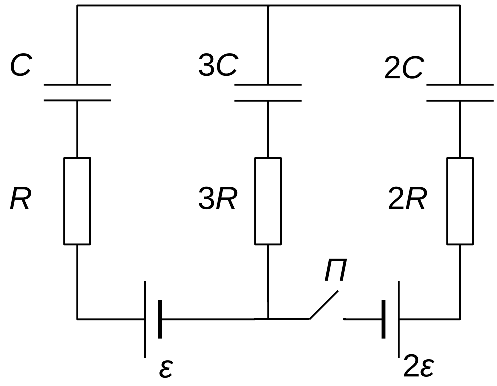
Зашто са кондензаторима треба бити пажљив

др Драган Милићев
Професор на Катедри за рачунарску технику и информатику
Електротехничког факултета Универзитета у Београду
dmilicev@etf.rs
V1.0 - Београд, децембар 2016.

Овај текст намењен је ученицима основних и средњих школа и њиховим наставницима физике, као помоћ у исправном разумевању појма кондензатора и начина његовог третирања у електричним колима, али и других фундаменталних појмова и појава из области електромагнетизма. Поред тога, ово је и позив састављачима задатака на такмичењима из физике у основним и средњим школама да коригују свој приступ у постављању и решавању задатака из ове области, као и да исправе неке грешке у досадашњој пракси на које се овде указује. Овај текст није замена за школско градиво и уџбенике из физике, али може да буде њихова добра допуна.

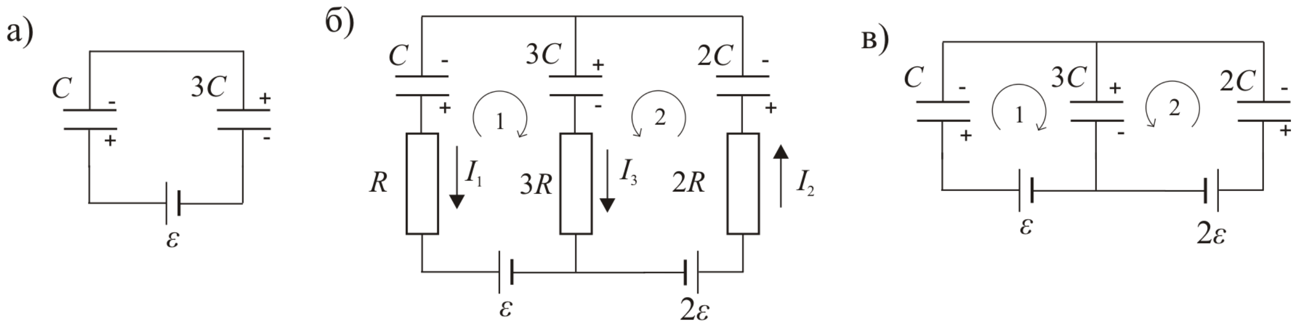
На Државном такмичењу из физике 2016. године, у организацији Друштва физичара Србије, ученицима 8. разреда основне школе постављен је следећи задатак:

У колу приказаном на слици 1 одредити:
а) напон на кондензатору капацитета C након успостављања равнотеже, а пре затварања прекидача П,
б) струју I_3 која потекне кроз отпорник отпорности $3R$ одмах после затварања прекидача П и
в) напон на кондензатору капацитета C после затварања прекидача и успостављања равнотеже.
Напомена: Одмах након затварања прекидача кондензатори се понашају као извори струје чија је ЕМС једнака напону на кондензатору пре затварања прекидача, а поларитет им одговара знаку наелектрисања на плочама.



Слика 1

Званично решење комисије гласи дословце овако:



Слика 2

а) Еквивалентна шема за први случај је приказана на слици 2а. Одавде се види да је:

$\varepsilon = U_C + U_{3C}$, *тј.*

$\varepsilon = \dfrac{q}{C} + \dfrac{q}{3C} = \dfrac{4q}{3C}$, *па се добија:*

$U_C = \dfrac{3}{4}\varepsilon$.

б) Примена Кирхофових правила: $I_3 + I_1 = I_2$.
Прва контура:
$\varepsilon - U_C - U_{3C} = 3I_3R - I_1R$, *пошто је још увек* $\varepsilon = U_C + U_{3C}$, *добија се* $3I_3 = I_1$.
Друга контура:

$2\varepsilon - U_{2C} - U_{3C} = 3I_3R + 2I_2R$, *пошто је* $U_{2C} = 0$, $3I_3R + 2I_2R = \dfrac{7\varepsilon}{4}$.

Пошто је $I_2 = 4I_3$, *добија се* $I_3 = \dfrac{7\varepsilon}{44R}$.

