \frac{f_0^2}{g} (\overline{\delta_x u^{xy}} + \overline{\delta_y v^{xy}}) = 0. \quad (6)$$

Primenom operatora osrednjavanja preko x i y pravca na (3) i zamenom tako dobijenog divergentnog člana u (6) za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_{xx} h + \delta_{yy} h) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial \bar{h}^{xy}}{\partial t} + \beta \overline{\delta_x h^{xyy}} = 0. \quad (7)$$

ZADATAK 5.24.

Polazeći od dvodimenzionalnog linearizovanog kvazi-geostrofskog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje, formirati jednačinu vrtložnosti u divergentnom slučaju upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja na D mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.21 na D mreži može se napisati

$$\frac{\partial u_{gD}^*}{\partial t} - \beta y v_{gD}^* - f_0 \bar{v}^{xy} + g \delta_x \bar{h}^{xy} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{gD}^*}{\partial t} + \beta y u_{gD}^* + f_0 \bar{u}^{xy} + g \delta_y \bar{h}^{xy} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\delta_x \bar{u}^{xy} + \delta_y \bar{v}^{xy} \right) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući analogni postupak kao u analitičkom slučaju, odnosno, primenom na (1) i (2) operatora

$$-\delta_y(1), \quad (4)$$

$$\delta_x(2), \quad (5)$$

i upotrebom definicija za geostrofski vetar (videti zadatak 5.19), dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_{xx} \bar{h}^{xy} + \delta_{yy} \bar{h}^{xy} \right) + \beta \delta_x \bar{h}^{xyyy} + \frac{f_0^2}{g} \left(\delta_x \bar{u}^{xy} + \delta_y \bar{v}^{xy} \right) = 0. \quad (6)$$

Zamenom divergentnog člana iz (3) u (6) za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_{xx} \bar{h}^{xy} + \delta_{yy} \bar{h}^{xy} \right) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \delta_x \bar{h}^{xyyy} = 0. \quad (7)$$

ZADATAK 5.25.

Polazeći od dvodimenzionalnog linearizovanog kvazi-geostrofskog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje, formirati jednačinu vrtložnosti u divergentnom slučaju upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja na E mreži.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Upotrebom centralnih količnika konačnih razlika (videti zadatak 5.3), sistem (1)-(3) iz zadatka 5.21 na E mreži može se napisati

$$\frac{\partial u_{gE}^*}{\partial t} - \beta y v_{gE}^* - f_0 v + g \delta_x h = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{gE}^*}{\partial t} + \beta y u_{gE}^* + f_0 u + g \delta_y h = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H(\delta_x u + \delta_y v) = 0. \quad (3)$$

Ponavljajući analogni postupak kao u analitičkom slučaju, odnosno, primenom na (1) i (2) operatora

$$-\delta_y(1), \quad (4)$$

$$\delta_x(2), \quad (5)$$

i upotrebom definicija za geostrofski vetar (videti zadatak 5.20), dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta_{xx}h + \delta_{yy}h) + \beta \overline{\delta_x h^y} + \frac{f_0^2}{g}(\delta_x u + \delta_y v) = 0. \quad (6)$$

Zamenom divergentnog člana iz (3) u (6) za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta_{xx}h + \delta_{yy}h) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \overline{\delta_x h^y} = 0. \quad (7)$$

ZADATAK 5.26.

Polazeći od dvodimenzionalnog linearizovanog kvazi-geostrofskog sistema jednačina za plitku vodu u beta ravni bez osnovne struje, formirati jednačinu vrtložnosti u bezdivergentnom slučaju upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja na A, B, C, D i E mrežama.

Rešenje (Gavrilov, 1985):

Dvodimenzionalni linearizovani kvazi-geostrofski sistem jednačina za plitku vodu u beta ravni u bezdivergentnom slučaju može se napisati

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} - \beta y v_g - f_0 v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + \beta y u_g + f_0 u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Primenjujući standardnu proceduru, diferenciranjem (1) i (2) po y i x , redom, oduzimanjem prve od tako dobijenih jednačina od druge jednačine, upotrebom jednačine (3) i nakon sređivanja za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti u bezdivergentnom slučaju se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 h) + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Upoređujući (4) i (4) iz zadatka 5.21 uočava se da član $\partial/\partial t(f_0^2/gH)h$ sada ne postoji. Pošto ovaj, tzv. divergentni član potiče od pretpostavke da je divergencija različita od nule, čini se da je najjednostavnije dobiti kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti u bezdivergentnom slučaju izostavljanjem divergentnog člana iz kvazi-geostrofske jednačine vrtložnosti divergentnog slučaja.

Analogno, kao i u analitičkom slučaju, izostavljanjem divergentnog člana iz diskretizovanih kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti divergentnog slučaja tražene jednačine vrtložnosti mogu se dobiti za:

- A mrežu iz (12) u zadatku 5.21

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\delta_{xx}h^{xx}} + \overline{\delta_{yy}h^{yy}}) + \beta \left(\overline{\delta_x h^{xyy}} + \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy}h^x} \right) = 0; \quad (5)$$

- B mrežu iz (7) u zadatku 5.22

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\delta_{xx}h^{yy}} + \overline{\delta_{yy}h^{xx}}) + \beta \left(\overline{\delta_x h^{xyy}} - \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy}h^x} \right) = 0; \quad (6)$$

- C mrežu iz (7) u zadatku 5.23

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\delta_{xx}h} + \overline{\delta_{yy}h}) + \beta \overline{\delta_x h^{xyy}} = 0; \quad (7)$$

- D mrežu iz (7) u zadatku 5.24

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\delta_{xx}h^{xy}} + \overline{\delta_{yy}h^{xy}}) + \beta \overline{\delta_x h^{xyyy}} = 0; \quad (8)$$

- E mrežu iz (7) u zadatku 5.25

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\delta_{xx}h} + \overline{\delta_{yy}h}) + \beta \overline{\delta_x h^y} = 0. \quad (9)$$

ZADATAK 5.27.

Polazeći od dvodimenzionalne diskretizovane kvazi-geostrofske jednačine vrtložnosti na A mreži, izračunati frekvenciju Rosbijejevih (Rossby) talasa u divergentnom slučaju i uporediti dobijeni rezultat sa analitičkim slučajem.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998a; 1999):

Dvodimenzionalna kvazi-geostrofska jednačina vrtložnosti ima oblik (videti zadatak 5.21)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 - \frac{f_0^2}{gH} \right) h + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku

$$h = \hat{h} e^{i(kx+ly-vt)}, \quad (2)$$

za frekvenciju Rosbijejevih talasa u divergentnom slučaju se dobija

$$v = - \frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (3)$$

Diskretizovana dvodimenzionalna kvazi-geostrofska jednačina vrtložnosti na A mreži ima oblik (videti zadatak 5.21)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx} h^{xx}} + \overline{\delta_{yy} h^{yy}} \right) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \left(\overline{\delta_x h^{xyy}} + \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy} h^x} \right) = 0. \quad (4)$$

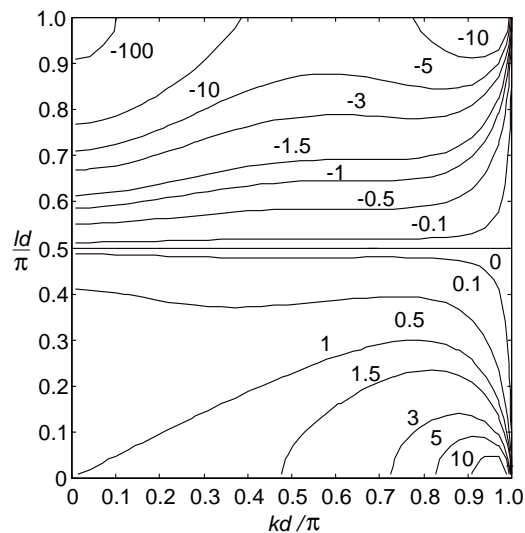
Zamenom u (4) rešenja u talasnom obliku

$$h = \hat{h} e^{i(kid+ljd-v^*t)}, \quad (5)$$

za frekvenciju Rosbijejevih talasa u divergentnom slučaju na A mreži se dobija

$$v^* = - \frac{\beta \frac{\sin kd \cos ld}{d}}{\frac{\sin^2 kd + \sin^2 ld}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (6)$$

Za upoređivanje frekvencija Rosbijejevih talasa u diskretnom i analitičkom slučaju posmatraće se vrednosti relativnih frekvencija, v^*/v . Ove vrednosti su za A mrežu prikazane na Slici 27 u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva upotrebom MATLAB programa. Rezultati su dobijeni za $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $d = 50 \times 10^3 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$. Uočavaju se oblasti u kojima mreža ubrzava, usporava i ne menja brzine Rosbijejevih talasa.



Slika 27. Relativne frekvencije, v^*/v , na A mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje relativnih frekvencija dat je u Listingu 15.

```
% RELFR2A.M 22:35 4/9/98
% Izracunavanje relativnih frekvencija Rossby-jevih talasa
% na A mrezi u dve dimenzije kada je lambda/d=2.0
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% Gavrilov & Tosic, 1999:
% Dispersion Characteristic of Discrete Quasi-Geostrophic Modes
% Mon. Wea. Rev., Vol. 127, 2197-2203.
%
clear all; clc; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 50*10^3; q = f0^2/(g*H);
%generisanje pravougaone oblasti
a = 0.01; b = 1; korak = 0.03; x = a:korak:b; y = a:korak:b;
[k,l] = meshgrid(pi*x/d,pi*y/d);
%visine na kojima se crtaju konture
V = [100 10 1 .5 .1 .01 0 -.01 -.1 -.5 -1 -10 -100];
%frekvencije na A mrezi
A = -(sin(k*d) .* cos(l*d)/d) ./ ...
((sin(k*d).^2 + sin(l*d).^2)/d^2+q) ./ (d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = -k./(k.^2+l.^2+q)./(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%relativne frekvencije
relfrA = A./ANAL;
%crtanje relativnih frekvencija na A mrezi
figure(1);
CA = contour(x,y,relfrA,V); clabel(CA); title('A/ANAL');
axis('square'); axis([0 b 0 b]); brojose = gca;
tikovi = 0:0.1:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
xlabel('kd/pi'); ylabel('ld/pi');
```

Listing 15. Izračunavanje relativnih frekvencija na A mreži za grafički prikaz na Slici 27.

ZADATAK 5.28.

Polazeći od dvodimenzionalne diskretizovane kvazi-geostrofske jednačine vrtložnosti na B mreži, izračunati frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju i uporediti dobijeni rezultat sa analitičkim slučajem.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998a; 1999):

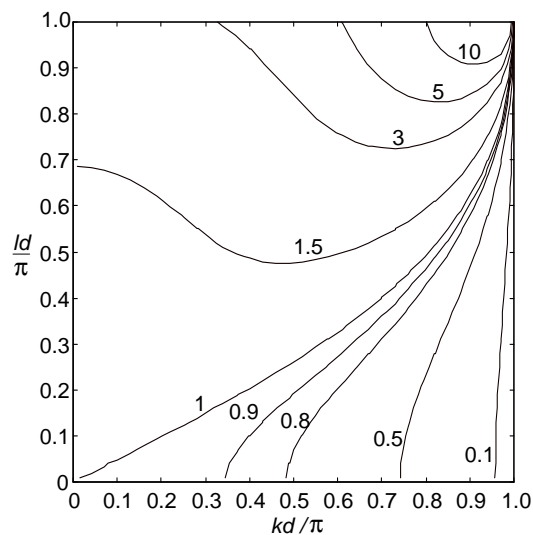
Diskretizovana dvodimenzionalna kvazi-geostrofska jednačina vrtložnosti na B mreži ima oblik (videti zadatak 5.22)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx} h^{yy}} + \overline{\delta_{yy} h^{xx}} \right) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \left(\overline{\delta_x h^{xyy}} - \frac{d^2}{4} \overline{\delta_{xyy} h^x} \right) = 0. \quad (1)$$

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku za frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju na B mreži se dobija

$$v^* = - \frac{\beta \frac{\sin kd}{d}}{2 \frac{(1 - \cos kd \cos ld)}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (2)$$

Za upoređivanje frekvencija Rosbijevih talasa u diskretnom i analitičkom slučaju posmatraće se vrednosti relativnih frekvencija, v^*/v . Ove vrednosti su za B mrežu prikazane na Slici 28 u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva upotrebom MATLAB programa. Rezultati su dobijeni za $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $d = 50 \times 10^3 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$. Uočava se samo oblast u kojoj frekvencije Rosbijevih talasa opadaju sa porastom talasnih brojeva.



Slika 28. Relativne frekvencije, v^*/v , na B mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje relativnih frekvencija dat je u Listingu 16.

```

% RELFR2B.M 9:44 5/9/98
% Izracunavanje relativnih frekvencija Rossby-jevih talasa
% na B mrezi u dve dimenzije kada je lambda/d=2.0
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% Gavrilov & Tosic, 1999:
% Dispersion Characteristic of Discrete Quasi-Geostrophic Modes
% Mon. Wea. Rev., Vol. 127, 2197-2203.
%
clear all; clc; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 50*10^3; q = f0^2/(g*H);
%generisanje pravougaone oblasti
a = 0.01; b = 1; korak = 0.03; x = a:korak:b; y = a:korak:b;
[k,l] = meshgrid(pi*x/d,pi*y/d);
%visine na kojima se crtaju konture
V = [100 10 5 3 1.5 1 .8 .5 .1 .01 0 -.01 -.1 -.5 -.8 -1];
%frekvencije na B mrezi
B = -(sin(k*d)/d) ./ ...
(2*(1-cos(k*d).*cos(l*d))/d^2 + q)/(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = -k./(k.^2+l.^2+q)/(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%relativne frekvencije
relfrB = B./ANAL;
%crtanje relativnih frekvencija
figure(1); CB = contour(x,y,relfrB,V); clabel(CB); title('B/ANAL');
axis('square'); axis([0 b 0 b]); brojose = gca;
tikovi = 0:0.1:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
xlabel('kd/pi'); ylabel('ld/pi');

```

Listing 16. Izračunavanje relativnih frekvencija na B mreži za grafički prikaz na Slici 28.

ZADATAK 5.29.

Polazeći od dvodimenzionalne diskretizovane kvazi-geostrofske jednačine vrtložnosti na C mreži, izračunati frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju i uporediti dobijeni rezultat sa analitičkim slučajem.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998a; 1999):

Diskretizovana dvodimenzionalna kvazi-geostrofska jednačina vrtložnosti na C mreži ima oblik (videti zadatak 5.23)

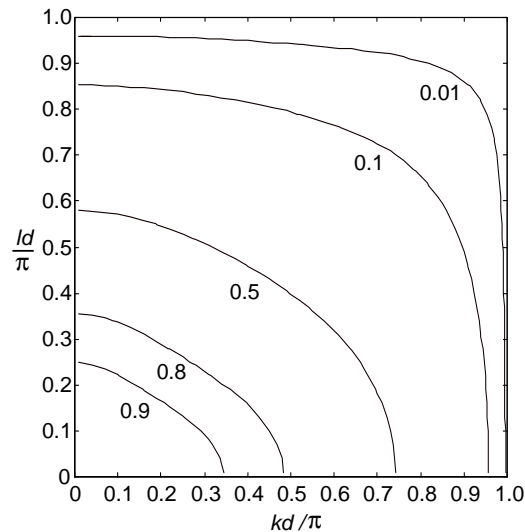
$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_{xx}h + \delta_{yy}h) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial \bar{h}^{xy}}{\partial t} + \beta \overline{\delta_x h}^{xyy} = 0. \quad (1)$$

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku za frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju na C mreži se dobija

$$v^* = - \frac{\beta \frac{\sin kd \cos^2(ld/2)}{d}}{4 \frac{\sin^2(kd/2) + \sin^2(ld/2)}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH} \cos(kd/2) \cos(ld/2)}. \quad (2)$$

Za upoređivanje frekvencija Rosbijevih talasa u diskretnom i analitičkom slučaju posmatraće se vrednosti relativnih frekvencija, v^*/v . Ove vrednosti su za C mrežu prikazane na Slici 29 u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva upotrebom MATLAB programa.

Rezultati su dobijeni za $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $d = 50 \times 10^3 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$. Uočava se samo oblast u kojoj frekvencije Rossbijevih talasa opadaju sa porastom talasnih brojeva.



Slika 29. Relativne frekvencije, v^*/v , na C mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje relativnih frekvencija dat je u Listingu 17.

```
% RELFR2C.M 9:50 5/9/98
% Izracunavanje relativnih frekvencija Rossby-jevih talasa
% na C mrezi u dve dimenzije kada je lambda/d=2.0
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% Gavrilov & Tosic, 1999:
% Dispersion Characteristic of Discrete Quasi-Geostrophic Modes
% Mon. Wea. Rev., Vol. 127, 2197-2203.
%
clear all; clc; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 50*10^3; q = f0^2/(g*H);
%generisanje pravougaone oblasti
a = 0.01; b = 1; korak = 0.03; x = a:korak:b; y = a:korak:b;
[k,l] = meshgrid(pi*x/d,pi*y/d);
%visine na kojima se crtaju konture
V = [100 10 1 .9 .8 .5 .1 .01 0 -.01 -.1 -.5 -.8 -.9 -1 -10 -100];
%frekvencije na C mrezi
C1 = -(sin(k*d) .* cos(l*d/2).^2 / d);
C = C1 ./ ...
(4*(sin(k*d/2).^2+sin(l*d/2).^2)/d^2+q*cos(k*d/2).*cos(l*d/2))./ ...
(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = -k./(k.^2+l.^2+q)./(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%relativne frekvencije
relfrC = C./ANAL;
% crtanje relativnih frekvencija
figure(1);
CC = contour(x,y,relfrC,V); clabel(CC); title('C/ANAL');
axis('square'); axis([0 b 0 b]); brojose = gca;
tikovi = 0:0.1:b; set(brojose, 'Xtick','tikovi, 'Ytick','tikovi);
xlabel('kd/pi'); ylabel('ld/pi');
```

Listing 17. Izračunavanje relativnih frekvencija na C mreži za grafički prikaz na Slici 29.

ZADATAK 5.30.

Polazeći od dvodimenzionalne diskretizovane kvazi-geostrofske jednačine vrtložnosti na D mreži, izračunati frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju i uporediti dobijeni rezultat sa analitičkim slučajem.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998a; 1999):

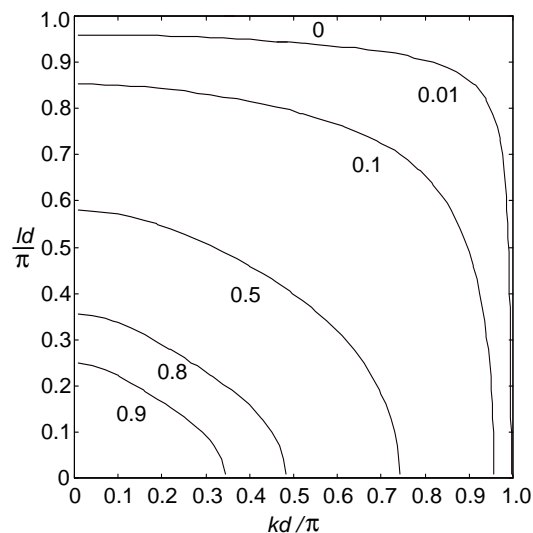
Diskretizovana dvodimenzionalna kvazi-geostrofska jednačina vrtložnosti na D mreži ima oblik (videti zadatak 5.24)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx} h^{xy}} + \overline{\delta_{yy} h^{xy}} \right) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \overline{\delta_x h^{xyyy}} = 0. \quad (1)$$

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku za frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju na D mreži se dobija

$$v^* = - \frac{\beta [\cos(3ld/2) + 3\cos(ld/2)] \frac{\sin kd \cos(kd/2)}{4d}}{2 \frac{\sin kd \sin(kd/2) \cos(ld/2) + \cos(kd/2) \sin ld \sin(ld/2)}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (2)$$

Za upoređivanje frekvencija Rosbijevih talasa u diskretnom i analitičkom slučaju posmatraće se vrednosti relativnih frekvencija, v^*/v . Ove vrednosti su za D mrežu prikazane na Slici 30 u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva upotrebom MATLAB programa. Rezultati su dobijeni za $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $d = 50 \times 10^3 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$. Uočava se oblast u kojoj frekvencije Rosbijevih talasa opadaju sa porastom talasnih brojeva i linije duž kojih postoje stacionarna rešenja.



Slika 30. Relativne frekvencije, v^*/v , na D mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje relativnih frekvencija dat je u Listingu 18.

```

% RELFR2D.M 17:02 15/5/98
% Izracunavanje relativnih frekvencija Rossby-jevih talasa
% na D mrezi u dve dimenzije kada je lambda/d=2.0
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% Gavrilov & Tosic, 1999:
% Dispersion Characteristic of Discrete Quasi-Geostrophic Modes
% Mon. Wea. Rev., Vol. 127, 2197-2203.
%
clear all; clc; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 50*10^3; q = f0^2/(g*H);
%generisanje pravougaone oblasti
a = 0.01; b = 1; korak = 0.03; x = a:korak:b; y = a:korak:b;
[k,l] = meshgrid(pi*x/d,pi*y/d);
%visine na kojima se crtaju konture
V = [100 10 1 .9 .8 .5 .1 .01 0 -.01 -.1 -.5 -.8 -.9 -1 -10 -100];
%frekvencije na D mrezi
Dl=- (sin(k*d).*cos(k*d/2).*(cos(3*l*d/2) + 3*cos(l*d/2)) / (4*d));
D = Dl ./ ...
(2*(sin(k*d/2).*sin(k*d).*cos(l*d/2)+cos(k*d/2).*sin(l*d).*sin(l*d/2))
/ d^2 + q)./(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = -k./(k.^2+l.^2+q)./(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%relativne frekvencije
relfrD = D./ANAL;
%crtanje relativnih frekvencija
figure(1);
CD = contour(x,y,relfrD,V); clabel(CD); title('D/ANAL');
axis('square'); axis([0 b 0 b]); brojose = gca;
tikovi = 0:0.1:b; set(brojose, 'Xtick',tikovi, 'Ytick',tikovi);
xlabel('kd/pi'); ylabel('ld/pi');

```

Listing 18. Izračunavanje relativnih frekvencija na D mreži za grafički prikaz na Slici 30.

ZADATAK 5.31.

Polazeći od dvodimenzionalne diskretizovane kvazi-geostrofske jednačine vrtložnosti na E mreži, izračunati frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju i uporediti dobijeni rezultat sa analitičkim slučajem.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998a; 1999):

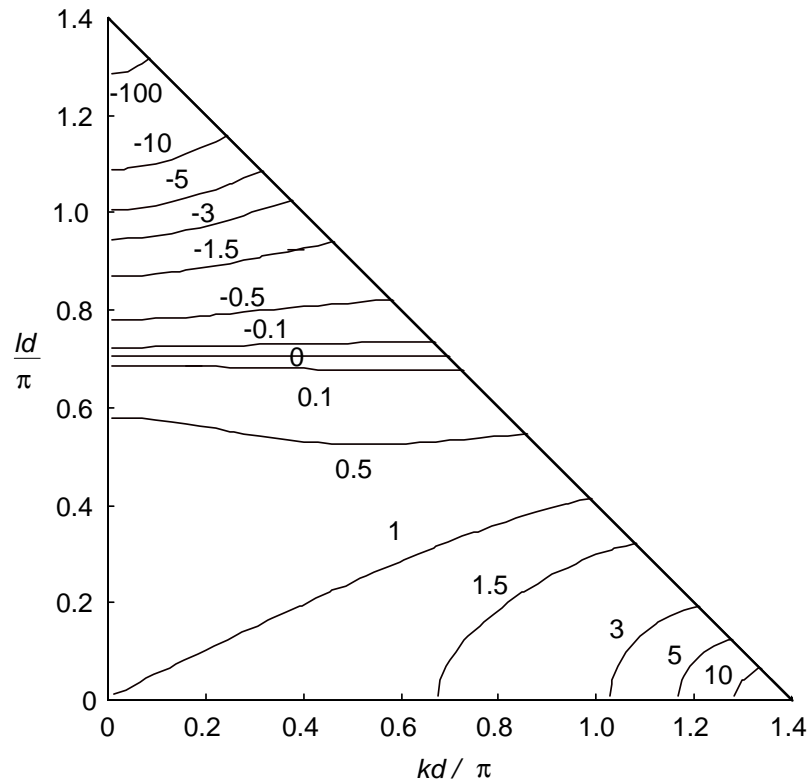
Diskretizovana dvodimenzionalna kvazi-geostrofska jednačina vrtložnosti na E mreži ima oblik (videti zadatak 5.25)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_{xx}h + \delta_{yy}h) - \frac{f_0^2}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \overline{\delta_x h^y} = 0. \quad (1)$$

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku za frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju na E mreži se dobija

$$v^* = - \frac{\beta \sqrt{2} \frac{\sin(kd / \sqrt{2}) \cos(ld / \sqrt{2})}{d}}{2 \frac{\sin^2(kd / \sqrt{2}) + \sin^2(ld / \sqrt{2})}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (2)$$

Za upoređivanje frekvencija Rosbijevih talasa u diskretnom i analitičkom slučaju posmatraće se vrednosti relativnih frekvencija, v^*/v . Ove vrednosti su za E mrežu prikazane na Slici 31 u gornjem desnom kvadrantu oblasti dozvoljenih talasnih brojeva upotrebom MATLAB programa. Rezultati su dobijeni za $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $d = 50 \times 10^3 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$. U ovom slučaju je situacija zanimljiva. Pored oblasti u kojima brzina Rosbijevih talasa menja intezitet u odnosu na analitički slučaj, postoji i oblast u kojoj se Rosbijevi talasi prostiru u suprotnom smeru od analitičkog (oblast sa negativnim vrednostima).



Slika 31. Relativne frekvencije, v^*/v , na E mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje relativnih frekvencija dat je u Listingu 19.

```

% RELFR2E.M 17:02 15/5/98
% Izracunavanje relativnih frekvencija Rossby-jevih talasa
% na E mrezi u dve dimenzije kada je lambda/d=2.0
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% Gavrilov & Tosic, 1999:
% Dispersion Characteristic of Discrete Quasi-Geostrophic Modes
% Mon. Wea. Rev., Vol. 127, 2197-2203.
%
clear all; clc; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 50*10^3; q = f0^2/(g*H);
%generisanje pravougaone oblasti
a=0.01; b=1; korak=0.03; r = sqrt(2); x = a:korak:r; y = a:korak:r;
[k,l] = meshgrid(pi*x/d,pi*y/d);
%visine na kojima se crtaju konture
V = [100 10 5 3 1.5 1 .5 .1 0 -.1 -.5 -1 -1.5 -3 -5 -10 -100];
%frekvencije na E mrezi
E = -r*(sin(k*d/r).*cos(l*d/r)/d)./ ...
(2*(sin(k*d/r).^2 + sin(l*d/r).^2)/d^2+q)./(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%frekvencije u analitickom slucaju
ANAL = -k./(k.^2+l.^2+q)./(d^2*sqrt(k.^2+l.^2));
%relativne frekvencije
relfrE = E./ANAL;
%crtanje relativnih frekvencija
figure(1);
CE = contour(x,y,relfrE,V); clabel(CE); title('E/ANAL');
axis('square'); axis([0 r 0 r]); brojose = gca;
tikovi = 0:0.2:r; set(brojose, 'xtick',tikovi, 'ytick',tikovi);
xlabel('kd/pi'); ylabel('ld/pi');

```

Listing 19. Izračunavanje relativnih frekvencija na E mreži za grafički prikaz na Slici 31.

ZADATAK 5.32.

Polazeći od dvodimenzionalnih diskretizovanih kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti na Arakavinim mrežama, izračunati frekvenciju Rosbijevih talasa na svim mrežama u bezdivergentnom slučaju i uporediti dobijeni rezultat sa divergentnim slučajem.

Rešenje (Gavrilov i Tošić, 1998):

Primenjujući standardnu proceduru, opisanu u zadatku 5.26, za kvazi-geostrofsku jednačinu vrtložnosti u bezdivergentnom slučaju se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 h) + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Nakon zamene u (1) rešenja u talasnom obliku (izraz (2) u zadatku 5.27) za frekvenciju Rosbijevih talasa u bezdivergentnom slučaju se dobija

$$v = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}. \quad (2)$$

Zamenjujući talasno rešenje (izraz (5) u zadatku 5.27) u jednačinama vrtložnosti (5)-(9) u zadatku 5.26 za frekvencije Rosbijevih talasa na Arakavinim mrežama se dobija, redom

$$v_A^* = -\frac{\beta \frac{\sin kd \cos ld}{d}}{\frac{\sin^2 kd + \sin^2 ld}{d^2}}, \quad (3)$$

$$v_B^* = -\frac{\beta \frac{\sin kd}{d}}{2 \frac{(1 - \cos kd \cos ld)}{d^2}}, \quad (4)$$

$$v_C^* = -\frac{\beta \frac{\sin kd \cos^2(ld/2)}{d}}{4 \frac{\sin^2(kd/2) + \sin^2(ld/2)}{d^2}}, \quad (5)$$

$$v_D^* = -\frac{\beta [\cos(3ld/2) + 3\cos(ld/2)] \frac{\sin kd \cos(kd/2)}{4d}}{2 \frac{\sin kd \sin(kd/2) \cos(ld/2) + \cos(kd/2) \sin ld \sin(ld/2)}{d^2}}, \quad (6)$$

$$v_E^* = -\frac{\beta \sqrt{2} \frac{\sin(kd/\sqrt{2}) \cos(ld/\sqrt{2})}{d}}{2 \frac{\sin^2(kd/\sqrt{2}) + \sin^2(ld/\sqrt{2})}{d^2}}. \quad (7)$$

U izrazima (3)-(7) uočava se izostanak divergentnog člana u poređenju sa analognim izrazima za divergentni slučaj (videti zadatke 5.27-5.31).

ZADATAK 5.33.

Polazeći od kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti u divergentnom slučaju zadatih samo duž zonalnog pravca (x -osa):

- izvesti izraze za frekvenciju Rosbijejevih talasa u analitičkom slučaju i na A mreži;
- napisati računarski program za izračunavanje bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom i diskretnom slučaju;
- grafički i/ili tabelarno prikazati dobijene rezultate kada je $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $d = 25 \times 10^4 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$.

Rešenje:

Posmatrajući u dvodimenzionalnoj kvazi-geostrofskoj jednačini vrtložnosti u analitičkom slučaju (videti zadatak 5.21) samo zonalni pravac, jednodimenzionalna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f_0^2}{gH} \right) h + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Zamenom u (1) rešenja u talasnom obliku

$$h = \hat{h} e^{i(kx - vt)}, \quad (2)$$

za frekvenciju Rosbijejevih talasa samo u zonalnom pravcu se dobija

$$v = -\frac{\beta k}{k^2 + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (3)$$

Posmatrajući u dvodimenzionalnoj kvazi-geostrofskoj jednačini vrtložnosti na A mreži (videti zadatak 5.21) samo zonalni pravac, jednodimenzionalna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx}^{xx}} - \frac{f_0^2}{gH} \right) h + \beta \overline{\delta_x} h^x = 0. \quad (4)$$

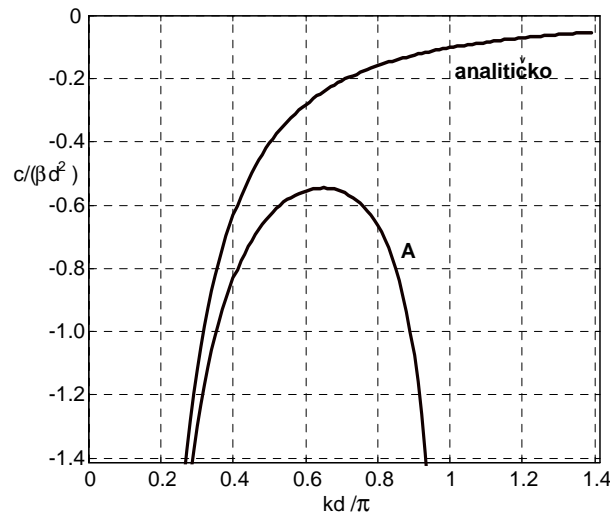
Zamenom u (4) rešenja u talasnom obliku

$$h = \hat{h} e^{i(kid - v^*t)}, \quad (5)$$

za frekvenciju Rosbijejevih talasa u divergentnom slučaju na A mreži se dobija (Gavrilov, 1985)

$$v^* = -\frac{\beta \frac{\sin kd}{d}}{\frac{\sin^2 kd}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (6)$$

Na Slici 32 prikazane su vrednosti bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , na A mreži i u analitičkom slučaju upotrebom MATLAB programa. Uočava se da A mreža ubrzava Rosbijeve talase.



Slika 32. Fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom slučaju i na A mreži.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje bezdimenzionalnih faznih brzina dat je u Listingu 20.

```

% ABRZINA.M 10:01 5/9/98
% Izracunavanje fazne brzine Rossby-jevih talasa
% na A mrezi i u anal. slucaju u jednoj dimenziji
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% M. B. Gavrilov, 1985: Frequency of quasi-geostrophic modes
% over grid points and definition of geostrophic wind
% Idojaras, 89, 77-85.
%
clear all; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 25*10^4; q = f0^2/(g*H);
r = sqrt(2); a = 0.25; b = 0.95; korak = 0.01;
% generisanje x-ose
x = a:korak:b; k = pi*x/d;
%fazne brzine na A mrezi
A = (-sin(k*d)/d)/(sin(k*d).^2/d^2 + q)/(k*d^2);
%generisanje x-ose za analiticki slucaj
x1 = a: korak:r; l = pi*x1/d;
%fazne brzine u analitickom slucaju
ANAL = -l./(l.^2 + q)/(l*d^2);
%crtanje faznih brzina
plot(x,A,x1,ANAL); axis([0 r -r 0]); title('A-mreza'); grid

```

Listing 20. Izračunavanje bezdimenzionalnih faznih brzina u analitičkom slučaju i na A mreži.

ZADATAK 5.34.

Polazeći od kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti u divergentnom slučaju zadatih samo duž zonalnog pravca (x -osa):

- izvesti izraze za frekvenciju Rosbijevih talasa u analitičkom slučaju i na B mreži;
- napisati računarski program za izračunavanje bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom i diskretnom slučaju;
- grafički i/ili tabelarno prikazati dobijene rezultate kada je $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $d = 25 \times 10^4 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$.

Rešenje:

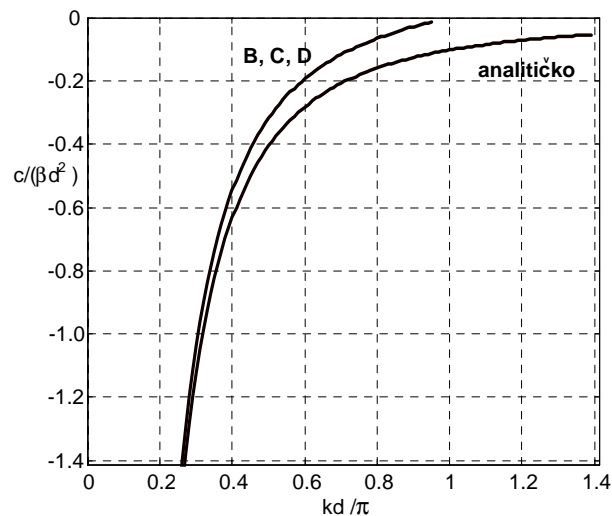
Posmatrajući u dvodimenzionalnoj kvazi-geostrofskoj jednačini vrtložnosti na B mreži (videti zadatak 5.22) samo zonalni pravac, jednodimenzionalna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_{xx} - \frac{f_0^2}{gH} \right) h + \beta \overline{\delta_x h^x} = 0. \quad (1)$$

Zamenom talasnog rešenja u (1) za frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju na B mreži se dobija (Gavrilov, 1985)

$$v^* = - \frac{\beta \frac{\sin kd}{d}}{4 \frac{\sin^2(kd/2)}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (2)$$

Na Slici 33 prikazane su vrednosti bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , na B mreži i u analitičkom slučaju upotrebom MATLAB programa. Uočava se da B mreža usporava Rossbyjeve talase.



Slika 33. Fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom slučaju i na B, C i D mrežama.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje bezdimenzionalnih faznih brzina dat je u Listingu 21.

```
% BBRZINA.M 10:06 5/9/98
% Izracunavanje fazne brzine Rossby-jevih talasa
% na B mrezi i u anal. slucaju u jednoj dimenziji
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% M. B. Gavrilov, 1985: Frequency of quasi-geostrophic modes
% over grid points and definition of geostrophic wind
% Idojaras, 89, 77-85.
%
clear all; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 25*10^4; q = f0^2/(g*H);
r = sqrt(2); a = 0.25; b = 0.95; korak = 0.01;
%generisanje x-ose
x = a:korak:b; k = pi*x/d;
%fazne brzine na B mrezi
B = (-(sin(k*d)/d)./(4*sin(k*d/2).^2/d^2 + q))./(k*d^2);
%generisanje x-ose za analiticki slucaj
xl = a: korak:r; l = pi*xl/d;
%fazne brzine u analitickom slucaju
ANAL = -1./(l.^2 + q)./(l*d^2);
%crtanje faznih brzina
plot(x,B,xl,ANAL); axis([0 r -r 0]); title('B-mreza'); grid
```

Listing 21. Izračunavanje bezdimenzionalnih faznih brzina u analitičkom slučaju i na B mreži.

ZADATAK 5.35.

Polazeći od kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti u divergentnom slučaju zadatih samo duž zonalnog pravca (x -osa):

- izvesti izraze za frekvenciju Rosbijejevih talasa u analitičkom slučaju i na C mreži;
- napisati računarski program za izračunavanje bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom i diskretnom slučaju;
- grafički i/ili tabelarno prikazati dobijene rezultate kada je $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $d = 25 \times 10^4 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$.

Rešenje:

Posmatrajući u dvodimenzionalnoj kvazi-geostrofskoj jednačini vrtložnosti na C mreži (videti zadatak 5.23) samo zonalni pravac, jednodimenzionalna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_{xx} h - \frac{f_0^2}{gH} \bar{h}^x \right) + \beta \overline{\delta_x h^x} = 0. \quad (1)$$

Zamenom talasnog rešenja u (1) za frekvenciju Rosbijejevih talasa u divergentnom slučaju na C mreži se dobija (Gavrilov, 1985)

$$v^* = - \frac{\beta \frac{\sin kd}{d}}{4 \frac{\sin^2(kd/2)}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH} \cos(kd/2)}. \quad (2)$$

Na Slici 33 prikazane su vrednosti bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , na C mreži i u analitičkom slučaju upotrebom MATLAB programa. Uočava se da C mreža usporava Rosbijeve talase.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje bezdimenzionalnih faznih brzina dat je u Listingu 22.

```

% CBRZINA.M 10:10 5/9/98
% Izracunavanje fazne brzine Rossby-jevih talasa
% na C mrezi i u anal. slucaju u jednoj dimenziji
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% M. B. Gavrilov, 1985: Frequency of quasi-geostrophic modes
% over grid points and definition of geostrophic wind
% Idojaras, 89, 77-85.
%
clear all; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 25*10^4; q = f0^2/(g*H);
r = sqrt(2); a = 0.25; b = 0.95; korak = 0.01;
%generisanje x-ose
x = a:korak:b; k = pi*x/d;
%fazne brzine na C mrezi
C = (-(sin(k*d)/d)./(4*sin(k*d/2).^2/d^2 + q*cos(k*d/2)))./(k*d^2);
%generisanje x-ose za analiticki slucaj
x1 = a: korak:r; l = pi*x1/d;
%fazne brzine u analitickom slucaju
ANAL = -l./(l.^2 + q)./(l*d^2);
%crtanje faznih brzina
plot(x,C,x1,ANAL); title('C-mreza'); axis([0 r -r 0]); grid

```

Listing 22. Izračunavanje bezdimenzionalnih faznih brzina u analitičkom slučaju i na C mreži.

ZADATAK 5.36.

Polazeći od kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti u divergentnom slučaju zadatih samo duž zonalnog pravca (x -osa):

- izvesti izraze za frekvenciju Rosbijevih talasa u analitičkom slučaju i na D mreži;
- napisati računarski program za izračunavanje bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom i diskretnom slučaju;
- grafički i/ili tabelarno prikazati dobijene rezultate kada je $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $d = 25 \times 10^4 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$.

Rešenje:

Posmatrajući u dvodimenzionalnoj kvazi-geostrofskoj jednačini vrtložnosti na D mreži (videti zadatak 5.24) samo zonalni pravac, jednodimenzionalna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\delta_{xx}^x} - \frac{f_0^2}{gH} \right) h + \beta \overline{\delta_x h^{xx}} = 0. \quad (1)$$

Zamenom talasnog rešenja u (1) za frekvenciju Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju na D mreži dobija se (Gavrilov, 1985)

$$v^* = - \frac{\beta \frac{\sin kd \cos(kd/2)}{d}}{2 \frac{\sin kd \sin(kd/2)}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (2)$$

Na Slici 33 prikazane su vrednosti bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , na D mreži i u analitičkom slučaju upotrebom MATLAB programa. Uočava se da D mreža usporava Rossbijeve talase.

Primer programa u MATLABu za izračunavanje i grafičko predstavljanje bezdimenzionalnih faznih brzina dat je u Listingu 23.

```
% DBRZINA.M 10:07 5/9/98
% Izracunavanje fazne brzine Rossby-jevih talasa
% na D mrezi i u anal. slucaju u jednoj dimenziji
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% M. B. Gavrilov, 1985: Frequency of quasi-geostrophic modes
% over grid points and definition of geostrophic wind
% Idojaras, 89, 77-85.
%
clear all; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 25*10^4; q = f0^2/(g*H);
r = sqrt(2); a = 0.25; b = 0.95; korak = 0.01;
%generisanje x-ose
x = a:korak:b; k = pi*x/d;
%fazne brzine na D mrezi
D = (-(sin(k*d).*cos(k*d/2)/d)./ ...
(2*sin(k*d).*sin(k*d/2)/d^2+q))./(k*d^2);
%generisanje x-ose za analiticki slucaj
x1 = a: korak:r; l = pi*x1/d;
%fazne brzine u analitickom slucaju
ANAL = -1./(l.^2 + q)./(l*d^2);
% crtanje faznih brzina
plot(x,D,x1,ANAL); axis([0 r -r 0]); title('D-mreza'); grid
```

Listing 23. Izračunavanje bezdimenzionalnih faznih brzina u analitičkom slučaju i na D mreži.

ZADATAK 5.37.

Polazeći od kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti u divergentnom slučaju zadatih samo duž zonalnog pravca (x -osa):

- izvesti izraze za frekvenciju Rossbijeve talasa u analitičkom slučaju i na E mreži;
- napisati računarski program za izračunavanje bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom i diskretnom slučaju;
- grafički i/ili tabelarno prikazati dobijene rezultate kada je $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $d = 25 \times 10^4 \text{ m}$ i $H = 10^4 \text{ m}$.