в) Укупна количина наелектрисања је $q_1 + q_2 = q_3$, *за контуру један важи:*

$\varepsilon = \dfrac{q_1}{C} + \dfrac{q_3}{3C}$,

а за контуру два:

$2\varepsilon = \dfrac{q_2}{2C} + \dfrac{q_3}{3C}$,

$q_1 = \dfrac{C\varepsilon}{6}$, $U_1 = \dfrac{q_1}{C} = \dfrac{1}{6}\varepsilon$.

Делује исправно и коректно, али ипак није сасвим – пажљивом познаваоцу (најмање) један детаљ одмах упада учи и ”пали лампицу” за упозорење. Да наговестимо: замислите да је коло сада у равнотежном (стационарном) стању које је последње у овом задатку (са затвореним прекидачем, слика 2в). Отворите сада прекидач *П* и сачекајте да се коло поново ”смири”, односно пређе поново у стационарно стање (стање ”равнотеже”). То ће бити стање са почетка задатка, односно стање отвореног прекидача са слике 2а. Које је решење целог задатка сада? Конкретније, на основу чега је у званичном решењу задатка под б закључено да је $U_{2C} = 0$, из чега то заправо следи?

Али да кренемо од самог почетка.

О физици, електромагнетици и њиховим законима

Физика је егзактна и формална природна наука. Ово значи да се у физици сви закључци изводе искључиво из у датом тренутку познатих и формулисаних *основних* или *фундаменталних физичких закона*, који се узимају као полазни постулати, односно аксиоме, тврдње без (теоријског) доказа, јер се сматра да су то правила природе, бар она за које човек у датом тренутку зна на основу посматрања појава у природи и извршених експеримената. Закључци се изводе строгим математичким поступцима и правилима математичке логике. Према томе, за било који теоријски (замишљен) пример или појаву која се може објаснити одређеним законима важе сви они закључци који се овим строгим правилима математике и логике могу извести из познатих закона. Али и само они: било који други закључак који на овај начин не следи из закона није валидан, јер може, али не мора важити.

Сви до сада познати физички закони имају своја ограничења, односно домене (области) појава у којима важе и предуслове под којима важе, или описују само неке појаве. За сада још увек није познат универзални, свеобухватни закон или једноставан скуп закона (теорија) који би објаснио све природне појаве у свим условима и из кога би сви други познати физички закони могли бити изведени. Физичари широм света већ деценијама трагају за таквом теоријом као за светим гралом и нико још поуздано не зна да ли такав закон или теорија уопште постоје. Наравно, њихово откриће би вероватно значајно променило свет, али смо од њих још увек далеко, ако их икада уопште будемо пронашли.

Због тога су све до сада познате физичке теорије парцијалне (делимичне). Међутим, развојем физике, односно разних њених дисциплина, изналазе се нови, фундаменталнији закони који представљају уопштења неких других, раније познатих закона. Да би неки нови закон у физици био прихваћен, он мора да добро *објасни* све до тада познате појаве које су објашњавали до тада познати закони из исте области, да буде *сагласан* са резултатима до тада спроведених експеримената, али и да објасни неке друге појаве и резултате експеримената које до тада познати закони можда нису могли да објасне. Осим тога, сваки закон треба и да *предвиђа* појаве, тј. да предвиђа резултате замишљених експеримената, а да онда те резултате потврде и конкретни, наканадно спроведени експерименти. Тада тај нови закон постаје основни, док раније познати закони које он уопштава онда постају само његови специјални случајеви који се из њега могу извести, или се просто одбацују као непотпуни.

Један такав познат пример јесте Ајнштајнова[1] теорија релативности која је уопштила до тада једино коришћену Њутнову[2] теорију механике, засновану на познатим Њутновим законима и класичним правилима сабирања брзине у међусобно покретним референтним системима. Њутнова теорија тако постаје само специјални случај теорије релативности, при чему закони њутновске механике са добром прецизношћу, али ипак приближно описују (апроксимирају) појаве за релативно мале брзине кретања тела, тј. за брзине много мање од брзине светлости. Према томе, Њутнова теорија се и даље примењује у пракси за описивање проблема макросвета у којима делује човек и у којима су брзине баш овакве, док за физику честица које се крећу великим брзинама добре резултате даје теорија релативности.

Електромагнетика је једна област физике која се бави појавама везаним за електрицитет и магнетизам. Она је фундаментална област електротехнике, јер формулише фундаменталне, опште законе (и практичне теореме изведене из њих) у овој области. Ти фундаментални закони су исказани кроз четири *Максвелове*[3] *једначине*, које се, заједно са *Лоренцовим*[4] *законом о електромагнетској сили* на тачкасто наелектрисање у покрету, зато узимају као постулати целе електротехнике. Максвелове једначине, односно закони, добијени су уопштењем и обједињавањем до тада познатих физичких закона из области електрицитета

1 Albert Einstein (1879 – 1955), немачки физичар.
2 Isaac Newton (1642 – 1726/27), енглески математичар и физичар.
3 James Clerk Maxwell (1831 – 1879), шкотски физичар.
4 Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928), холандски физичар.