Rešenje:

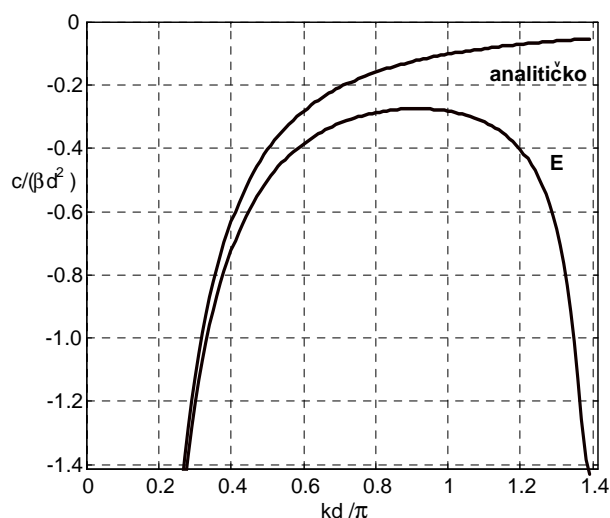
Posmatrajući u dvodimenzionalnoj kvazi-geostrofskoj jednačini vrtložnosti na E mreži (videti zadatak 5.25) samo zonalni pravac, jednodimenzionalna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_{xx} - \frac{f_0^2}{gH} \right) h + \beta \delta_x h = 0. \quad (1)$$

Zamenom talasnog rešenja u (1) za frekvenciju Rossbijevih talasa u divergentnom slucaju na E mreži se dobija (Gavrilov, 1985)

$$v^* = -\frac{\beta\sqrt{2} \frac{\sin(kd/\sqrt{2})}{d}}{2 \frac{\sin^2(kd/\sqrt{2})}{d^2} + \frac{f_0^2}{gH}}. \quad (2)$$

Na Slici 34 prikazane su vrednosti bezdimenzionalne fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , na E mreži i u analitičkom slucaju upotrebom MATLAB programa. Uočava se da E mreža ubrzava Rossbijeve talase.



Slika 34. Fazne brzine, $c/\beta d^2$, u funkciji bezdimenzionalnih talasnih brojeva, kd/π , u analitičkom slucaju i na E mreži.

Primer programa u MATLABu za izracunavanje i graficko predstavljanje bezdimenzionalnih faznih brzina dat je u Listingu 24.

```
% EBRZINA.M 10:09 5/9/98
% Izracunavanje fazne brzine Rossby-jevih talasa
% na E mrezi i u anal. slucaju u jednoj dimenziji
% Autori: Ivana A. Tosic i Milivoj B. Gavrilov
%
% M. B. Gavrilov, 1985: Frequency of quasi-geostrophic modes
% over grid points and definition of geostrophic wind
% Idojaras, 89, 77-85.
%
clear all; close all;
f0 = 10^(-4); g = 9.81; H = 10^4; d = 25*10^4; q = f0^2/(g*H);
r = sqrt(2); a = 0.25; b = 0.95; korak = 0.01;
%generisanje x-ose
x = a:korak:r; l = pi*x/d;
%fazne brzine na E mrezi
E = -(r*sin(l*d/r)/d)./(2*sin(l*d/r).^2/d^2 + q)./(l*d^2);
%fazne brzine u analitickom slucaju
ANAL = -l./(l.^2 + q)./(l*d^2);
%crtanje faznih brzina
plot(x,E,x,ANAL); axis([0 r -r 0]); title('E-mreza'); grid
```

Listing 24. Izracunavanje bezdimenzionalnih faznih brzina u analitičkom slucaju i na E mreži.

ZADATAK 5.38.

Polazeći od diskretizovanih kvazi-geostrofskih jednačina vrtložnosti definisanih samo u zonalnom pravcu na svim Arakavinim mrežama, izvesti izraze za fazne brzine Rosbijevih talasa u bezdivergentnom slučaju.

Rešenje:

Zanemarivanjem divergentnog člana u izrazima za frekvencije Rosbijevih talasa u divergentnom slučaju u zadacima 5.33-5.37, i deljenjem tako dobijenih izraza sa talasnim brojem, k , za fazne brzine Rosbijevih talasa u bezdivergentnom slučaju na Arakavinim mrežama se dobija, redom

$$c_A^* = -\frac{\beta}{k^2} \frac{kd}{\sin kd}, \quad (1)$$

$$c_{B,C,D}^* = -\frac{\beta}{k^2} \frac{kd/2}{\tan(kd/2)}, \quad (2)$$

$$c_E^* = -\frac{\beta}{k^2} \frac{kd/\sqrt{2}}{\sin(kd/\sqrt{2})}. \quad (3)$$

Rezultati identični ovim mogu se naći kod Mesingera (1979).

ZADATAK 5.39.

Ispitati ponašanje faznih brzina Rosbijevih talasa u bezdivergentnom slučaju za male vrednosti kd .

Rešenje:

Razvojem u Tejlorov red izraza (1)-(3) iz zadatka 5.38, dobija se

$$c_A^* = c \left[1 + \frac{1}{6}(kd)^2 - \dots \right], \quad (1)$$

$$c_{B,C,D}^* = c \left[1 - \frac{1}{12}(kd)^2 + \dots \right], \quad (2)$$

$$c_E^* = c \left[1 + \frac{1}{12}(kd)^2 - \dots \right], \quad (3)$$

gde je $c = -\beta/k^2$, izraz za faznu brzinu jednodimenzionalnih Rosbijevih talasa u bezdivergentnom slučaju u odsustvu osnovne struje.

Analizom (1)-(3) uočava se da A i E mreže ubrzavaju, a B, C i D usporavaju Rosbijeve talase. Rezultati identični ovim mogu se naći kod Mesingera (1979).

5.4 MREŽE B/E I C

ZADATAK 5.40.

Polazeći od sistema jednačina za plitku vodu izraženog preko potencijala brzine i strujne funkcije, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, odrediti aproksimaciju Laplasijana potencijala brzine na C mreži tako da se dobiju izrazi za relativne frekvencije, $(v/f)^2$, gravitaciono-inercijalnih talasa.

Rešenje (Janjić, 1993):

Linearizovan sistem jednačina za plitku vodu izražen preko potencijala brzine, χ , i strujne funkcije, ψ , za gravitaciono-inercijalne talase ima oblik

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -f \chi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = f \psi - gh, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \nabla^2 \chi. \quad (3)$$

Smatrajući da se Laplasijan potencijala brzine, definisan na najprirodniji način iz pet tačaka na C mreži (Slika 10), može napisati

$$\nabla_C^2 \chi = \delta_{xx} \chi + \delta_{yy} \chi,$$

diskretizacijom ostalih članova u (1)-(3) i zamenom talasnih rešenja u obliku

$$\chi, \psi, h = \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{h} e^{i(kid + ljd - v^* t)}, \quad (4)$$

za relativne frekvencije se dobija

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{X}{2} \cos^2 \frac{Y}{2} + \frac{\lambda^2}{d^2} E(\nabla_C^2), \quad (5)$$

gde je

$$E(\nabla_C^2) = 4 \left(\sin^2 \frac{X}{2} + \sin^2 \frac{Y}{2} \right). \quad (6)$$

Operator $E(\nabla_C^2)$ predstavlja svojstvene vrednosti bezdimenzionalne aproksimacije Laplasijana ∇_C^2 pomnožen sa d^2 .

ZADATAK 5.41.

Polazeći od sistema jednačina za plitku vodu, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika i operatora osrednjavanja, odrediti aproksimaciju Laplasijana potencijala brzine na E mreži tako da se dobiju izrazi za relativne frekvencije, $(v/f)^2$, gravitaciono-inercijalnih talasa.

Rešenje (Janjić, 1993):

Smatrajući da se Laplasijan potencijala brzine, definisan na najprirodniji način iz pet tačaka na E mreži (Slika 10), može napisati

$$\nabla_E^2 \chi = \delta_{xx} \chi + \delta_{yy} \chi, \quad (1)$$

diskretizacijom ostalih članova u (1)-(3) u zadatku 5.40 i zamenom talasnih rešenja u obliku

$$\chi, \psi, h = \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{h} e^{i(ki\sqrt{2}d + lj\sqrt{2}d - v^*t)}, \quad (2)$$

za relativne frekvencije se dobija

$$\left(\frac{v^*}{f}\right)^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{d^2} E(\nabla_E^2), \quad (3)$$

gde je

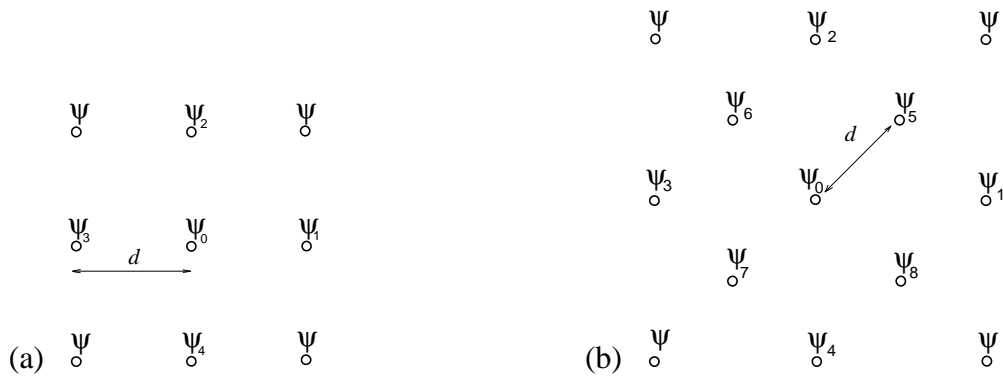
$$E(\nabla_E^2) = 2 \left(\sin^2 \frac{X}{\sqrt{2}} + \sin^2 \frac{Y}{\sqrt{2}} \right). \quad (4)$$

Operator $E(\nabla_E^2)$ predstavlja svojstvene vrednosti bezdimenzionalne aproksimacije Laplasijana ∇_E^2 pomnožen sa d^2 .

ZADATAK 5.42.

Na Slici 35 prikazane su uzorci C i E mreža preko strujne funkcije. Odrediti i grafički prikazati svojstvene vrednosti Laplasijana strujne funkcije u konačnim razlikama definisanih kao:

- $\nabla_{\times}^2 \psi$ - na C mreži;
- $\nabla_{+}^2 \psi$ - na E mreži;
- $\nabla_{\times}^2 \psi$ - na E mreži.



Slika 35. Uzorci tačaka: (a) C i (b) E mreža preko strujnih funkcija.

Rešenje (Janjić, 1984):

Polazeći od Helmholtzove jednačine

$$\nabla^2 \psi + \lambda_{mn}^2 \psi = 0, \quad (1)$$

i zamenom talasnog rešenja u obliku

$$\psi = \hat{\psi}_{mn} e^{i(k_{mn}x + l_{mn}y)}, \quad (2)$$

za svojstvene vrednosti, označene sa mn , m i n , Laplasijana u kontinualnom slučaju se dobija

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{1}{d^2} (k_{mn}^2 d^2 + l_{mn}^2 d^2). \quad (3)$$

U diskretnom slučaju Helmholtzova jednačina se može napisati

$$\nabla^2 \psi + \lambda_{mn}^2 \psi = 0, \quad (4)$$

gde je ∇^2 diskretizovani Laplasov operator, a λ_{mn}^2 diskretne svojstvene vrednosti.

a) Na osnovu Slike 35a diskretizovani Laplasov operator, $\nabla^2 \psi$, na C mreži je definisan

$$\nabla^2 \psi \equiv \nabla_{\times}^2 \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0}{d^2}. \quad (5)$$

Zamenom u (5) talasnog rešenja u obliku

$$\psi = \hat{\psi} e^{i(k_m d + l_n j d)}, \quad (6)$$

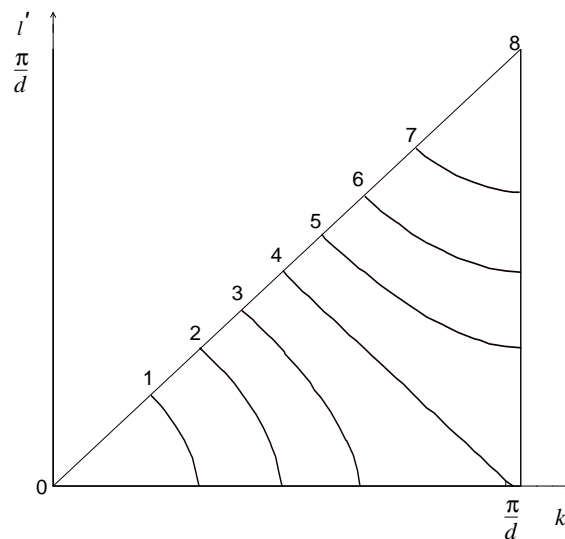
koristeći¹¹ dobija se

$$\nabla_{\times}^2 \hat{\psi} + \frac{4}{d^2} \left(\sin^2 \frac{k_m d}{2} + \sin^2 \frac{l_n d}{2} \right) \hat{\psi} = 0. \quad (7)$$

Upoređujući (4) i (7) za svojstvene vrednosti Laplasijana $\nabla_{\times}^2 \psi$ na C mreži se dobija

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{4}{d^2} \left(\sin^2 \frac{k_m d}{2} + \sin^2 \frac{l_n d}{2} \right), \quad (8)$$

ili u grafičkom obliku kao na Slici 36.



Slika 36. Svojstvene vrednosti Laplasijana $\nabla_{\times}^2 \psi$ na C mreži u jednoj osmini oblasti dozvoljenih talasnih brojeva.

b) Na osnovu Slike 35b diskretizovan Laplasov operator, $\nabla^2 \psi$, na E mreži može se definisati

$$\nabla^2 \psi \equiv \nabla_+^2 \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0}{2d^2}. \quad (9)$$

Zamenom u (9) talasnog rešenja u obliku

$$\psi = \hat{\psi} e^{i(k_m i \sqrt{2} d + l_n j \sqrt{2} d)}, \quad (10)$$

¹¹ Trigonometrijska relacija glasi

$$\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

gde je

$$x = \frac{k_m d}{2} \equiv \frac{l_n d}{2}.$$

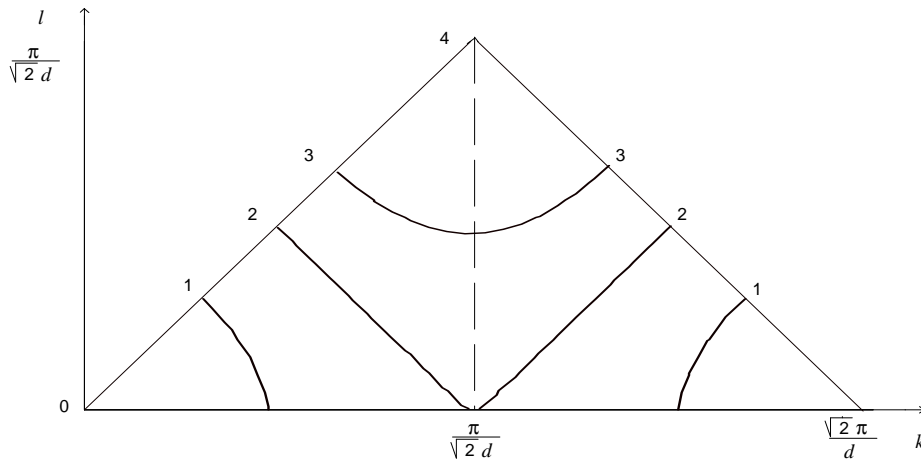
se dobija

$$\nabla_+^2 \hat{\psi} + \frac{2}{d^2} \left(\sin^2 \frac{k_m d}{\sqrt{2}} + \sin^2 \frac{l_n d}{\sqrt{2}} \right) \hat{\psi} = 0. \quad (11)$$

Upoređujući (4) i (11) za svojstvene vrednosti Laplasijana $\nabla_+^2 \psi$ na E mreži se dobija

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{2}{d^2} \left(\sin^2 \frac{k_m d}{\sqrt{2}} + \sin^2 \frac{l_n d}{\sqrt{2}} \right), \quad (12)$$

ili u grafičkom obliku kao na Slici 37.



Slika 37. Svojstvene vrednosti Laplasijana $\nabla_+^2 \psi$ na E mreži u jednoj osmini oblasti dozvoljenih talasnih brojeva.

c) Na osnovu Slike 35b diskretizovan Laplasov operator, $\nabla^2 \psi$, na E mreži može se definisati

$$\nabla_{\times}^2 \psi = \frac{\psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8 - 4\psi_0}{d^2}. \quad (13)$$

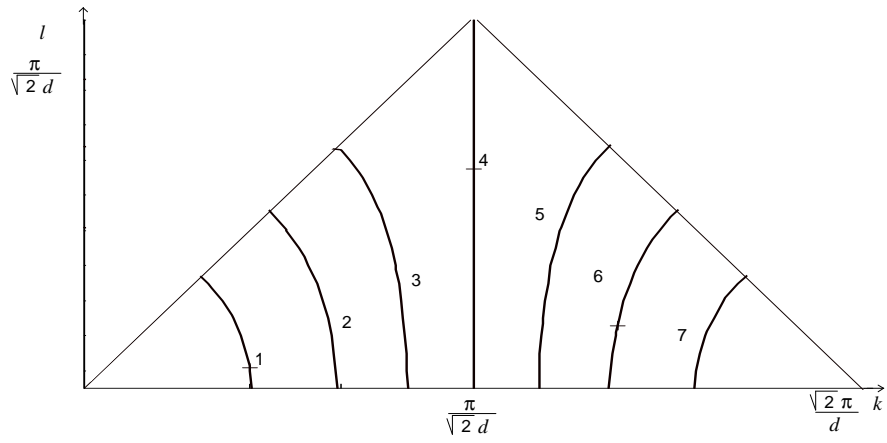
Zamenom u (13) talasnog rešenja (10), dobija se

$$\nabla_{\times}^2 \hat{\psi} + \frac{4}{d^2} \left(1 - \cos \frac{k_m d}{\sqrt{2}} \cos \frac{l_n d}{\sqrt{2}} \right) \hat{\psi} = 0. \quad (14)$$

Upoređujući (4) i (14) za svojstvene vrednosti Laplasijana $\nabla_{\times}^2 \psi$ na E mreži se dobija

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{4}{d^2} \left(1 - \cos \frac{k_m d}{\sqrt{2}} \cos \frac{l_n d}{\sqrt{2}} \right), \quad (15)$$

ili u grafičkom obliku kao na Slici 38.



Slika 38. Svojtvene vrednosti Laplasijana $\nabla_{\times}^2 \psi$ na E mreži u jednoj osmini oblasti dozvoljenih talasnih brojeva.

5.5 ARAKAVIN JAKOBIJAN

ZADATAK 5.43.

Na osnovu definicije Jakobijana u ravnoj geometriji, napisati konzistentne aproksimacije ovog operatora upotrebom centralnih količnika konačnih razlika preko dva koraka mreže u slučaju kvadratnog nerazmaknutog rasporeda zavisno promenljivih u simboličkom i razvijenom obliku.

Rešenje (Arakawa, 1966):

Jakobijan je definisan izrazima

$$J_1(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (1)$$

$$J_2(A, B) = \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial A}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$J_3(A, B) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial B}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right), \quad (3)$$

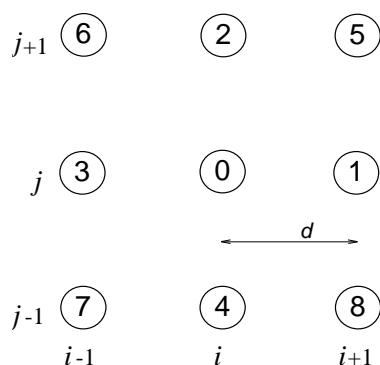
gde su A i B zavisno promenljive veličine. Polazeći od rasporeda prikazanog na Slici 39, gde su u tačkama mreže definisane obe vrednosti zavisno promenljivih, upotrebom centralnih količnika konačnih razlika preko dva koraka mreže, konzistentne aproksimacije za (1)-(3) u simboličkom obliku mogu se napisati

$$J_1^\Delta(A, B) = \delta_x A \delta_y B - \delta_y A \delta_x B, \quad (4)$$

$$J_2^\Delta(A, B) = \delta_y (B \delta_x A) - \delta_x (B \delta_y A), \quad (5)$$

$$J_3^\Delta(A, B) = \delta_x (A \delta_y B) - \delta_y (A \delta_x B), \quad (6)$$

gde je Δ oznaka za Jakobijan u konačnim razlikama.



Slika 39. Raspored računskih tačaka za definisanje Jakobijana u konačnim razlikama.

Posmatranjem Slike 39 i razvojem desnih strana (4)-(6) u tački (i, j) , Jakobijani se u razvijenom obliku mogu napisati

$$J_1^\Delta(A, B) \equiv J_{i,j}^{++}(A, B) = \frac{1}{4d^2} \left[(A_{i+1,j} - A_{i-1,j})(B_{i,j+1} - B_{i,j-1}) - (A_{i,j+1} - A_{i,j-1})(B_{i+1,j} - B_{i-1,j}) \right], \quad (7)$$

$$J_2^\Delta(A, B) \equiv J_{i,j}^{\times+}(A, B) = \frac{1}{4d^2} \left[B_{i,j+1}(A_{i+1,j+1} - A_{i-1,j+1}) - B_{i,j-1}(A_{i+1,j-1} - A_{i-1,j-1}) - B_{i+1,j}(A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j-1}) + B_{i-1,j}(A_{i-1,j+1} - A_{i-1,j-1}) \right], \quad (8)$$

$$J_3^\Delta(A, B) \equiv J_{i,j}^{+\times}(A, B) = \frac{1}{4d^2} \left[A_{i+1,j}(B_{i+1,j+1} - B_{i+1,j-1}) - A_{i-1,j}(B_{i-1,j+1} - B_{i-1,j-1}) - A_{i,j+1}(B_{i+1,j+1} - B_{i-1,j+1}) + A_{i,j-1}(B_{i+1,j-1} - B_{i-1,j-1}) \right]. \quad (9)$$

Simboli $+$ i \times označavaju položaj tačaka iz kojih se, redom kako su oznake napisane, uzimaju vrednosti veličina A i B . Simbol $+$ označava "krstasti" raspored u odnosu na centralnu tačku, ili korišćenje tačaka $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i-1, j)$ i $(i, j-1)$, simbol \times označava "dijagonalni" raspored u odnosu na centralnu tačku, ili korišćenje tačaka $(i+1, j+1)$, $(i-1, j+1)$, $(i-1, j-1)$ i $(i+1, j-1)$

ZADATAK 5.44.

Formirati Arakavin Jakobijan polazeći od definicija Jakobijana dobijenih centralnim količnikom konačnih razlika preko dva koraka mreže na nerazmaknutom rasporedu promenljivih.

Rešenje (Arakawa, 1966):

Polazeći od definicija (7)-(9) iz zadatka 5.43, u opštem obliku Jakobijan se može napisati kao linearna kombinacija

$$J^\Delta(A, B) = \alpha J^{++} + \gamma J^{\times+} + \beta J^{+\times}, \quad (1)$$

gde su α , β i γ konstante koje zadovoljavaju uslov

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (2)$$

Kada je

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma = \frac{1}{3}, \quad (3)$$

izraz (1) predstavlja definiciju Arakavinog Jakobijana

$$J^\Delta(A, B) \equiv J_A(A, B) = \frac{1}{3} (J^{++} + J^{\times+} + J^{+\times}) \quad (4)$$

ili, u razvijenom obliku

$$\begin{aligned}
 J_A(A, B) = & \frac{1}{12d^2} \left[(A_{i+1,j} - A_{i-1,j})(B_{i,j+1} - B_{i,j-1}) - (A_{i,j+1} - A_{i,j-1})(B_{i+1,j} - B_{i-1,j}) + \right. \\
 & + B_{i,j+1}(A_{i+1,j+1} - A_{i-1,j+1}) - B_{i,j-1}(A_{i+1,j-1} - A_{i-1,j-1}) - \\
 & - B_{i+1,j}(A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j-1}) + B_{i-1,j}(A_{i-1,j+1} - A_{i-1,j-1}) + \\
 & + A_{i+1,j}(B_{i+1,j+1} - B_{i+1,j-1}) - A_{i-1,j}(B_{i-1,j+1} - B_{i-1,j-1}) - \\
 & \left. - A_{i,j+1}(B_{i+1,j+1} - B_{i-1,j+1}) + A_{i,j-1}(B_{i+1,j-1} - B_{i-1,j-1}) \right]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

ZADATAK 5.45.

Dokazati da Arakavin Jakobijan ima osobine:

- a) $J_A(A, A) = 0$ i
 b) $J_A(A, B) = -J_A(B, A)$.

Rešenje (Arakawa, 1966):

Koristeći oznake u kružićima na Slici 39, Arakavin Jakobijan (5) iz zadatka 5.44 se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
 J_A(A_0, B_0) = & \frac{1}{12d^2} \left[(A_1 - A_3)(B_2 - B_4) - (A_2 - A_4)(B_1 - B_3) + \right. \\
 & + B_2(A_5 - A_6) - B_4(A_8 - A_7) - B_1(A_5 - A_8) + B_3(A_6 - A_7) + \\
 & \left. + A_1(B_5 - B_8) - A_3(B_6 - B_7) - A_2(B_5 - B_6) + A_4(B_8 - B_7) \right]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

a) Stavljanjem da je

$$B \equiv A, \quad (2)$$

izraz (1) postaje

$$\begin{aligned}
 J_A(A_0, A_0) = & \frac{1}{12d^2} \left[(A_1 - A_3)(A_2 - A_4) - (A_2 - A_4)(A_1 - A_3) + \right. \\
 & + A_2(A_5 - A_6) - A_4(A_8 - A_7) - A_1(A_5 - A_8) + A_3(A_6 - A_7) + \\
 & \left. + A_1(A_5 - A_8) - A_3(A_6 - A_7) - A_2(A_5 - A_6) + A_4(A_8 - A_7) \right]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Množenjem i skraćivanjem članova sa desne strane (3) se dobija

$$J_A(A, A) = 0. \quad (4)$$

b) Stavljanjem da je

$$A \equiv B, \quad (5)$$

$$B \equiv A, \quad (6)$$

izraz (1) postaje

$$\begin{aligned} J_A(B_0, A_0) = & \frac{1}{12d^2} [(B_1 - B_3)(A_2 - A_4) - (B_2 - B_4)(A_1 - A_3) + \\ & + A_2(B_5 - B_6) - A_4(B_8 - B_7) - A_1(B_5 - B_8) + A_3(B_6 - B_7) + \\ & + B_1(A_5 - A_8) - B_3(A_6 - A_7) - B_2(A_5 - A_6) + B_4(A_8 - A_7)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Poređenjem (1) i (7) uočava se da je

$$J_A(A, B) = -J_A(B, A). \quad (8)$$

ZADATAK 5.46.

Dokazati da Arakavin Jakobijan ima osobinu

$$\overline{J_A(A, B)} = 0. \quad (1)$$

Rešenje (Arakawa, 1966):

Koristeći oznake u kružićima na Slici 39, aproksimacija Jakobijana (9) iz zadatka 5.43, može se napisati u obliku

$$J^{+\times}(A_0, B_0) = \frac{1}{4d^2} [A_1(B_5 - B_8) - A_3(B_6 - B_7) - A_2(B_5 - B_6) + A_4(B_8 - B_7)]. \quad (2)$$

Ako se desnoj strani dodaju i oduzmu članovi A_1B_0 , A_2B_0 , A_3B_0 i A_4B_0 , aproksimacija (2), može se napisati

$$\begin{aligned} J^{+\times}(A_0, B_0) = & \frac{1}{4d^2} \{ [-(A_1 - A_4)(B_8 + B_0)] - [-(A_2 - A_3)(B_0 + B_6)] + \\ & + [(A_1 - A_2)(B_5 + B_0)] - [(A_4 - A_3)(B_0 + B_7)] \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Koristeći Sliku 39 i kombinujući aproksimacije Jakobijana (8) i (7) iz zadatka 5.43, dobija se

$$\begin{aligned} J^{\times+}(A_0, B_0) + J^{++}(A_0, B_0) = & \frac{1}{4d^2} [B_2(A_5 - A_6) - B_4(A_8 - A_7) - B_1(A_5 - A_8) + B_3(A_6 - A_7) + \\ & + (A_1 - A_3)(B_2 - B_4) - (A_2 - A_4)(B_1 - B_3)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ako se desnoj strani dodaju i oduzmu članovi A_1B_0 , A_2B_0 , A_3B_0 , A_4B_0 , A_5B_0 , A_6B_0 , A_7B_0 i A_8B_0 , aproksimacija (4) se može napisati

$$\begin{aligned} J^{\times+}(A_0, B_0) + J^{++}(A_0, B_0) = & \frac{1}{4d^2} \{ [-(A_1 + A_0 + A_2 + A_5 - A_4 - A_8 - A_1 - A_0)(B_1 + B_0)] - \\ & - [-(A_3 + A_0 + A_2 + A_6 - A_4 - A_7 - A_3 - A_0)(B_0 + B_3)] + \\ & + [(A_1 + A_5 + A_2 + A_0 - A_2 - A_0 - A_3 - A_6)(B_2 + B_0)] - \\ & - [(A_1 + A_8 + A_0 + A_4 - A_0 - A_4 - A_3 - A_7)(B_0 + B_4)] \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Operatori osrednjavanja i diferenciranja u konačnim razlikama koji će se koristiti u nastavku ovog zadatka na primeru promenljive A i duž x pravca, mogu se definisati

$$\bar{A}^x = \frac{1}{2}(A_0 + A_1), \quad (6)$$

$$\bar{A}^{x'} = \frac{1}{2}(A_0 + A_5), \quad (7)$$

$$\bar{A}^{xy} = \frac{1}{4}(A_0 + A_1 + A_2 + A_5), \quad (8)$$

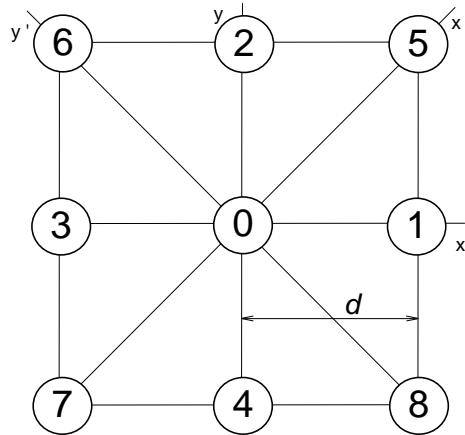
$$\delta_x A = \frac{1}{d}(A_1 - A_0), \quad (9)$$

$$\delta_{x'} A = \frac{1}{\sqrt{2}d}(A_5 - A_0). \quad (10)$$

Na analogan način se definišu duž y pravca operatori osrednjavanja i diferenciranja \bar{A}^y , $\bar{A}^{y'}$, \bar{A}^{yx} , $\delta_y A$ i $\delta_{y'} A$. Normalno, sve navedeno važi i za promenljivu B . Sada, Arakavin Jakobijan se može napisati

$$J_A(A, B) = \frac{1}{3} [J^{++}(A, B) + J^{\times+}(A, B) + J^{\times\times}(A, B)]. \quad (11)$$

Zamenjujući (3) i (5) u (11), koristeći (6)-(10) i posmatranjem Slike 40, za Arakavin Jakobijan se dobija



Slika 40. Raspored računskih tačaka i koordinatnih osa korišćen za definisanje Arakavinog Jakobijana na C mreži.

$$J_A(A, B) = \left\{ \frac{1}{3} \delta_{x'} [(-\delta_{y'} A) \bar{B}^{x'}] + \frac{1}{3} \delta_{y'} [(\delta_{x'} A) \bar{B}^{y'}] + \frac{2}{3} \delta_x [(-\delta_y \bar{A}^{xy}) \bar{B}^x] + \frac{2}{3} \delta_y [(\delta_x \bar{A}^{xy}) \bar{B}^y] \right\}. \quad (12)$$

Ako se nove veličine definišu

$$A' \equiv -\delta_{y'} A, \quad (13)$$

$$B' \equiv \delta_{x'} A, \quad (14)$$

$$A'' \equiv -\delta_y A, \quad (15)$$

$$B'' \equiv \delta_x A, \quad (16)$$

i zamene u (12), konačno se za Arakavin Jakobijan dobija

$$J_A(A, B) = \left\{ \frac{1}{3} [\delta_{x'} (A'' \bar{B}^{x'}) + \delta_{y'} (B'' \bar{B}^{y'})] + \frac{2}{3} [\delta_x (\bar{A}^{xy} \bar{B}^x) + \delta_y (\bar{B}^{xy} \bar{B}^y)] \right\}. \quad (17)$$

Izraz na desnoj strani (17) je aproksimacija divergencije. Pod uslovom da se operator osrednjavanja primenjuje preko zatvorene oblasti ili oblasti sa cikličnim graničnim uslovima, doprinos članova na desnoj strani (17) se poništava, odnosno

$$\overline{J_A(A, B)} = 0. \quad (18)$$

ZADATAK 5.47.

Dokazati da Arakavin Jakobijan ima osobine:

$$\text{a) } \overline{BJ_A(A, B)} = 0 \text{ i}$$

$$\text{b) } \overline{AJ_A(A, B)} = 0.$$

Rešenje (Arakawa, 1966):

a) Korišćenjem identiteta (videti zadatak 7.2)

$$\delta_s(b\bar{a}^s) = a\delta_s b + \overline{b\delta_s a^s}, \quad (1)$$

gde su a i b neke zavisno promenljive, a s proizvoljna koordinatna osa, izraz (1) iz zadatka 5.46 se transformiše

$$\begin{aligned} J_A(A, B) = & \left\{ \frac{1}{3} \left[\overline{A''\delta_x B^{x'}} + \overline{B''\delta_y B^{y'}} \right] + \frac{2}{3} \left[\overline{A^{xy}\delta_x B^x} + \overline{B^{xy}\delta_y B^y} \right] \right\} + \\ & + B \left\{ \frac{1}{3} \left[\delta_x A'' + \delta_y B'' \right] + \frac{2}{3} \left[\delta_x \bar{A}^{xy} + \delta_y \bar{B}^{xy} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Poslednja dva člana u uglastim zagradama desne strane (2) na osnovu definicija (13)-(16) iz zadatka 5.46 se mogu napisati

$$\delta_x A'' + \delta_y B'' \equiv \delta_x (-\delta_y A) + \delta_y (\delta_x A) = 0, \quad (3)$$

$$\delta_x \bar{A}^{xy} + \delta_y \bar{B}^{xy} \equiv \delta_x (-\delta_y \bar{A}^{xy}) + \delta_y (\delta_x \bar{A}^{xy}) = 0. \quad (4)$$

Ako se (2) pomnoži sa B , dobija se

$$BJ_A(A, B) = \left\{ \frac{1}{3} \left[\overline{BA''\delta_x B^{x'}} + \overline{BB''\delta_y B^{y'}} \right] + \frac{2}{3} \left[\overline{BA^{xy}\delta_x B^x} + \overline{BB^{xy}\delta_y B^y} \right] \right\}. \quad (5)$$

Ponovo, primenom novog identiteta (videti zadatak 7.1)

$$\overline{ab\delta_s a^s} = -\frac{1}{2}a^2\delta_s b + \delta_s \left(\frac{1}{2} \tilde{a}\tilde{a}^s \right), \quad (6)$$

na (5) se dobija

$$\begin{aligned} BJ_A(A, B) = & \left\{ \frac{1}{3} \left[\delta_x \left(\frac{1}{2} \tilde{B}\tilde{B}^{x'} \right) + \delta_y \left(\frac{1}{2} \tilde{B}\tilde{B}^{y'} \right) \right] + \frac{2}{3} \left[\delta_x \left(\frac{1}{2} \tilde{B}\tilde{B}^x \right) + \delta_y \left(\frac{1}{2} \tilde{B}\tilde{B}^y \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{2} B^2 \left[\frac{1}{3} (\delta_x A'' + \delta_y B'') + \frac{2}{3} (\delta_x \bar{A}^{xy} + \delta_y \bar{B}^{xy}) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Na osnovu (3) i (4), član pomnožen sa $B^2/2$ u (7) je identički jednak nuli. Preostali članovi na desnoj strani (7) predstavljaju divergenciju. Pod uslovom da se operator osrednjavanja primenjuje

preko zatvorene oblasti ili oblasti sa cikličnim graničnim uslovima, doprinos članova na desnoj strani (7) se poništava, odnosno

$$\overline{BJ_A(A, B)} = 0. \quad (8)$$

b) Stavljajući da je

$$A \equiv B, \quad (9)$$

$$B \equiv A, \quad (10)$$

izraz (8) se može napisati u obliku

$$\overline{AJ_A(B, A)} = 0. \quad (11)$$

Znajući da je (videti zadatak 5.45)

$$J_A(A, B) = -J_A(B, A), \quad (12)$$

izraz (11) postaje

$$\overline{AJ_A(A, B)} = 0. \quad (13)$$

ZADATAK 5.48.

Dokazati da se izraz na C mreži definisan u obliku

$$\begin{aligned} J_A(A, B) = & \frac{1}{3} \left\{ \delta_{x'} \left[\sqrt{2} \left(\overline{-\delta_y A^x + \delta_x A^y} \right) \overline{B^{x'}} \right] + \delta_{y'} \left[\sqrt{2} \left(\overline{\delta_y A^x + \delta_x A^y} \right) \overline{B^{y'}} \right] \right\} + \\ & + \frac{2}{3} \left\{ \delta_x \left[\left(\overline{-\delta_y A^{xy}} \right) \overline{B^x} \right] + \delta_y \left[\left(\overline{\delta_x A^{xy}} \right) \overline{B^y} \right] \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

svodi na Arakavin Jakobijan.

Rešenje (Janjić, 1993):

Posmatranjem Slike 40 i razvojem (1), dobija se

$$\begin{aligned} J_A(A, B) = & \frac{1}{12d^2} \left[(A_1 - A_3)(B_2 - B_4) - (A_2 - A_4)(B_1 - B_3) + \right. \\ & + B_2(A_5 - A_6) - B_4(A_8 - A_7) - B_1(A_5 - A_8) + B_3(A_6 - A_7) + \\ & \left. + A_1(B_5 - B_8) - A_3(B_6 - B_7) - A_2(B_5 - B_6) + A_4(B_8 - B_7) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Izraz (2) predstavlja izvorni oblik Arakavinog Jakobijana.

ZADATAK 5.49.

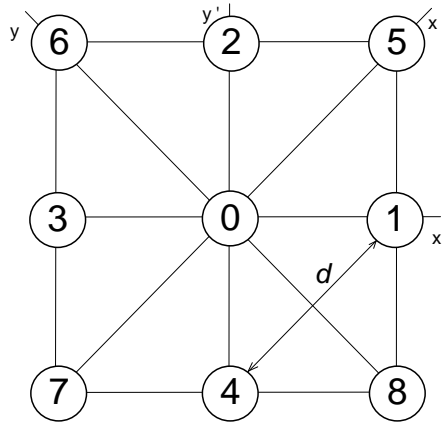
Dokazati da se izraz na E mreži definisan u obliku

$$J_A(A, B) = \frac{1}{3} \left\{ \delta_x [(-\delta_y A) \bar{B}^x] + \delta_y [(\delta_x A) \bar{B}^y] \right\} + \frac{2}{3} \left\{ \delta_{x'} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (-\delta_y A + \delta_x A^{y'}) \bar{B}^{x'} \right] + \delta_{y'} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\delta_y A + \delta_x A^{x'}) \bar{B}^{y'} \right] \right\}, \quad (1)$$

svodi na Arakavin Jakobijan.

Rešenje (Janjić, 1993):

Posmatranjem Slike 41 i razvojem (1), dobija se



Slika 41. Raspored računskih tačaka i koordinatnih osa korišćen za definisanje Arakavinog Jakobijana na E mreži.

$$J_A(A, B) = \frac{1}{12d^2} \left[(A_1 - A_3)(B_2 - B_4) - (A_2 - A_4)(B_1 - B_3) + B_2(A_5 - A_6) - B_4(A_8 - A_7) - B_1(A_5 - A_8) + B_3(A_6 - A_7) + A_1(B_5 - B_8) - A_3(B_6 - B_7) - A_2(B_5 - B_6) + A_4(B_8 - B_7) \right]. \quad (2)$$

Izraz (2) predstavlja izvorni oblik Arakavinog Jakobijana.

ZADATAK 5.50.

Diskretizovati advektivne članove jednačina za plitku vodu u obliku Arakavinog Jakobijana na C mreži u uslovima bezdivergentnog strujanja.

Rešenje (Arakawa i Lamb, 1977):

Znajući da se advektivni članovi u jednačinama kretanjama mogu napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -J \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -J \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (2)$$

i posmatranjem C mreže na Slici 10, izrazi (1) i (2) se mogu napisati

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_y \psi) = -J_A (\bar{\psi}^y, \delta_y \psi), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_x \psi) = -J_A (\bar{\psi}^x, \delta_x \psi). \quad (4)$$

ZADATAK 5.51.

Diskretizovati advektivne članove jednačina za plitku vodu u obliku Arakavinog Jakobijana na E mreži u uslovima bezdivergentnog strujanja.

Rešenje (Janjić, 1977):

Posmatranjem E mreže na Slici 10, izrazi (1) i (2) iz zadatka 5.50 se mogu napisati

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_y \psi) = -J_A (\bar{\psi}^y, \delta_y \psi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_x \psi) = -J_A (\bar{\psi}^x, \delta_x \psi). \quad (2)$$

ZADATAK 5.52.

Dokazati da na E mreži važi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_+^2 \psi) = -J_A(\psi, \nabla_+^2 \psi). \quad (1)$$

Rešenje (Janjić, 1984):

Leva strana (1) se može napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_+^2 \psi) = \delta_y \left[\frac{\partial}{\partial t}(\delta_y \psi) \right] + \delta_x \left[\frac{\partial}{\partial t}(\delta_x \psi) \right]. \quad (2)$$

Zamenom (1) i (2) iz zadatka 5.51 u (2) se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_+^2 \psi) = \delta_y \left[-J_A(\bar{\psi}^y, \delta_y \psi) \right] + \delta_x \left[-J_A(\bar{\psi}^x, \delta_x \psi) \right]. \quad (3)$$

Primenom identiteta (videti zadatak 7.6)

$$\delta_s J_A(A, B) = J_A(\bar{A}^s, \delta_s B) + J_A(\delta_s A, \bar{B}^s), \quad (4)$$

gde je s oznaka za x i/ili y pravac, prvi i drugi član desne strane (3) mogu se napisati

$$\delta_y J_A(\bar{\psi}^y, \delta_y \psi) = J_A(\overline{\bar{\psi}^y}^y, \delta_y^2 \psi) + J_A(\delta_y \bar{\psi}^y, \delta_y \bar{\psi}^y), \quad (5)$$

$$\delta_x J_A(\bar{\psi}^x, \delta_x \psi) = J_A(\overline{\bar{\psi}^x}^x, \delta_x^2 \psi) + J_A(\delta_x \bar{\psi}^x, \delta_x \bar{\psi}^x). \quad (6)$$

Kako je (videti zadatak 5.45)

$$J_A(A, A) = 0, \quad (7)$$

i znajući identitet (videti zadatak 7.7)

$$\overline{\bar{a}}^s = a + \frac{d^2}{4} \delta_s(\delta_s a), \quad (8)$$

izrazi (5) i (6) postaju

$$\delta_y J_A(\bar{\psi}^y, \delta_y \psi) = J_A \left(\psi + \frac{d^2}{4} \delta_y^2 \psi, \delta_y^2 \psi \right), \quad (9)$$

$$\delta_x J_A(\bar{\psi}^x, \delta_x \psi) = J_A \left(\psi + \frac{d^2}{4} \delta_x^2 \psi, \delta_x^2 \psi \right). \quad (10)$$

Na osnovu osobina Arakavinog Jakobijana

$$J_A(A + B, C) = J_A(A, C) + J_A(B, C), \quad (11)$$

$$J_A(\alpha A, B) = \alpha J_A(A, B), \quad (12)$$

i koristeći (7), izrazi (9) i (10) postaju

$$\delta_y J_A(\bar{\psi}^y, \delta_y \psi) = J_A(\psi, \delta_y^2 \psi), \quad (13)$$

$$\delta_x J_A(\bar{\psi}^x, \delta_x \psi) = J_A(\psi, \delta_x^2 \psi). \quad (14)$$

Zamenom (13) i (14) u (3) i korišćenjem (11), konačno se dobija

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_+^2 \psi) = -J_A(\psi, \nabla_+^2 \psi), \quad (15)$$

čime je izraz (1) dokazan.

ZADATAK 5.53.

U slučaju bezdivergentnog strujanja na E mreži i ako važe ciklični granični uslovi dokazati očuvanost:

- a) srednje kinetičke energije i
- b) srednje enstrofije.

Rešenje (Janjić, 1977):

a) Množenjem sa ψ i osrednjavanjem preko oblasti u kojoj važe ciklični granični uslovi, bezdivergentna jednačina vrtložnosti na E mreži (videti zadatak 5.52) se može napisati

$$\overline{\psi \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_+^2 \psi)} = -\overline{\psi J_A(\psi, \nabla_+^2 \psi)}. \quad (1)$$

Znajući da u oblasti sa cikličnim graničnim uslovima za Arakavin Jakobijan važi (videti zadatak 5.47)

$$\overline{AJ_A(A, B)} = 0, \quad (2)$$

izraz (1) postaje

$$\overline{\psi \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_+^2 \psi)} = 0. \quad (3)$$

Koristeći (videti zadatak 7.8)

$$\overline{A \nabla_+^2 B} = \overline{\delta_x A \delta_x B + \delta_y A \delta_y B}, \quad (4)$$

leva strana (3) se može napisati

$$\overline{\psi \nabla_+^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}} = \overline{\delta_x \psi \frac{\partial}{\partial t} \delta_x \psi + \delta_y \psi \frac{\partial}{\partial t} \delta_y \psi}, \quad (5)$$

odnosno, nakon grupisanja operatora, dobija se

$$\overline{\psi \nabla_+^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\delta_x \psi)^2 + (\delta_y \psi)^2}. \quad (6)$$

Znajući da u bezdivergentnom slučaju na E mreži važe relacije (videti zadatak 5.3)

$$u = -\delta_y \psi, \quad (7)$$

$$v = \delta_x \psi, \quad (8)$$

za srednju kinetičku energiju se dobija

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{(\delta_x \psi)^2 + (\delta_y \psi)^2}. \quad (9)$$

Zamenjujući (9) u (6) i znajući da važi (3), može se napisati

$$\bar{K} = const, \quad (10)$$

čime je dokazana očuvanost srednje kinetičke energije.

b) Množenjem sa $\nabla_+^2 \psi$ i osrednjavanjem preko oblasti u kojoj važe ciklični granični uslovi, bezdivergentna jednačina vrtložnosti na E mreži (videti zadatak 5.52), može se napisati

$$\overline{\nabla_+^2 \psi \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_+^2 \psi)} = -\overline{\nabla_+^2 \psi J_A(\psi, \nabla_+^2 \psi)}. \quad (11)$$

Znajući da u oblasti cikličnih graničnih uslova za Arakavin Jakobijan važi (videti zadatak 5.47)

$$\overline{BJ_A(A, B)} = 0, \quad (12)$$

izraz (11) postaje

$$\overline{\nabla_+^2 \psi \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_+^2 \psi)} = 0. \quad (13)$$

Leva strana (13) se može napisati

$$\overline{\nabla_+^2 \psi \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_+^2 \psi)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\nabla_+^2 \psi)^2}. \quad (14)$$

Zamenjujući izraz za srednju enstrofiju

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \overline{(\nabla_+^2 \psi)^2}, \quad (15)$$

u (14) i koristeći (13), sledi

$$\bar{\eta} = const, \quad (16)$$

čime je dokazana očuvanost srednje enstrofije.

NAMERNO PRAZNA STRANA

5.6 ADVEKCIJA

ZADATAK 5.54.

Korišćenjem samo advektivnih članova u dvodimenzionalnim linearizovanim jednačinama kretanja za plitku vodu izvesti:

- a) jednačinu za promenu potencijalne vrtložnosti u kontinualnom slučaju;
- b) jednačinu za promenu potencijalne vrtložnosti na C mreži;
- c) izraz za relativnu frekvenciju u slučaju osnovne struje iz smera jugozapada.

Rešenje (Rančić, 1988):

a) U kontinualnom slučaju dvodimenzionalne jednačine kretanja za plitku vodu samo sa advektivnim članovima mogu se napisati

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2)$$

Dodavanjem i oduzimanjem članova $v \partial v / \partial x$ i $u \partial u / \partial y$ u (1) i (2), redom, dobija se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = qv_h - \frac{\partial K}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -qu_h - \frac{\partial K}{\partial y}. \quad (4)$$

Ovde su potencijalna vrtložnost, kinetička energija i fluksevi mase dati, redom

$$q = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$K = \frac{1}{2} (u^2 + v^2), \quad (6)$$

$$v_h = hv, \quad (7)$$

$$u_h = hu. \quad (8)$$

Diferenciranjem (5) po vremenu i korišćenjem (3) i (4), jednačina za promenu potencijalne vrtložnosti se dobija u obliku

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{h} \left[\frac{\partial (qu_h)}{\partial x} + \frac{\partial (qv_h)}{\partial y} \right]. \quad (9)$$

Linearizacijom (9), korišćenjem metoda poremećenja, dobija se

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = -U \frac{\partial q'}{\partial x} - V \frac{\partial q'}{\partial y}, \quad (10)$$

gde su U i V horizontalne komponente osnovne struje, a q' je poremećenje potencijalne vrtložnosti. Zamenom u (10) rešenja u talasnom obliku

$$q'(x, y, t) = \hat{q} e^{i(kx + ly - vt)}, \quad (11)$$

za frekvenciju u kontinualnom slučaju, dobija se

$$v = Uk + Vl. \quad (12)$$

b) Diskretizacijom od (3) do (8) na C mreži, dobija se

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = q^* \overline{v_h^*}^y - \delta_x K^*, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = -q^* \overline{u_h^*}^x - \delta_y K^*, \quad (14)$$

$$q^* = \frac{\delta_x v^* - \delta_y u^*}{h^{*xy}}, \quad (15)$$

$$K^* = \frac{\overline{u^{*2}}^x + \overline{v^{*2}}^y}{2}, \quad (16)$$

$$v_h^* = \overline{h^*}^y v^*, \quad (17)$$

$$u_h^* = \overline{h^*}^x u^*, \quad (18)$$

gde simbol $*$ označava veličine u diskretnom slučaju. Ponovo, korišćenjem metoda poremećenja, (13)-(18) postaju

$$\frac{\partial u^{*'}}{\partial t} = q^{*'} H V - U \delta_x u^{*'} - V \delta_x v^{*'}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v^{*'}}{\partial t} = -q^{*'} H U - U \delta_y u^{*'} - V \delta_y v^{*'}, \quad (20)$$

$$q^{*'} = \frac{1}{H} (\delta_x v^{*'} - \delta_y u^{*'}), \quad (21)$$

$$k^{*'} = U \overline{u^{*'}}^x + V \overline{v^{*'}}^y, \quad (22)$$

$$v_h^* = HV + Hv^* + Vh^{\overline{*,y}}, \quad (23)$$

$$u_h^* = HU + Hu^* + Uh^{\overline{*,x}}. \quad (24)$$

Primenom operatora $-\delta_y$ na (19) i δ_x na (20), dobija se

$$-\frac{\partial}{\partial t} \delta_y u^* = -HV \delta_y \overline{q^*,y} + U \delta_y \left(\delta_x \overline{u^*,x} \right) + V \delta_y \left(\delta_x \overline{v^*,y} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta_x v^* = -HU \delta_x \overline{q^*,x} - U \delta_x \left(\delta_y \overline{u^*,x} \right) - V \delta_x \left(\delta_y \overline{v^*,y} \right). \quad (26)$$

Analogno kao i u kontinualnom slučaju, diferenciranjem (21) po vremenu i koristeći (25) i (26) dobija se jednačina za promenu potencijalne vrtložnosti u diskretnom obliku

$$\frac{\partial q^*}{\partial t} = -U \delta_x \overline{q^*,x} - V \delta_y \overline{q^*,y}. \quad (27)$$

c) Zamenom u (27) rešenja u talasnom obliku

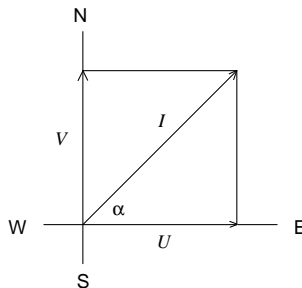
$$q^*(m\Delta x, n\Delta y, t) = \hat{q} e^{i(km\Delta x + nl\Delta y - vt)}, \quad (28)$$

za frekvenciju u diskretnom slučaju, dobija se

$$v^* = U \frac{\sin kd}{d} + V \frac{\sin ld}{d}. \quad (29)$$

U slučaju kada rezultantna struja, I , ima jugozapadni smer, $\alpha = 45^\circ$, ili kao što je prikazano na Slici 42, važi

$$U \equiv V = \frac{I}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$



Slika 42. Šematski prikaz strujanja.

Konačno, zamenom (30) u (12) i (29), izrazi za frekvencije postaju

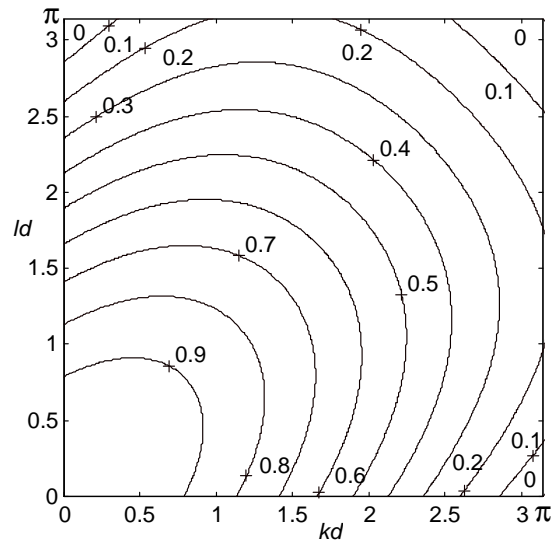
$$v = \frac{I}{\sqrt{2}}(k+l), \quad (31)$$

$$v^* = \frac{I}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sin kd}{d} + \frac{\sin ld}{d} \right). \quad (32)$$

Ako se kao relativna frekvencija definiše odnos (32) i (31), dobija se

$$\frac{v^*}{v} = \frac{\sin kd + \sin ld}{d(k+l)}. \quad (33)$$

Relativne frekvencije (33) su grafički prikazane u jednoj četvrtini oblasti dozvoljenih talasnih brojeva na Slici 43.



Slika 43. Relativne frekvencije u jednoj četvrtini oblasti dozvoljenih talasnih brojeva.

ZADATAK 5.55.

Rotacioni članovi u jednačinama kretanja na E mreži se mogu napisati u obliku dva sistema

sistem I:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = J_1^u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = J_1^v; \quad (2)$$

sistem II:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2J_1^u - J_2^u, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2J_1^v - J_2^v; \quad (4)$$

gde su

$$J_1^u = \frac{2}{3} v \tilde{\zeta}^{xy} + \frac{1}{3} \overline{v^y} \zeta^x, \quad (5)$$

$$J_1^v = -\frac{2}{3} u \tilde{\zeta}^{xy} - \frac{1}{3} \overline{u^x} \zeta^y, \quad (6)$$

$$J_2^u = \frac{2}{3} \overline{v^y} \zeta^{xy} + \frac{1}{3} \overline{v^x} \zeta^y, \quad (7)$$

$$J_2^v = -\frac{2}{3} \overline{u^x} \zeta^{xy} - \frac{1}{3} \overline{u^y} \zeta^x, \quad (8)$$

$$\tilde{\zeta}^{xy} = \frac{1}{2} (\overline{\zeta^x} + \overline{\zeta^y}). \quad (9)$$

Linearizacijom sistema I i II, kada je osnovna struja zonalna i konstantna, a poremećenja nisu funkcija od y :

- formirati jednačine za promenu vrtložnosti na E mreži;
- naći izraze za fazne brzine; i
- uporediti fazne brzine sistema I i II za talasnu dužinu od $L = 4d\sqrt{2}$.

Rešenje (Rančić, 1988):

Kada je osnovna struja zonalna i konstantna, a poremećenja nisu funkcija od y , komponente vetra se mogu napisati

$$u = U + u'(x, t), \quad (10)$$

$$v = v'(x, t). \quad (11)$$

Sistemi I i II se nakon linearizacije i korišćenjem (10) i (11) mogu napisati, redom:

sistem I:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{3}U\bar{\zeta}^x - \frac{2}{3}U\zeta'; \quad (13)$$

sistem II:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{1}{3}U\bar{\zeta}^x - \frac{4}{3}U\zeta'. \quad (15)$$

Na E mreži vrtložnost se u svakoj h tački može napisati

$$\zeta = \delta_x v - \delta_y u. \quad (16)$$

Polazeći od (10) i (11), linearizacijom (16) i (9) se dobija

$$\zeta' = \delta_x v', \quad (17)$$

$$\tilde{\zeta}'^{xy} = \frac{1}{2}(\bar{\zeta}'^{yx} + \zeta'). \quad (18)$$

a) Primenom operatora $-\delta_y$ na (12) i (14), a operatora δ_x na (13) i (15), jednačine za promenu vrtložnosti sistema I i II se dobijaju, redom

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\frac{1}{3}U\delta_x \bar{\zeta}'^x - \frac{2}{3}U\delta_x \zeta', \quad (19)$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = \frac{1}{3}U\delta_x \bar{\zeta}'^x - \frac{4}{3}U\delta_x \zeta'. \quad (20)$$

b) Zamenom rešenja u talasnom obliku

$$\zeta' = \hat{\zeta}' e^{i(ki\sqrt{2}d - vt)} \quad (21)$$

u (19) i (20), za fazne brzine sistema I i II se dobija, redom

$$c_I^* = U \left(\frac{1}{3} \frac{\sin 2X}{2X} + \frac{2}{3} \frac{\sin X}{X} \right), \quad (22)$$

$$c_{II}^* = U \left(-\frac{1}{3} \frac{\sin 2X}{2X} + \frac{4}{3} \frac{\sin X}{X} \right). \quad (23)$$

gde je $X = kd/\sqrt{2}$.

c) Za traženu talasnu dužinu fazne brzine se dobijaju, redom

$$c_I^* = \frac{U}{3\pi} (2 + 4\sqrt{2}), \quad (24)$$

$$c_{II}^* = \frac{U}{3\pi} (-2 + 8\sqrt{2}). \quad (25)$$

Upoređujući

$$\frac{c_I^*}{U} < \frac{c_{II}^*}{U} < 1, \quad (26)$$

uočava se da sistem II daje tačniju faznu brzinu od sistema I.

ZADATAK 5.56.

Barotropna jednačina vrtložnosti na E mreži može se napisati

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{3} \left[\delta_x (u \bar{\zeta}^x) + \delta_y (v \bar{\zeta}^y) \right] + \frac{2}{3} \left\{ \delta_{x'} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\zeta^{x'}}{(u+v)^{y'}} \right] + \delta_{y'} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\zeta^{y'}}{(-u+v)^{x'}} \right] \right\}. \quad (1)$$

a) Linearizovati (1) ako je osnovna struja konstantna, različita od nule i izračunati numeričku faznu brzinu;

b) izvesti izraz za relativnu faznu brzinu kao odnos numeričkih i analitičkih vrednosti, r , u slučaju kada je

$$U = I \cos \alpha, \quad (2)$$

$$V = I \sin \alpha; \quad (3)$$

gde su U i V komponente osnovne struje u x i y pravcu, a I je resultantna struja pod uglom α u odnosu na zonalni pravac; i

c) odrediti u graničnim slučajevima vrednosti

$$\lim_{k \rightarrow 0} r(\alpha = 0), \quad (4)$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} r\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right). \quad (5)$$

Rešenje (Rančić, 1988):

Linearizovana barotropna jednačina vrtložnosti u kontinualnom slučaju može se napisati

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -U \frac{\partial \zeta}{\partial x} - V \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (6)$$

Zamenom u (6) talasnog rešenja oblika

$$\zeta = \hat{\zeta} e^{i(kx+ly-vt)}, \quad (7)$$

za analitičku faznu brzinu se dobija

$$c = \frac{Uk + Vl}{\sqrt{k^2 + l^2}}. \quad (8)$$

a) Nakon linearizacije, jednačina vrtložnosti (1) glasi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{3} (U \delta_x \bar{\zeta}^x + V \delta_y \bar{\zeta}^y) - \frac{2}{3} \left[(U + V) \delta_{x'} \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\zeta}^{x'} + (-U + V) \delta_{y'} \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\zeta}^{y'} \right]. \quad (9)$$

Zamenom talasnog rešenja

$$\zeta = \hat{\zeta} e^{i(kid+ljd-vt)}, \quad (10)$$

za pojedine članove (9) se dobija

$$\delta_x \bar{\zeta}^x = \frac{i\zeta \sin 2X}{2d}, \quad (11)$$

$$\delta_y \bar{\zeta}^y = \frac{i\zeta \sin 2Y}{2d}, \quad (12)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \delta_{x'} \bar{\zeta}^{x'} = \frac{i\zeta \sin(X + Y)}{2d}, \quad (13)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \delta_{y'} \bar{\zeta}^{y'} = \frac{i\zeta \sin(-X + Y)}{2d}, \quad (14)$$

gde je $X = kd$, $Y = ld$, a d najkraće rastojanje između susednih tačaka E mreže. Zamenom (10)-(14) u (9) i nakon sređivanja, numerička fazna brzina ima oblik

$$c^* = \frac{\left[\frac{U}{3} \left(\frac{\sin 2X}{2d} + 2 \frac{\sin X \cos Y}{d} \right) + \frac{V}{3} \left(\frac{\sin 2Y}{2d} + 2 \frac{\sin Y \cos X}{d} \right) \right]}{\sqrt{k^2 + l^2}}. \quad (15)$$

b) Delenjem (15) i (8) za relativnu faznu brzinu, $r = c^*/c$, može se napisati

$$r = \frac{1}{3} \left(\frac{\cos \alpha \sin 2X}{2X \cos \alpha + 2Y \sin \alpha} + \frac{2 \sin X \cos Y \cos \alpha}{X \cos \alpha + Y \sin \alpha} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\sin \alpha \sin 2Y}{2X \cos \alpha + 2Y \sin \alpha} + \frac{2 \sin Y \cos X \sin \alpha}{X \cos \alpha + Y \sin \alpha} \right). \quad (16)$$

c) Posmatranjem dva granična slučaja za relativne fazne brzine se dobija

$$\lim_{X \rightarrow 0} r(\alpha = 0) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos Y), \quad (17)$$

$$\lim_{Y \rightarrow 0} r\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos X). \quad (18)$$

ZADATAK 5.57.

Šema drugog reda tačnosti za advekciju pasivne supstance, T , i jednačina kontinuiteta date su redom

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{h} \left(\overline{U \delta_x T^x} + \overline{V \delta_y T^y} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -(\delta_x U + \delta_y V), \quad (2)$$

gde su

$$U = \bar{h}^x u, \quad (3)$$

$$V = \bar{h}^y v. \quad (4)$$

Pokazati da važi

$$\sum_{ij} (hT) = const. \quad (5)$$

Rešenje (Rančić, 1988):

Množenjem (1) sa h , (2) sa T i sabiranjem tako dobijenih izraza, dobija se

$$\frac{\partial(hT)}{\partial t} = -\left(\overline{U \delta_x T^x} + \overline{V \delta_y T^y} \right) - T(\delta_x U + \delta_y V). \quad (6)$$

Koristeći identitet (videti zadatak 7.2)

$$a \delta_s b + \overline{b \delta_s a^s} = \delta_s (b \bar{a}^s), \quad (7)$$

izraz (6) se može napisati

$$\frac{\partial}{\partial t}(hT) = -\left[\delta_x(U\bar{T}^x) + \delta_y(V\bar{T}^y)\right]. \quad (8)$$

Sumiranjem (8) preko svih tačaka zatvorene oblasti integracije ili oblasti sa cikličnim graničnim uslovima, sledi

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{ij} (hT) = 0, \quad (9)$$

tj.

$$\sum_{ij} (hT) = const. \quad (10)$$

ZADATAK 5.58.

Šema četvrtog reda tačnosti za advekciju pasivne supstance, T , i jednačina kontinuiteta date su redom

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{(hx)} \left[\frac{4}{3} \left(\overline{U\delta_x T^y} + \overline{V\delta_y T^x} \right) - \frac{1}{3} \left(\overline{(Ux)\delta_x T^{2y}} + \overline{(Vy)\delta_y T^{2x}} \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial(hx)}{\partial t} = -(\delta_x U + \delta_y V), \quad (2)$$

gde su

$$U = \bar{h}^x u, \quad (3)$$

$$V = \bar{h}^y v, \quad (4)$$

Odrediti veličine (hx) i (Ux) , (Vy) iz uslova da je ispunjeno

$$\sum_h [(hx)T] = const. \quad (5)$$

Rešenje (Rančić, 1988):

Množenjem (1) i (2) sa (hx) i T , redom, primenom operatora $(\bar{\quad})^T$ na tako dobijenu jednačinu kontinuiteta i sabiranjem ovako transformisanih jednačina, dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t} [(hx)T] = -\left\{ \frac{4}{3} \left(\overline{U\delta_x T^y} + \overline{V\delta_y T^x} \right) - \frac{1}{3} \left[\overline{(Ux)\delta_{2x} T^{2y}} + \overline{(Vy)\delta_{2y} T^{2x}} \right] \right\} - T(\delta_x U + \delta_y V)^T. \quad (6)$$

Koristeći identitet (videti zadatak 7.9)

$$\delta_s \bar{a}^s = \delta_{2s} a, \quad (7)$$

i pretpostavljajući da se poslednji član u (6) može napisati

$$T(\delta_x U + \delta_y V)^T = \frac{4}{3} \overline{T(\delta_x U + \delta_y V)^{xy}} - \frac{1}{3} \overline{T[\delta_{2x}(Ux) + \delta_{2y}(Vy)]^{2x2y}}, \quad (8)$$

izraz (6) dobija oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(hx)T] = & - \left\{ \frac{4}{3} \left(\overline{U\delta_x T + T\delta_x U^{xy}} + \overline{V\delta_y T + T\delta_y V^{yx}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \left[\overline{(Ux)\delta_{2x} T + T\delta_{2x}(Ux)^{2x2y}} + \overline{(Vy)\delta_{2y} T + T\delta_{2y}(Vy)^{2y2x}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Koristeći identitete

$$a\delta_s b + b\delta_s a^s = \delta_s (ab^s), \quad (10)$$

$$a\delta_{2s} b + b\delta_{2s} a^{2s} = \delta_{2s} (ab^{2s}), \quad (11)$$

izraz (9) postaje

$$\frac{\partial}{\partial t} [(hx)T] = - \left\langle \frac{4}{3} \left[\delta_x (\overline{UT^x})^y + \delta_y (\overline{VT^y})^x \right] - \frac{1}{3} \left\{ \delta_{2x} [\overline{(Ux)T^{2x}}]^{2y} + \delta_{2y} [\overline{(Vy)T^{2y}}]^{2x} \right\} \right\rangle. \quad (12)$$

Izraz (12) obezbeđuje da veličina $\overline{(hx)T}$ bude očuvana. Istovremeno, da bi jednačina kontinuiteta (2) mogla da važi, potrebno je da nepoznati fluksevi mase budu definisani u obliku

$$(Ux) = \bar{U}^y, \quad (13)$$

$$(Vy) = \bar{V}^x. \quad (14)$$

Zamenom (13) i (14) u (8), dobija se

$$T(\delta_x U + \delta_y V)^T = \frac{4}{3} \overline{T(\delta_x U + \delta_y V)^{xy}} - \frac{1}{3} \overline{T(\delta_x U + \delta_y V)^{xy2x2y}}, \quad (15)$$

i veličina (hx) se definiše

$$(hx) = \left(\frac{4}{3} \overline{Th^{xy}} - \frac{1}{3} \overline{Th^{xy2x2y}} \right) \frac{1}{T}. \quad (16)$$

ZADATAK 5.59.

Dvodimenzionalna advektivna šema koja vrši ispravnu nelinearnu kaskadu energije na E mreži ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{h}^x} \left[\frac{1}{3} \left(\overline{\bar{U}^x \delta_x u^x} + \overline{\bar{V}^x \delta_y u^y} \right) + \frac{2}{3} \left(\overline{\bar{U}^x \delta_x u^{x'}} + \overline{\bar{V}^x \delta_y u^{y'}} \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{h}^y} \left[\frac{1}{3} \left(\overline{\bar{U}^y \delta_x v^x} + \overline{\bar{V}^y \delta_y v^y} \right) + \frac{2}{3} \left(\overline{\bar{U}^y \delta_x v^{x'}} + \overline{\bar{V}^y \delta_y v^{y'}} \right) \right], \quad (2)$$

gde su fluksevi mase u pravcima koordinatnih osa x , y , x' i y' dati, redom

$$U = \bar{h}^x u, \quad (3)$$

$$V = \bar{h}^y v, \quad (4)$$

$$U' = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{h}^{x'} (u+v)^{y'}, \quad (5)$$

$$V' = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{h}^{y'} (-u+v)^{x'}. \quad (6)$$

a) Linearizovati šemu (1)-(6) oko stanja definisanog uslovima

$$u = \bar{U} + u'(x, t), \quad (7)$$

$$v = \bar{V} + v'(x, t), \quad (8)$$

$$\bar{U} = \text{const}, \quad (9)$$

$$\bar{V} = 0, \quad (10)$$

$$h = \text{const}, \quad (11)$$

gde su \bar{U} i \bar{V} veličine osnovnog stanja, a $u'(x, t)$ i $v'(x, t)$ su veličine poremećenja.

b) Izračunati faznu brzinu linearizovane šeme u jednodimenzionalnom slučaju duž x , odnosno x' osa.

c) Izračunati faznu brzinu za linearizovanu advektivnu jednačinu u jednodimenzionalnom slučaju duž x ose koristeći centralni količnik konačnih razlika i uporediti tako dobijeni rezultat sa rezultatom u slučaju b).

Rešenje (Balandžić, 1981):

a) Linearizacijom (1) i (2) pod uslovima (7)-(11), dobija se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -U \left(\frac{1}{3} \overline{\delta_x u}^x + \frac{\sqrt{2}}{3} \overline{\delta_x u}^{x'} - \frac{\sqrt{2}}{3} \overline{\delta_y u}^{y'} \right). \quad (12)$$

b) U jednodimenzionalnom slučaju, zamenom u (12) talasnog rešenja

$$u = \hat{u} e^{i(ki\sqrt{2}d - vt)}, \quad (13)$$

za frekvenciju se dobija

$$v = U \left(\frac{1}{3} \frac{\sin \sqrt{2}kd}{\sqrt{2}d} + \frac{2}{3} \frac{\sin kd/\sqrt{2}}{d/\sqrt{2}} \right). \quad (14)$$

Deljenjem (14) sa talasnim brojem, k , za faznu brzinu se dobija

$$c^* = U \left(\frac{1}{3} \frac{\sin \sqrt{2}kd}{\sqrt{2}kd} + \frac{2}{3} \frac{\sin kd/\sqrt{2}}{kd/\sqrt{2}} \right). \quad (15)$$

c) Korišćenjem centralnih količnika na E mreži i koristeći (13), za faznu brzinu se dobija

$$c_E^* = U \frac{\sin kd/\sqrt{2}}{kd/\sqrt{2}}. \quad (16)$$

Razvojem u Tejlorov red, izrazi (15) i (16) mogu se napisati

$$c^* = U \left[1 - \frac{(kd)^2}{6} + \dots \right], \quad (17)$$

$$c_E^* = U \left[1 - \frac{(kd)^2}{12} + \dots \right]. \quad (18)$$

NAMERNO PRAZNA STRANA

GLAVA 6

EKONOMIČNE EKSPPLICITNE I OSTALE ŠEME

ZADATAK 6.1.

Diskretizacijom linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu koji opisuje jednodimenzionalne gravitacione talase, upotrebom preskočne šeme i centralnih količnika konačnih razlika u prostoru, odrediti kriterijum stabilnosti.

Rešenje (Rančić, 1988):

Diskretizacijom linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu koji opisuje jednodimenzionalne gravitacione talase, upotrebom preskočne šeme i centralnih količnika konačnih razlika u prostoru, dobija se

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -g \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x}, \quad (1)$$

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^{n-1}}{2\Delta t} = -H \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}. \quad (2)$$

Zamenom u (1) i (2) talasnih rešenja u obliku

$$u_i^n = \lambda^n \hat{u} e^{iki\Delta x}, \quad (3)$$

$$h_i^n = \lambda^n \hat{h} e^{iki\Delta x}, \quad (4)$$

dobija se

$$(\lambda^2 - 1)\hat{u} + i2g\mu \sin(k\Delta x)\lambda\hat{h} = 0, \quad (5)$$

$$(\lambda^2 - 1)\hat{h} + i2H\mu \sin(k\Delta x)\lambda\hat{u} = 0. \quad (6)$$

Stavljajući da je

$$A = gH\mu^2 \sin^2 X, \quad (7)$$

gde je $X = k\Delta x$, a $\mu = \Delta t/\Delta x$ i rešavanjem algebarskih jednačina (5) i (6) za faktor povećanja se dobija

$$\lambda^4 + 2(2A - 1)\lambda^2 + 1 = 0. \quad (8)$$

Rešavanjem (8) dobijaju se četiri rešenja

$$\lambda_1 = \sqrt{1-2A+2\sqrt{A(A-1)}}, \quad (9)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{1-2A+2\sqrt{A(A-1)}}, \quad (10)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{1-2A-2\sqrt{A(A-1)}}, \quad (11)$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{1-2A-2\sqrt{A(A-1)}}. \quad (12)$$

Kada je $A \leq 1$, desna strana (9) se može u kompleksnom obliku napisati

$$\sqrt{1-2A+2i\sqrt{A(1-A)}} = \lambda_{RE} + i\lambda_{IM}. \quad (13)$$

Kvadriranjem (13) i razdvajanjem realnog i imaginarnog dela dobija se, redom

$$1-2A = \lambda_{RE}^2 - \lambda_{IM}^2, \quad (14)$$

$$\sqrt{A(1-A)} = \lambda_{RE}\lambda_{IM}. \quad (15)$$

Kvadriranjem (14) i (15) i njihovim sabiranjem proizilazi

$$\lambda_{RE}^2 + \lambda_{IM}^2 = 1, \quad (16)$$

$$\lambda_{RE}^2 - \lambda_{IM}^2 = 1-2A. \quad (17)$$

Sada, rešavanjem (16) i (17) konačno se dobija

$$\lambda_{RE} = \pm\sqrt{1-A}, \quad (18)$$

$$\lambda_{IM} = \pm\sqrt{A}. \quad (19)$$

Zamenom (18) i (19) u (13) i na osnovu (9), faktor povećanja ima oblik

$$\lambda_1 = \sqrt{1-A} + i\sqrt{A}. \quad (20)$$

Kada je $A \leq 1$, na osnovu (20) sledi

$$|\lambda| = 1, \quad (21)$$

tj. šema je neutralna. Analizom (10)-(12) može se ustanoviti da su i ostala rešenja neutralna. Za stabilnost svih talasnih komponenti potreban uslov je

$$\sqrt{gH} \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (22)$$

ZADATAK 6.2.

Diskretizacijom linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu koji opisuje jednodimenzionalne gravitacione talase, upotrebom šeme unapred-unatrag i centralnih količnika konačnih razlika u prostoru, odrediti kriterijum stabilnosti.

Rešenje (Rančić, 1988):

Diskretizacijom linearizovanog sistema jednačina za plitku vodu koji opisuje jednodimenzionalne gravitacione talase, upotrebom šeme unapred-unatrag i centralnih količnika konačnih razlika u prostoru, dobija se

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + g \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + H \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0. \quad (2)$$

Zamenom u (1) i (2) talasnih rešenja (3) i (4) iz zadatka 6.1, dobija se

$$(\lambda - 1)\hat{u} + i\mu g(\sin X)\hat{h} = 0, \quad (3)$$

$$(\lambda - 1)\hat{h} + i\lambda H\mu(\sin X)\hat{u} = 0. \quad (4)$$

Stavljajući da je

$$2A = gH\mu^2 \sin^2 X, \quad (5)$$

i rešavanjem algebarskih jednačina (3) i (4) za faktor povećanja se dobija

$$\lambda^2 - 2\lambda(1 - A) + 1 = 0. \quad (6)$$

Kvadratni oblik (6) obezbeđuje dva rešenja

$$\lambda_1 = 1 - A + \sqrt{A(A - 2)}, \quad (7)$$

$$\lambda_2 = 1 - A - \sqrt{A(A - 2)}. \quad (8)$$

Može se pokazati da su (7) i (8) neutralni kada je

$$A \leq 2, \quad (9)$$

odnosno,

$$|\lambda| = 1. \quad (10)$$

Na osnovu (5) i (9), uslov za stabilnost ima oblik

$$\sqrt{gH} \leq \frac{2\Delta x}{\Delta t}. \quad (11)$$

Uočava se da šema (1)-(2) dopušta dva puta duže korake u vremenu nego šema (1)-(2) iz zadatka 6.1.

ZADATAK 6.3.

Diskretizovani sistem jednačina za plitku vodu koji opisuje prostiranje gravitaciono-inercijalnih talasa ima oblik

$$u^{n+1} = u^{n-1} - 2g\Delta t\delta_x h^{n+1} + fv^n 2\Delta t, \quad (1)$$

$$v^{n+1} = v^{n-1} - 2g\Delta t\delta_y h^{n+1} - fu^n 2\Delta t, \quad (2)$$

$$h^{n+1} = h^{n-1} - 2H\Delta t(\delta_x u + \delta_y v)^{n+1}. \quad (3)$$

Odrediti kriterijum stabilnosti sistema (1)-(3) koristeći metod rascepljivanja.

Rešenje (Rančić, 1988):

Koristeći metod rascepljivanja (Marčuk), sistem (1)-(3) se može napisati u obliku dva podsistema. Izostavljanjem iz (1) i (2) članova sile gradijenta pritiska i člana divergencije iz (3), prvi podsistem glasi

$$u^+ = u^{n-1} + fv^n 2\Delta t, \quad (4)$$

$$v^+ = v^{n-1} - fu^n 2\Delta t, \quad (5)$$

$$h^+ = h^{n-1}, \quad (6)$$

gde su u^+ , v^+ i h^+ vrednosti promenljivih na nekom prognostičkom nivou. Drugi podsistem se tada može napisati korišćenjem tako dobijenih vrednosti promenljivih na prognostičkom nivou $n+1$ i dodavanjem izostavljenih članova sile gradijenta pritiska i člana divergencije, ili

$$u^{n+1} = u^+ - 2g\Delta t\delta_x h^{n+1}, \quad (7)$$

$$v^{n+1} = v^+ - 2g\Delta t\delta_y h^{n+1}, \quad (8)$$

$$h^{n+1} = h^+ - 2H\Delta t(\delta_x u + \delta_y v)^{n+1}. \quad (9)$$

Zamenom u (4) i (5) talasnih rešenja

$$\left(u^+, v^+\right)_{i,j} = (\hat{u}, \hat{v}) \lambda_c^2 \lambda^{n-1} e^{i(ki\Delta x + lj\Delta y)}, \quad (10)$$

algebarski sistem postaje

$$\lambda_c^2 \hat{u} = \hat{u} + 2\lambda_c f \Delta t \hat{v}, \quad (11)$$

$$\lambda_c^2 \hat{v} = \hat{v} - 2\lambda_c f \Delta t \hat{u}. \quad (12)$$

Rešavanjem (11) i (12), dve vrednosti za faktor povećanja se dobijaju

$$\lambda_{c_1} = -if\Delta t + \sqrt{1 - f^2(\Delta t)^2}, \quad (13)$$

$$\lambda_{c_2} = -if\Delta t - \sqrt{1 - f^2(\Delta t)^2}. \quad (14)$$

Kada je $1 - f^2(\Delta t)^2 \geq 0$, iz (13) i (14) sledi da je šema je neutralna, ili

$$|\lambda_c| = 1. \quad (15)$$

Takođe, uočava se da je korak u vremenu ograničen uslovom

$$\Delta t \leq \frac{1}{f}, \quad (16)$$

ili

$$\Delta t \approx 3h. \quad (17)$$

Suprotno, kada je $1 - f^2(\Delta t)^2 < 0$, a na osnovu (13) i (14) sledi

$$|\lambda_c| = \left| -f\Delta t \pm \sqrt{(f\Delta t)^2 - 1} \right|, \quad (18)$$

tj. šema je nestabilna.

Zamenom talasnog rešenja

$$u_{i,j}^{n+1} = \hat{u} \lambda_c^2 \lambda_p^2 \lambda^{n-1} e^{i(ki\Delta x + lj\Delta y)}, \quad (19)$$

sistem (7)-(9) u algebarskom obliku postaje

$$(\lambda_p^2 - 1)\hat{u} + i2\sqrt{2}g\mu\lambda_p^2(\sin X)\hat{h} = 0, \quad (20)$$

$$(\lambda_p^2 - 1)\hat{v} + i2\sqrt{2}g\mu\lambda_p^2(\sin Y)\hat{h} = 0, \quad (21)$$

$$(\lambda_p^2 - 1)\hat{h} + i2\sqrt{2}H\mu\lambda_p^2(\sin X\hat{u} + \sin Y\hat{v}) = 0. \quad (22)$$

Stavljajući da je

$$A = \mu^2 gH(\sin^2 X + \sin^2 Y), \quad (23)$$

gde je $X = kd/\sqrt{2}$, $Y = ld/\sqrt{2}$ i rešavanjem algebarskog sistema (20)-(22), dobija se

$$(\lambda_p^2 - 1) \left[(\lambda_p^2 - 1)^2 + 8\lambda_p^4 A \right] = 0. \quad (24)$$

Jedno rešenje za (24) je

$$\lambda_p^2 = 1, \quad (25)$$

odnosno, šema je neutralna. Ostala rešenja se dobijaju iz

$$(\lambda_p^2 - 1)^2 + 8\lambda_p^4 A = 0. \quad (26)$$

Za faktore povećanja iz (26) proizilazi

$$|\lambda_{p_{1,2}}^2|^2 = \left| \frac{1}{1 + 8A} \right|, \quad (27)$$

odnosno, šema je stabilna.

ZADATAK 6.4.

Linearizovani dvodimenzionalni sistem jednačina za prostiranje gravitacionih talasa primenom preskočne šeme i tehnike za sprečavanje stacionarnog talasa od dva intervala mreže u polju visine na E mreži, ima oblik

$$u^{n+1} = u^{n-1} - 2\Delta t g \delta_x h^n, \quad (1)$$

$$v^{n+1} = v^{n-1} - 2\Delta t g \delta_y h^n, \quad (2)$$

$$h^{n+1} = h^{n-1} - 2\Delta t H (\delta_x u + \delta_y v)^n + (2\Delta t)^2 w g H [\nabla_x^2 - \nabla_y^2] h^{n-1}. \quad (3)$$

Odrediti najveću vrednost težinskog faktora, w , tako da se ne naruši kriterijum stabilnosti.

Rešenje (Janjić, 1979):

Zamenom u sistem (1)-(3) talasnih rešenja

$$(u, v, h)^n = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h}) \lambda^n e^{i(ki\sqrt{2}d + lj\sqrt{2}d)}, \quad (4)$$

gde su $X = kd/\sqrt{2}$, $Y = ld/\sqrt{2}$ i $\mu \equiv \Delta t/d$, dobija se

$$(\lambda^2 - 1)\hat{u} + i\lambda 2\sqrt{2}\mu g(\sin X)\hat{h} = 0, \quad (5)$$

$$(\lambda^2 - 1)\hat{v} + i\lambda 2\sqrt{2}\mu g(\sin Y)\hat{h} = 0, \quad (6)$$

$$\left[(\lambda^2 - 1) + 8wgH\mu^2(\cos X - \cos Y)^2 \right] \hat{h} + i\lambda 2\sqrt{2}\mu H[(\sin X)\hat{u} + (\sin Y)\hat{v}] = 0. \quad (7)$$

Rešavanjem algebarskog sistema (5)-(7), za faktor povećanja se dobija

$$(\lambda^2 - 1)^2(\lambda^2 - 1 + 2wB') + (\lambda^2 - 1)\lambda^2 2A' = 0, \quad (8)$$

gde su

$$A' = 4gH\mu^2(\sin^2 X + \sin^2 Y), \quad (9)$$

$$B' = 4gH\mu^2(\cos X - \cos Y)^2. \quad (10)$$

Jednačina (8) ima rešenja

$$\lambda_1 = 1, \quad (11)$$

$$\lambda_2 = -1, \quad (12)$$

$$\lambda_{3,4}^2 = 1 - (A' + wB') + \sqrt{(A' + wB')^2 - 2A'}, \quad (13)$$

$$\lambda_{5,6}^2 = 1 - (A' + wB') - \sqrt{(A' + wB')^2 - 2A'}. \quad (14)$$

Očigledno je da u slučaju (11) i (12) postoje samo neutralna rešenja. U preostalim slučajevima, ukoliko je

$$(A' + wB')^2 - 2A' \leq 0, \quad (15)$$

šema (1)-(3) je uvek stabilna. Međutim, ako je,

$$(A' + wB')^2 - 2A' > 0, \quad (16)$$

za stabilnost (14) se zahteva

$$(A' + wB') + \sqrt{(A' + wB')^2 - 2A'} \leq 2. \quad (17)$$

Nakon sređivanja, konačno se dobija

$$\sqrt{\frac{1}{2}A' + wB'} \leq 1. \quad (18)$$

Izraz (18) dostiže maksimum kada su

$$X = \pi, \quad (19)$$

$$Y = 0. \quad (20)$$

Zamenom (19) i (20) u (18), dobija se

$$\sqrt{4wgH\mu} \leq \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Kada je

$$w \leq 0.25, \quad (22)$$

izraz (21) postaje

$$\sqrt{gH\mu} \leq \frac{1}{2}, \quad (23)$$

što je identično kriterijumu stabilnosti preskočne šeme.

ZADATAK 6.5.

Za simulaciju gravitacionih talasa predlaže se Linderts-Bejtsova (Leendertse-Bates) šema u dve iteracije:

I iteracija

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t/2} = -\delta_{2x}\phi^{n+1/2}, \quad (1)$$

$$\frac{\phi^{n+1/2} - \phi^n}{\Delta t/2} = -c^2\delta_{2x}u^{n+1/2}, \quad (2)$$

II iteracija

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t/2} = -\delta_{2x}\phi^{n+1/2}, \quad (3)$$

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^{n+1/2}}{\Delta t/2} = -c^2\delta_{2x}u^{n+1/2}, \quad (4)$$

gde je geopotencijal $\phi = gh$. Na osnovu zadatog:

- a) ispitati stabilnost šeme (1)-(4); i
- b) napisati aproksimaciju za talasnu jednačinu.

Rešenje (Rančić, 1988):

- a) Zamenom talasnih rešenja

$$(u, \phi)_i^n = (\hat{u}, \hat{\phi})^n e^{iki\Delta x}, \quad (5)$$

u sistem (1)-(4) se dobija, redom

I iteracija

$$\hat{u}^{n+1/2} = \hat{u}^n - (i\mu \sin X) \hat{\phi}^{n+1/2}, \quad (6)$$

$$\hat{\phi}^{n+1/2} = \hat{\phi}^n - c^2 (i\mu \sin X) \hat{u}^{n+1/2}, \quad (7)$$

II iteracija

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^{n+1/2} - (i\mu \sin X) \hat{\phi}^{n+1/2}, \quad (8)$$

$$\hat{\phi}^{n+1} = \hat{\phi}^{n+1/2} - c^2 (i\mu \sin X) \hat{u}^{n+1/2}, \quad (9)$$

gde su

$$X = k\Delta x, \quad (10)$$

$$\mu = \frac{\Delta t}{2\Delta x}. \quad (11)$$

Uvođenjem oznaka

$$A = i\mu \sin X, \quad (12)$$

$$B = c^2 A, \quad (13)$$

iz (6)-(9) se dobija

I iteracija

$$\hat{u}^{n+1/2} + A\hat{\phi}^{n+1/2} = \hat{u}^n, \quad (14)$$

$$B\hat{u}^{n+1/2} + \hat{\phi}^{n+1/2} = \hat{\phi}^n, \quad (15)$$

II iteracija

$$\hat{u}^{n+1/2} - A\hat{\phi}^{n+1/2} = \hat{u}^{n+1}, \quad (16)$$

$$B\hat{u}^{n+1/2} - \hat{\phi}^{n+1/2} = -\hat{\phi}^{n+1}. \quad (17)$$

U slučaju I iteracije iz (14) i (15) može se izračunati

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{\hat{u}^n - A\hat{\phi}^n}{1 - AB}, \quad (18)$$

$$\hat{\phi}^{n+1/2} = \frac{\hat{\phi}^n - B\hat{u}^n}{1 - AB}, \quad (19)$$

a u slučaju II iteracije iz (16) i (17) nastaje

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{\hat{u}^{n+1} + A\hat{\phi}^{n+1}}{1 - AB}, \quad (20)$$

$$\hat{\phi}^{n+1/2} = \frac{\hat{\phi}^{n+1} + B\hat{u}^{n+1}}{1 - AB}. \quad (21)$$

Smatrajući da je

$$\hat{u}^{n+1} = \lambda^{n+1}\hat{u}, \quad (22)$$

$$\hat{\phi}^{n+1} = \lambda^{n+1}\hat{\phi}, \quad (23)$$

i nakon zamene (22) i (23) u (18) i (20), odnosno, u (19) i (21) se dobija

$$(1 - \lambda)\hat{u} - A(1 + \lambda)\hat{\phi} = 0, \quad (24)$$

$$B(1 + \lambda)\hat{u} + (\lambda - 1)\hat{\phi} = 0. \quad (25)$$

Rešavanjem algebarskog sistema (24)-(25), za faktor povećanja se dobija kvadratna jednačina

$$(AB - 1)\lambda^2 + 2(AB + 1)\lambda + (AB - 1) = 0, \quad (26)$$

čija su rešenja

$$\lambda_1 = \frac{-2(AB + 1) + 4\sqrt{AB}}{2(AB - 1)}, \quad (27)$$

$$\lambda_2 = \frac{-2(AB + 1) - 4\sqrt{AB}}{2(AB - 1)}. \quad (28)$$

Ako se u (27) i (28) označi

$$AB = -\xi^2, \quad (29)$$

$$\xi = c\mu \sin X, \quad (30)$$

konačno se dobija

$$\lambda_1 = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} + 2i \frac{\xi}{1+\xi^2}, \quad (31)$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} - 2i \frac{\xi}{1+\xi^2}, \quad (32)$$

odnosno,

$$|\lambda_1| \equiv |\lambda_2| = 1. \quad (33)$$

Na osnovu (33), Linderts-Bejtsova šema je neutralna.

b) Jednodimenzionalni linearizovani sistem jednačina za gravitacione talase može se napisati

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (35)$$

gde je $c^2 = gH$. Diferenciranjem (34) i (35) po x i t , redom, talasna jednačina ima oblik

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (36)$$

Da bi se ponovio postupak za dobijanje talasne jednačine (36) u konačnim razlikama, primeniće se Linderts-Bejtsova šema na (34) i (35), čime nastaje

I iteracija

$$u_i^{n+1/2} - u_i^n = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} (\phi_{i+1}^{n+1/2} - \phi_{i-1}^{n+1/2}), \quad (37)$$

$$\phi_i^{n+1/2} - \phi_i^n = -c^2 \frac{\Delta t}{4\Delta x} (u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i-1}^{n+1/2}), \quad (38)$$

II iteracija

$$u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2} = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} (\phi_{i+1}^{n+1/2} - \phi_{i-1}^{n+1/2}), \quad (39)$$

$$\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n+1/2} = -c^2 \frac{\Delta t}{4\Delta x} (u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i-1}^{n+1/2}). \quad (40)$$

Sabiranjem (37) i (39), odnosno, (38) i (40) se dobija

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^{n+1/2} - \phi_{i-1}^{n+1/2}), \quad (41)$$

$$\phi_i^{n+1} - \phi_i^n = -c^2 \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i-1}^{n+1/2}). \quad (42)$$

Oduzimanjem od (42) iste jednačine, ali na vremenskom nivou n , nastaje

$$\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1} = -c^2 \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i+1}^{n-1/2}) - (u_{i-1}^{n+1/2} - u_{i-1}^{n-1/2})]. \quad (43)$$

Sabiranjem u tački $i+1$ (37) i (39) ali na vremenskom nivou $n-1$, dobija se

$$u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i+1}^{n-1/2} = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} [(\phi_{i+2}^{n+1/2} - \phi_i^{n+1/2}) + (\phi_{i+2}^{n-1/2} - \phi_i^{n-1/2})]. \quad (44)$$

Sabiranjem u tački $i-1$ (37) i (39) ali na vremenskom nivou $n-1$, dobija se

$$u_{i-1}^{n+1/2} - u_{i-1}^{n-1/2} = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} [(\phi_i^{n+1/2} - \phi_{i-2}^{n+1/2}) + (\phi_i^{n-1/2} - \phi_{i-2}^{n-1/2})]. \quad (45)$$

Zamenom (44) i (45) u (43), sledi

$$\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1} = c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2(2\Delta x)^2} [(\phi_{i+2}^{n+1/2} - 2\phi_i^{n+1/2} + \phi_{i-2}^{n+1/2}) + (\phi_{i+2}^{n-1/2} - 2\phi_i^{n-1/2} + \phi_{i-2}^{n-1/2})]. \quad (46)$$

Oduzimanje (40) od (38) daje

$$\phi_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\phi_i^n + \phi_i^{n+1}). \quad (47)$$

Oduzimanjem od (47) iste jednačine ali na vremenskom nivou $n-1$, dobija se

$$\phi_i^{n-1/2} = \frac{1}{2} (\phi_i^{n-1} + \phi_i^n). \quad (48)$$

Konačno, zamenom (47) i (48) u (46), dobija se

$$\frac{\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{c^2}{(2\Delta x)^2} \frac{1}{4} (\nabla^2 \phi^{n-1} + 2\nabla^2 \phi^n + \nabla^2 \phi^{n+1}), \quad (49)$$

što predstavlja traženu aproksimaciju u konačnim razlikama za talasnu jednačinu.

GLAVA 7

OPERATORI

ZADATAK 7.1.

Dokazati identitet

$$\overline{ab\delta_s a}^s = -\frac{1}{2}a^2\delta_s b + \delta_s \left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2} \right), \quad (1)$$

gde su a i b neke zavisno promenljive razmaknuto raspoređene duž proizvoljne koordinatne ose s , δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka, $\overline{\quad}^s$ je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke, a $\tilde{a}\tilde{a}^s$ označava proizvod vrednosti promenljive a u dve susedne tačke postavljene na koordinatnoj liniji čija je orijentacija u pravcu koordinatne ose s .

Rešenje:

Operatori za:

- centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka d ,
- osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke, i
- proizvod vrednosti promenljive u dve susedne tačke postavljene na koordinatnoj liniji čija je orijentacija u pravcu koordinatne ose s ,

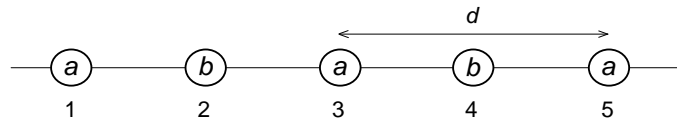
moгу se napisati, redom

$$(\delta_x a)_{i,j} = \frac{1}{d}(a_{i+1,j} - a_{i-1,j}), \quad (2)$$

$$\overline{(a)}_{i,j}^x = \frac{1}{2}(a_{i+1,j} + a_{i-1,j}), \quad (3)$$

$$(\tilde{a}\tilde{a}^s)_i = a_{i-1}a_{i+1}. \quad (4)$$

Posmatranjem rasporeda tačkaka na Slici 44



Slika 44. Raspored promenljivih.

i korišćenjem (3), leva strana (1) za tačku 3 se može napisati

$$\left(\overline{ab\delta_s a^s}\right)_3 = a_3 \frac{1}{2} \left[(b\delta_s a)_4 + (b\delta_s a)_2 \right]. \quad (5)$$

Primenom (2) u tačkama 2 i 4 iz (5), dobija se

$$\left(\overline{ab\delta_s a^s}\right)_3 = a_3 \frac{1}{2} \frac{1}{d} \left[b_4 a_5 - b_4 a_3 + b_2 a_3 - b_2 a_1 \right]. \quad (6)$$

Sređivanjem, (6) postaje

$$\left(\overline{ab\delta_s a^s}\right)_3 = \frac{1}{d} \left[\frac{a_3^2}{2} (b_2 - b_4) + b_4 \frac{a_3 a_5}{2} - b_2 \frac{a_1 a_3}{2} \right]. \quad (7)$$

Članovi sa desne strane (7) mogu se napisati

$$-\frac{a_3^2}{2} (b_4 - b_2) = -\left(\frac{a^2}{2} d\delta_s b\right)_3, \quad (8)$$

$$b_4 \frac{a_3 a_5}{2} = \left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2}\right)_4, \quad (9)$$

$$-b_2 \frac{a_1 a_3}{2} = -\left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2}\right)_2. \quad (10)$$

Sabiranje (9) i (10) daje

$$d\delta_s \left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2}\right)_3 = \left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2}\right)_4 - \left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2}\right)_2. \quad (11)$$

Zamenom (8), (9) i (10) u (7) i korišćenjem (11), dobija se

$$\left(\overline{ab\delta_s a^s}\right)_3 = -\frac{1}{2} \left(a^2 \delta_s b\right)_3 + \delta_s \left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2}\right)_3. \quad (12)$$

Na kraju, generalizacijom (12) za bilo koju tačku, važi

$$\overline{ab\delta_s a^s} = -\frac{1}{2} a^2 \delta_s b + \delta_s \left(b \frac{\tilde{a}\tilde{a}^s}{2}\right). \quad (13)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.2.

Dokazati identitet

$$\delta_s(b\bar{a}^s) = a\delta_s b + b\overline{\delta_s a}^s, \quad (1)$$

gde su a i b neke zavisno promenljive razmaknuto raspoređene duž proizvoljne koordinatne ose s , δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka, a $\bar{}^s$ je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke.

Rešenje:

Posmatranjem rasporeda tačaka na Slici 44 i korišćenjem (2) iz zadatka 7.1, leva strana (1) za tačku 3 se može napisati

$$\delta_s(b\bar{a}^s)_3 = \frac{1}{d}(b_4\bar{a}_4^s - b_2\bar{a}_2^s). \quad (2)$$

Korišćenjem (3) iz zadatka 7.1, dobija se

$$\bar{a}_4^s = \frac{1}{2}(a_3 + a_5), \quad (3)$$

$$\bar{a}_2^s = \frac{1}{2}(a_1 + a_3). \quad (4)$$

Zamenom (3) i (4) u (2) i nakon preraspodele članova, sledi

$$\delta_s(b\bar{a}^s)_3 = a_3 \frac{(b_4 - b_2)}{d} + \frac{1}{2}b_4 \frac{(a_5 - a_3)}{d} + \frac{1}{2}b_2 \frac{(a_3 - a_1)}{d}. \quad (5)$$

Posmatranjem Slike 44 i korišćenjem (2) iz zadatka 7.1, svaki od članova desne strane (5) može se napisati

$$a_3 \frac{(b_4 - b_2)}{d} = (a\delta_s b)_3, \quad (6)$$

$$\frac{(a_5 - a_3)}{d} = (\delta_s a)_4, \quad (7)$$

$$\frac{(a_3 - a_1)}{d} = (\delta_s a)_2. \quad (8)$$

Zamenom (6), (7) i (8) u (5), dobija se

$$\delta_s(b\bar{a}^s)_3 = (a\delta_s b)_3 + \frac{1}{2}[(b\delta_s a)_4 + (b\delta_s a)_2]. \quad (9)$$

Ponovo, posmatranjem Slike 44 i korišćenjem (3) iz zadatka 7.1, drugi član desne strane (9) može se napisati

$$\frac{1}{2}[(b\delta_s a)_4 + (b\delta_s a)_2] = (\overline{b\delta_s a^s})_3. \quad (10)$$

Zamenom (10) u (9), konačno se dobija

$$\delta_s(b\bar{a}^s)_3 = (a\delta_s b)_3 + (\overline{b\delta_s a^s})_3. \quad (11)$$

Generalizacijom (11) za bilo koju tačku, važi

$$\delta_s(b\bar{a}^s) = a\delta_s b + \overline{b\delta_s a^s}. \quad (12)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.3.

Dokazati identitet

$$\delta_s(ab) = \bar{a}^s \delta_s b + \bar{b}^s \delta_s a, \quad (1)$$

gde su a i b neke zavisno promenljive razmaknuto raspoređene duž proizvoljne koordinatne ose s , δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka, a \bar{a}^s je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke.

Rešenje:

Posmatranjem rasporeda tačaka na Slici 44 i korišćenjem (2) iz zadatka 7.1, leva strana (1) za tačku 3 može se napisati

$$\delta_s(ab)_3 = \frac{1}{d}(a_4 b_4 - a_2 b_2). \quad (2)$$

Dodavanjem i oduzimanjem članova $a_4b_2/2$ i $a_2b_4/2$ desnoj strani (2) i nakon sređivanja, dobija se

$$\delta_s(ab)_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} \frac{b_4 - b_2}{d} + \frac{b_2 + b_4}{2} \frac{a_4 - a_2}{d}. \quad (3)$$

Posmatranjem Slike 44 i korišćenjem (2) i (3) iz zadatka 7.1, svaki od članova desne strane (3) može da se predstavi u obliku, redom

$$\frac{a_2 + a_4}{2} = \bar{a}_3^s, \quad (4)$$

$$\frac{b_4 - b_2}{d} = (\delta_s b)_3, \quad (5)$$

$$\frac{b_2 + b_4}{2} = \bar{b}_3^s, \quad (6)$$

$$\frac{a_4 - a_2}{d} = (\delta_s a)_3. \quad (7)$$

Konačno, zamenom (4)-(7) u (3), dobija se

$$\delta_s(ab)_3 = \bar{a}_3^s (\delta_s b)_3 + \bar{b}_3^s (\delta_s a)_3. \quad (8)$$

Generalizacijom (8) za bilo koju tačku, važi

$$\delta_s(ab) = \bar{a}^s \delta_s b + \bar{b}^s \delta_s a. \quad (9)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.4.

Dokazati identitet

$$\overline{ba}^s = \bar{b}^s \bar{a}^s + \frac{d^2}{4} (\delta_s a)(\delta_s b), \quad (1)$$

gde su a i b neke zavisno promenljive razmaknuto raspoređene duž proizvoljne koordinatne ose s , δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka, d , a $\bar{}^s$ je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke.

Rešenje:

Posmatranjem rasporeda tačaka na Slici 44, za tačku 3 se (1) može napisati

$$\left(\overline{ba}^s\right)_3 - \left(\bar{b}^s \bar{a}^s\right)_3 = \frac{d^2}{4} [(\delta_s a)(\delta_s b)]_3. \quad (2)$$

Prvi i drugi članovi sa leve strane (2), korišćenjem (3) iz zadatka 7.1, mogu se napisati

$$\left(\overline{ba^s}\right)_3 = \frac{1}{2}[(ba)_4 + (ba)_2], \quad (3)$$

$$\left(\overline{b^s a^s}\right)_3 = \frac{1}{2}(b_4 + b_2) \frac{1}{2}(a_4 + a_2). \quad (4)$$

Oduzimanjem (4) od (3) i nakon sređivanja, dobija se

$$\left(\overline{ba^s}\right)_3 - \left(\overline{b^s a^s}\right)_3 = \frac{1}{4}(a_4 - a_2)(b_4 - b_2). \quad (5)$$

Koristeći (2) iz zadatka 7.1, članovi u malim zagradama na desnoj strani (5) mogu se napisati

$$(a_4 - a_2) = d(\delta_s a)_3, \quad (6)$$

$$(b_4 - b_2) = d(\delta_s b)_3. \quad (7)$$

Zamenom (6) i (7) u (5), dobija se

$$\left(\overline{ba^s}\right)_3 - \left(\overline{b^s a^s}\right)_3 = \frac{d^2}{4}[(\delta_s a)(\delta_s b)]_3. \quad (8)$$

Na kraju, generalizacijom (8) za bilo koju tačku, važi

$$\overline{ba^s} - \overline{b^s a^s} = \frac{d^2}{4}(\delta_s a)(\delta_s b). \quad (9)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.5.

Dokazati identitet

$$\overline{sa^s} = s\overline{a^s} + \frac{d^2}{4}\delta_s a, \quad (1)$$

gde je a neka zavisno promenljiva razmaknuto raspoređena duž proizvoljne koordinatne ose s , δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka, d , a $\overline{}$ je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke.

Rešenje:

Stavljanjem da je

$$b \equiv s, \quad (2)$$

operator definisan izrazom (1) iz zadatka 7.4 postaje

$$\overline{sa}^s = \bar{s}^s \bar{a}^s + \frac{d^2}{4} (\delta_s a) (\delta_s s). \quad (3)$$

Pošto su

$$\bar{s}^s = s, \quad (4)$$

$$\delta_s s = 1, \quad (5)$$

konačno, iz (3) sledi

$$\overline{sa}^s = s \bar{a}^s + \frac{d^2}{4} \delta_s a. \quad (6)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.6.

Dokazati identitet

$$\delta_s J_A(A, B) = J_A(\bar{A}^s, \delta_s B) + J_A(\delta_s A, \bar{B}^s), \quad (1)$$

gde je J_A Arakavin Jakobijan, δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka duž proizvoljne koordinatne ose s , a $\bar{}^s$ je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke.

Rešenje:

Leva strana (1), može se napisati

$$\delta_s J_A(A, B) = \delta_s (\delta_x A \delta_y B - \delta_y A \delta_x B). \quad (2)$$

Korišćenjem identiteta (1) iz zadatka 7.3, članovi sa desne strane (2) se mogu napisati

$$\delta_s (\delta_x A \delta_y B) = \overline{\delta_x A}^s \delta_s (\delta_y B) + \overline{\delta_y B}^s \delta_s (\delta_x A), \quad (3)$$

$$-\delta_s (\delta_y A \delta_x B) = -\overline{\delta_y A}^s \delta_s (\delta_x B) - \overline{\delta_x B}^s \delta_s (\delta_y A). \quad (4)$$

Promenom redosleda diferenciranja δ_s i δ_x , odnosno, δ_s i δ_y , i operatora osrednjavanja, $\bar{}^s$, sa odgovarajućim operatorima diferenciranja, može se pisati

$$\delta_s (\delta_x A \delta_y B) = \delta_x \bar{A}^s \delta_y (\delta_s B) + \delta_y \bar{B}^s \delta_x (\delta_s A), \quad (5)$$

$$-\delta_s (\delta_y A \delta_x B) = -\delta_y \bar{A}^s \delta_x (\delta_s B) - \delta_x \bar{B}^s \delta_y (\delta_s A). \quad (6)$$

Grupisanjem prvih, odnosno drugih članova sa desne strane (5) i (6), sledi

$$\delta_x \bar{A}^s \delta_y (\delta_s B) - \delta_y \bar{A}^s \delta_x (\delta_s B) = J_A(\bar{A}^s, \delta_s B), \quad (7)$$

$$\delta_y \bar{B}^s \delta_x (\delta_s A) - \delta_x \bar{B}^s \delta_y (\delta_s A) = J_A(\delta_s A, \bar{B}^s). \quad (8)$$

Zamenom (7) i (8) u (2), identitet (1) je dokazan. Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.7.

Dokazati identitet

$$\bar{a}^s = a + \frac{d^2}{4} \delta_s (\delta_s a), \quad (1)$$

gde je a neka zavisno promenljiva razmaknuto raspoređena duž proizvoljne koordinatne ose s , δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka, d , a \bar{a}^s je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke.

Rešenje:

Posmatranjem rasporeda tačaka na Slici 44, za tačku 3 se (1) može napisati

$$\left(\bar{a}^s \right)_3 - a_3 = \frac{d^2}{4} [\delta_s (\delta_s a)]_3. \quad (2)$$

Prvi član sa leve strane (2), korišćenjem (3) iz zadatka 7.1, može se napisati

$$\left(\bar{a}^s \right)_3 = \frac{1}{4} (a_5 + a_3 + a_3 + a_1). \quad (3)$$

Oduzimanjem a_3 od (3) i nakon sređivanja, dobija se

$$\left(\bar{a}^s \right)_3 - a_3 = \frac{1}{4} [(a_5 - a_3) - (a_3 - a_1)]. \quad (4)$$

Koristeći (2) iz zadatka 7.1, članovi u malim zagradama na desnoj strani (4) se mogu napisati

$$(a_5 - a_3) = d(\delta_s a)_4, \quad (5)$$

$$(a_3 - a_1) = d(\delta_s a)_2. \quad (6)$$

Zamenom (5) i (6) u (4), dobija se

$$\left(\bar{a}^s \right)_3 - a_3 = \frac{d}{4} [(\delta_s a)_4 - (\delta_s a)_2]. \quad (7)$$

Ponovo, koristeći (2) iz zadatka 7.1, desna strana (7) može se napisati

$$(\delta_s a)_4 - (\delta_s a)_2 = d[\delta_s(\delta_s a)]_3. \quad (8)$$

Zamenom (8) u (7), konačno se dobija

$$\left(\overline{a^s}\right)_3 - a_3 = \frac{d^2}{4}[\delta_s(\delta_s a)]_3. \quad (9)$$

Na kraju, generalizacijom (9) za bilo koju tačku, važi

$$\overline{a^s} = a + \frac{d^2}{4}\delta_s(\delta_s a). \quad (10)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.8.

Dokazati identitet

$$\overline{A\nabla_+^2 B} = \overline{\delta_x A \delta_x B} + \overline{\delta_y A \delta_y B}. \quad (1)$$

Rešenje:

Leva strana (1) se bez operatora osrednjavanja može napisati

$$A\nabla_+^2 B = A\delta_{xx} B + A\delta_{yy} B. \quad (2)$$

Koristeći (1) iz zadatka 7.3, članovi desne strane (2) se mogu napisati

$$\delta_x(A\delta_x B) = \overline{A^x \delta_{xx} B} + \overline{\delta_x B^x \delta_x A}, \quad (3)$$

$$\delta_y(A\delta_y B) = \overline{A^y \delta_{yy} B} + \overline{\delta_y B^y \delta_y A}. \quad (4)$$

Primenjujući operator osrednjavanja preko cele oblasti na (3) i (4), dobija se

$$\overline{\delta_x(A\delta_x B)} = \overline{\overline{A^x \delta_{xx} B}} + \overline{\overline{\delta_x B^x \delta_x A}}, \quad (5)$$

$$\overline{\delta_y(A\delta_y B)} = \overline{\overline{A^y \delta_{yy} B}} + \overline{\overline{\delta_y B^y \delta_y A}}. \quad (6)$$

U zatvorenoj oblasti važi

$$\overline{\overline{A^x \delta_{xx} B}} = \overline{A\delta_{xx} B}, \quad (7)$$

$$\overline{\overline{A^y \delta_{yy} B}} = \overline{A\delta_{yy} B}, \quad (8)$$

$$\overline{\overline{\delta_x B^x \delta_x A}} = \overline{\delta_x B \delta_x A}, \quad (9)$$

$$\overline{\delta_y B^y \delta_y A} = \overline{\delta_y B \delta_y A}. \quad (10)$$

Zamenom (7)-(10) u (5) i (6), dobija se

$$\overline{\delta_x (A \delta_x B)} = \overline{A \delta_{xx} B} + \overline{\delta_x B \delta_x A}, \quad (11)$$

$$\overline{\delta_y (A \delta_y B)} = \overline{A \delta_{yy} B} + \overline{\delta_y B \delta_y A}. \quad (12)$$

U nastavku, sabiranjem (11) i (12), može se napisati

$$\overline{\delta_x (A \delta_x B)} + \overline{\delta_y (A \delta_y B)} = \overline{A \delta_{xx} B} + \overline{\delta_x B \delta_x A} + \overline{A \delta_{yy} B} + \overline{\delta_y B \delta_y A}. \quad (13)$$

Pošto u zatvorenoj oblasti nema promene srednje divergencije,

$$\overline{A(\delta_{xx} B + \delta_{yy} B)} = 0, \quad (14)$$

iz (13) se konačno dobija

$$\overline{\delta_x (A \delta_x B)} + \overline{\delta_y (A \delta_y B)} = \overline{\delta_x B \delta_x A} + \overline{\delta_y B \delta_y A}. \quad (15)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

ZADATAK 7.9.

Dokazati identitet

$$\delta_s \bar{a}^s = \delta_{2s} a, \quad (1)$$

gde je a neka zavisno promenljiva razmaknuto raspoređena duž proizvoljne koordinatne ose s , δ_s je operator za centralni količnik konačnih razlika preko rastojanja najbližih istorodnih tačaka, d , a $\bar{}^s$ je operator osrednjavanja iz dve najbliže istorodne tačke.

Rešenje:

Posmatranjem rasporeda tačaka na Slici 44, za tačku 3 se (1) može napisati

$$\left(\delta_s \bar{a}^s\right)_3 = \left(\delta_{2s} a\right)_3. \quad (2)$$

Leva strana (2), koristeći (2) iz zadatka 7.1, može se napisati

$$\left(\delta_s \bar{a}^s\right)_3 = \frac{1}{d} \left(\bar{a}_4^s - \bar{a}_2^s\right). \quad (3)$$

Koristeći (3) iz zadatka 7.1, članovi na desnoj strani (3) mogu se napisati

$$\bar{a}_4^s = \frac{1}{2}(a_5 + a_3), \quad (4)$$

$$\bar{a}_2^s = \frac{1}{2}(a_3 + a_1). \quad (5)$$

Zamenom (4) i (5) u (3), dobija se

$$\left(\delta_s \bar{a}^s\right)_3 = \frac{1}{2d}(a_5 - a_1). \quad (6)$$

Koristeći (2) iz zadatka 7.1, desna strana (6) može se napisati

$$\frac{1}{2d}(a_5 - a_1) = \left(\delta_{2s} a\right)_3. \quad (7)$$

Zamenom (7) u (6), konačno se dobija

$$\left(\delta_s \bar{a}^s\right)_3 = \left(\delta_{2s} a\right)_3. \quad (8)$$

Na kraju, generalizacijom (8) za bilo koju tačku, važi

$$\delta_s \bar{a}^s = \delta_{2s} a. \quad (9)$$

Identičan postupak za dokazivanje (1) može se naći kod Gavrilova i Tošić (1998).

NAMERNO PRAZNA STRANA

LISTA SIMBOLA I OZNAKA

(\dots)	Opšti simbol za promenjivu veličinu
(\dots)	Opšti simbol za nezavisno promenjivu veličinu
a	Promenljiva
A	Arakavina A mreža,
A	Amplituda računskog dela rešenja, parametar, promenljiva
A_O	Amplituda preskočne šeme dobijena Ojlerovom šemom
A_H	Amplituda preskočne šeme dobijena Hjunovom šemom
B	Arakavina B mreža
B	Promenljiva
B'	Konstanta, parametar
B''	Konstanta
c	Fazna brzina u opštem slučaju u jednoj ili dve dimenzije, fazna brzina u analitičkom slučaju u jednoj ili dve dimenzije
c_g	Grupna brzina u opštem slučaju, grupna brzina u analitičkom slučaju
c_x	Fazna brzina duž x pravca
c_y	Fazna brzina duž y pravca
C	Arakavina C mreža
d	Korak mreže
d'	Korak mreže
$d(\dots)^n/dt^n$	Totalni izvod reda n veličine (\dots)
D	Arakavina D mreža
e	Osnova prirodnog logaritma funkcija
E	Arakavina E mreža
f	Koriolisov parametar, funkcija
g	Ubrzanje Zemljine teže
h	Visina
hx	Visina kao nepoznata veličina
H	Osnovna visina
i	Imaginarna jedinica
i	Indeks pravilne mreže tačaka u x pravcu
I	Maksimalna vrednost indeksa u x pravcu, rezultanta osnovne struje
j	Indeks pravilne mreže tačaka u y pravcu
J	Jakobijan u analitičkom slučaju
J_A	Arakavin Jakobijan
J^∇	Jakobijan u diskretnom slučaju
k	Talasni broj u opštem slučaju duž x pravca, osa na dijagramu talasnih brojeva
k'	Osa na dijagramu talasnih brojeva

k_m	Svojstvena vrednost talasnog broja u x pravcu
k_{\max}	Maksimalni talasni broj
k_p	"Preslikani" talasni broj
K	Kinetička energija
l	Talasni broj u opštem slučaju duž y pravca, osa na dijagramu talasnih brojeva
l'	Osa na dijagramu talasnih brojeva
l_n	Svojstvena vrednost talasnog broja u y pravcu
lim	Limes
L	Dužina intervala, talasna dužina
L_p	Talasna dužina "preslikanog" talasa
L_1, L_2, L_3	Talasne dužine
L_x	Talasna dužina u x pravcu
L_y	Talasna dužina u y pravcu
m	Opšti indeks, indeks svojstvene vrednosti duž x pravca
mn	Indeks svojstvene vrednosti
Max	Matematički operator za biranje najveće od svih ponuđenih vrednosti
n	Opšti indeks, indeks svojstvene vrednosti duž y pravca, izvod funkcije, vremenski nivo
N	Indeks
O	Greška odsecanja Tejlorovog reda
p	Promena faze tačnog rešenja po jednom koraku vremena
q	Potencijalna vrtložnost, advektirana veličina
r	Relativna promena faze, relativna fazna brzina
t	Vreme
t_n	Vremenski nivo
u	Komponenta vetra duž x pravca
u_g	Komponenta geostrofskog vetra duž x pravca
U, \bar{U}	Osnovna struja (brzina vetra) duž x pravca, fluks mase duž x pravca
U'	Fluks mase duž x' pravca
U_x	Fluks mase kao nepoznata veličina duž x pravca
$U(t)$	Amplituda
$U^{(\dots)}$	Amplituda preskočne šeme na nivou (...)
$U_O^{(\dots)}$	Amplituda Ojlerove šeme na nivou (...)
$U_H^{(\dots)}$	Amplituda Hjunove šeme na nivou (...)
v	Komponenta vetra duž y pravca
v_g	Komponenta geostrofskog vetra duž y pravca
V, \bar{V}	Osnovna struja (brzina vetra) duž y pravca, fluks mase duž y pravca

V'	Fluks mase duž y' pravca
V_y	Fluks mase kao nepoznata veličina duž y pravca
x	Koordinatna osa
x'	Koordinatna osa
X	Promenljiva
y	Koordinatna osa
y'	Koordinatna osa
Y	Promenljiva
α	Parametar, ugao
β	Parametar
γ	Parametar
δ	Mala vrednost
$\delta_{(\dots)}(\dots)$	Centralni količnik konačnih razlika veličine (\dots) iz dve najbliže istorodne tačke duž (\dots) pravca
$\delta_{2(\dots)}(\dots)$	Centralni količnik konačnih razlika veličine (\dots) preko dva intervala mreže duž (\dots) pravca
Δx	Prostorni korak duž x pravca
Δy	Prostorni korak duž y pravca
Δt	Vremenski korak
ε	Greška odsecanja
ε_P	Greška odsecanja preskočne šeme
ε_{AB}	Greška odsecanja Adams-Bašfortove šeme
ζ	Relativna vrtložnost
η	Enstrofija
θ	Promena faze numeričkog rešenja po jednom koraku vremena
λ	Rosbijev radijus deformacije, faktor povećanja
$\lambda_{1,2,3,4,5,6}$	Faktori povećanja
$\lambda_{c_{1,2}}$	Faktori povećanja
λ_p	Faktor povećanja
μ	Koeficijent
ν	Frekvencija
ξ	Parametar
π	Ludolfov broj
ϕ	Geopotencijal
χ	Potencijal brzine
ψ	Strujna funkcija
ω	Ugaona frekvencija
$\partial^n(\dots)/\partial(\dots)^n$	Parcijalni izvod veličine (\dots) po (\dots) reda n
∇^2	Laplasov operator
∇_x^2	Laplasov operator "puta"
∇_+^2	Laplasov operator "plus"
$(\dots)_{A,B,C,D,E}$	Veličina (\dots) na mrežama A, B, C, D i E
$(\dots)_i$	Veličina (\dots) u jednodimenzionalnoj mreži tačaka

$(\dots)_{i,j}$	Veličina (\dots) u dvodimenzionalnoj mreži tačaka
$(\dots)_{i,n}$	Veličina (\dots) u prostorno-vremenskoj mreži tačaka
$(\dots)_{IM}$	Imaginarni deo veličine (\dots)
$(\dots)_n$	Veličina (\dots) u prostornoj mreži tačaka
$(\dots)_i^n$	Veličina (\dots) u prostorno-vremenskoj mreži tačaka
$(\dots)^n$	Veličina (\dots) na nivou vremena n
$(\dots)_{mn}$	Svojstvene vrednosti veličine (\dots) u dvodimenzionalnom slučaju
$(\dots)_{RE}$	Realni deo veličine (\dots)
$(\dots)^+$	Veličina (\dots) na prognostičkom nivou +
$(\dots)^*$	Diskretne vrednosti veličine (\dots)
$(\dots)^{\hat{}}$	Amplituda veličine (\dots)
$(\dots)'$	Poremećene veličine (\dots)
$\overline{(\dots)}^{(\dots)}$	Linearno osrednjavanje veličine (\dots) između dve najbliže tačke duž (\dots) pravca
$\overline{(\dots)}^{2(\dots)}$	Linearno osrednjavanje veličine (\dots) između četiri najbliže tačke duž (\dots) pravca
$\overline{(\dots)}$	Linearno osrednjavanje veličine (\dots) u oblasti
τ_{xy}	Operator osrednjavanja
$\underset{\cdot}{\smile}^s$	Operator proizvoda veličina iz dve susedne tačke duž koordinatne ose s

GRČKI ALFABET

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gama
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	teta
I	ι	iota
K	κ	kapa
Λ	λ	lambda
M	μ	mi
N	ν	ni
Ξ	ξ	ksi
O	\omicron	omikron
Π	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Y	υ	ipsilon
Φ	ϕ	fi
X	χ	hi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

NAMERNO PRAZNA STRANA

LISTA OSNOVNIH FUNKCIJA I NAREDBI U FORTRANU I MATLABU

Funkcije opšte namene		
	FORTRAN	MATLAB
<i>raspoloživa pomoć</i> <i>brisanje radnog prostora</i>		help clear

Operacije sa matricama		
	FORTRAN	MATLAB
<i>sabiranje</i>	+	+
<i>oduzimanje</i>	-	-
<i>množenje</i>	*	*
<i>delenje s desna</i>	/	/
<i>stepenovanje</i>	**	^

Operacije sa nizovima brojeva		
	FORTRAN	MATLAB
<i>sabiranje</i>	+	+
<i>oduzimanje</i>	-	-
<i>množenje</i>	*	.*
<i>delenje s desna</i>	/	./
<i>stepenovanje</i>	**	.^

Komandni prozor		
	FORTRAN	MATLAB
<i>prikazuje matricu ili tekst</i> <i>brisanje ekrana</i>	print cls	disp clc

Grafički prozor		
	FORTRAN	MATLAB
<i>linearni x-y grafik</i> <i>konturni crtež</i> <i>domen za mrežne 3D površine</i> <i>crtanje mreže po grafiku</i> <i>naslov crteža</i> <i>označavanje x-ose</i> <i>označavanje y-ose</i> <i>ručno skaliranje osa</i>		plot contour meshdom grid title xlabel ylabel axis

Specijalni karakteri		
	FORTRAN	MATLAB
<i>iskaz pridruživanja</i>	=	=
<i>za formiranje vektora i matrica</i>	[[
<i>videti [</i>]]
<i>redosled u aritmetičkom izrazu</i>	((
<i>videti (</i>))
<i>decimalna tačka</i>	.	.
<i>nastaviti iskaz u sledećem redu</i>	&	...
<i>razdvajanje indeksa i argumenata</i>	,	,
<i>kraj iskaza, bez prikazivanja</i>		;
<i>komentari</i>	c	%

Specijalne vrednosti		
	FORTRAN	MATLAB
<i>π - Ludolfov broj</i>		pi

Elementarne matematičke funkcije		
	FORTRAN	MATLAB
<i>apsolutna vrednost ili modus</i>	abs	abs
<i>kvadratni koren</i>	sqrt	sqrt
<i>sinus</i>	sin	sin
<i>kosinus</i>	cos	cos

LITERATURA

- Arakawa, A., 1966: Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I. *J. Comput. Phys.*, **1**, 119-143.
- Arakawa, A., 1972: Design of the UCLA general circulation model. Numerical simulation of Weather and Climate, *Dept. of Meteor. Univ. of California*, Los Angeles, Tech. Rept. No. 7, 116 pp. (Los Angeles, CA 90024, U.S.A.)
- Arakawa, A. and V. R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics. Academic Press*, **17**, 173-265.
- Balandžić S., 1981: Šema za horizontalnu advekciju prognostičkog modela Saveznog hidrometeorološkog zavoda. Diplomski rad, *Prirodno-matematički fakultet u Beogradu*, Univerzitet u Beogradu, 61 str. (Srbija)
- Courant R., K. Friedrichs and H. Lewy, 1928: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, **100**, 32-74.
- Fjoroft, R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow. *Tellus*, **5**, 225-230.
- Gavrilov, M., 1985: Frequency of quasi-geostrophic modes over grid points and definition of geostrophic wind. *Időjárás*, **89**, 77-85.
- Gavrilov, B. M. i I. A. Tošić, 1998: Praktikum iz Modeliranja atmosfere I sa primerima računarskih programa u FORTRANu i MATLABu. Institut za meteorologiju, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 187 str. (Srbija)
- Gavrilov, B. M. and I. A. Tošić, 1998a: Propagation of the Rossby Waves on Two Dimensional Rectangular Grids. *Meteorol. Atmos. Phys.*, **69**, 119-125
- Gavrilov, B. M. and I. A. Tošić, 1999: Dispersion Characteristics of Discrete Quasi-Geostrophic Modes. *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 2197-2203.
- Janjić, Z. I., 1974: A stable centered difference scheme free of two-grid-interval noise. *Mon. Wea. Rev.*, **102**, 319-323.
- Janjić, Z. I., 1977: Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography. *Contrib. Atmos. Phys.*, **50**, 186-199.
- Janjić, Z. I., 1979: Forward-backward scheme modified to prevent two-grid-interval noise and its application in sigma-coordinate models. *Contrib. Atmos. Phys.*, **52**, 69-84.
- Janjić, Z. I., 1984: Nonlinear advection schemes and energy cascade on semi-staggered grids. *Mon. Wea. Rev.*, **112**, 1234-1245.
- Janjić, Z. I., 1993: Modeliranje atmosfere I. Skripta za studente meteorologije. Institut za meteorologiju, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 202 str. (Srbija)
- Mesinger, F., 1976: Dinamička meteorologija. *Građevinska knjiga*, 224 str. (Srbija)
- Mesinger, F., 1979: Dependence of vorticity analogue and the Rossby wave phase speed on the choice of horizontal grid. *Bulletin T. LXIV de l'Académie serbe des sciences et des arts*, **10**, 5-15 pp.
- Mesinger, F. and Arakawa, A., 1976: Numerical methods used in atmospheric models. Vol. I. *WMO/JOC GARP Publ. Ser.*, No. 17, 64 pp. (Case Postale 2300, CH-1211 Geneve 2).
- Rančić M., 1987: Advektivna šema četvrtog reda tačnosti koja vrši ispravnu nelinearnu kaskadu energije na polu-razmaknutoj mreži. Institut za meteorologiju, Doktorska disertacija, *Prirodno-matematički fakultet*, Univerzitet u Beogradu, 181 str. (Srbija).
- Rančić M., 1988: Skripta iz Dinamičke meteorologije IV. *Prirodno-matematički fakultet u Beogradu*, Univerzitet u Beogradu, Srbija.
- Richtmyer, R. D., 1963: A survey of difference methods for non-steady fluid dynamics. *NCAR Tech. Notes*, 63-2, 25 pp. (Nat. Center for Atm. Res., Boulder, CO, U.S.A.).

- Winninghoff, F. G., 1968: On the adjustment toward a geostrophic balance in a simple primitive equation model with application to the problems of initialization and objective analysis. Ph. D. Thesis, *Dept. of Meteor. Univ. of California*, Los Angeles.
- Young, J. A., 1968: Comparative properties of some time differencing schemes for linear and non-linear oscillations. *Mon. Wea. Rev.*, **96**, 357-364.

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MODELIRANJA ATMOSFERE I je prvenstveno namenjena meteorolozima i specijalistima koji se bave problemima modeliranja atmosfere. Takode, Zbirku mogu koristiti i stručnjaci u drugim oblastima koji se sreću sa problemima numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina hidrodinamike i/ili drugih običnih diferencijalnih jednačina talasnog tipa i/ili hiperboličnih i eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Termini i simboli u Zbirci usklađeni su sa uobičajenim međunarodnim i domaćim standardima. Pored klasičnog ili analitičkog pristupa u rešavanju zadataka, Zbirka sadrži i listinge izvornih kodova kompjuterskih programa u jezicima FORTRAN i MATLAB, koji automatizuju izložene numeričke procedure i vizuelizuju pojedine numeričke rezultate. Za većinu zadataka nevedena je (autorima dostupna) literatura koja ukazuje na teorijsku osnovu, ishodište zadatka ili materiju značajnu za zadatak.

Izvod iz recenzije:

“... Zbirka u potpunosti prati kurs “Modeliranja atmosfere I” onako kako se ovaj kurs predaje poslednjih godina na Institutu za meteorologiju Fizičkog fakulteta, predstavlja njegovu odličnu dopunu i u mnogome olakšava izvođenje nastave. Treba naglasiti da je ovo prva zbirka ove vrste kod nas i jedna od retkih takvih zbirki u svetu ...”

Prof. dr Zaviša I. Janjić

ISBN 86-902111-1-X