и магнетизма, као што су Кулонов[5] закон, Гаусов[6] закон, Фарадејев[7] закон, Амперов[8] закон, једначина континуитета, Кирхови[9] закони (правила) итд[10]. Сви ови закони тако представљају само специјалне случајеве, односно *теореме* које се могу извести из Максвелових закона математичким извођењем и правилима логике. До ових, пак, полазних закона научници су дошли пажљивом анализом раније познатих експеримената, као и сопствених експеримената, логичким резоновањем и уопштавањем резултата тих експеримената у математичке исказе (релације између физичких величина), при чему су потом ти закони потврђени у низу других експеримената који су имали за циљ да провере њихову способност ”предвиђања” појава, односно провере вредности добијене прорачуном на основу закона и стварно уочених појава и вредности измерених у експерименту.

Из Максвелових једначина и Лоренцовог закона о електромагнетској сили на тачкасто наелектрисање у покрету[11] се изводе сви остали закони и закључци у електротехници. Осим њих, електромагнетика користи и још неке фундаменталне физичке законе, као што су закон о суперпозицији силе (резултантна сила на материјалну тачку једнака је векторском збиру сила које делују на њу), као и закон о одржању енергије.

Ни Максвелови закони нису универзални, јер они не описују појаве у микросвету, нпр. физику појединачних фотона, као и неке екстремне случајеве (веома јаких поља и веома малих растојања). Међутим, Максвелови закони сасвим добро описују и предвиђају све електромагнетске појаве у макросвету, што подразумева простор за који се може претпоставити да је бројност елементарних наелектрисаних честица (електрона, протона), у деловима простора у којима постоји наелектрисање, огромна и да се оне довољно густо распоређене, тако да се наелектрисање може сматрати приближно континуалним (али различитог распореда густине, која може бити и нула – без наелектрисања). На тај начин се узима да се електромагнетска поља могу описати и решавати техникама математичке анализе и диференцијалног рачуна.

Како ова претпоставка важи за скоро све домене људске примене електромагнетизма у пракси, Максвелови закони, односно једначине, се узимају као фундаментални за целу електротехнику.

Максвелове једначине

Максвелове једначине чине конзистентан, минималан, потпун скуп једначина које добро описују све до сада познате појаве у области електромагнетике, у домену своје примењивости, као што је речено. Ови појмови значе да су ове једначине:

- *конзистентне*: оне нису у контрадикцији једна са другом,
- *независне*: не може се нека од њих извести из неких од осталих у општем случају[12],
- *комплетне*, тј. покривајуће: све до сада познате појаве могу се добро описати и остали познати закони могу се извести из њих;
- *минималне*: ниједна од њих се не може уклонити, а да преостали скуп једначина остане комплетан.[13]

5 Charles-Augustin de Coulomb (1736 – 1806), француски физичар.
6 Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), немачки математичар и физичар.
7 Michael Faraday (1791 – 1867), енглески физичар.
8 André-Marie Ampère (1775 – 1836), француски математичар и физичар.
9 Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887), немачки физичар.
10 Максвел је најранији облик ових једначина објавио у периоду 1861-1862. године.
11 Лоренцов закон заправо повезује електромагнетику и механику, успостављајући релацију између величина електромагнетског поља и силе којом то поље делује на покретно или непокретно тачкасто наелектрисање.
12 У одређеним специјалним случајевима, односно под одређеним додатним претпоставкама, неке једначине се могу извести из преосталих. Пошто не постоји потпуна сагласност о томе да ли неке од тих претпоставки заиста могу да се узму као постулати, ова тврдња још увек нема потпуну сагласност међу физичарима.
13 Једначине могу бити независне, а да ипак нису минималне. Рецимо, додавање Другог Њутновог закона у

У наставку ћемо дати појадностављен, не сасвим формалан, али ипак довољно прецизан опис и објашњење Максвелових једначина. Напомињемо да редослед ових једначина у литератури није свуда исти, па њихова нумерација није јединствена.[14] У овом тексту користиће се следећи начин означавања. Физичке величине биће означаване косим словима (курзивом), при чему ће велика слова означавати величине које се не мењају у времену, нпр. E, U, I, Q, или њихове вредности у неком произвољном или одређеном тренутку времена, док ће малим словима бити означаване величине променљиве у времену, нпр. u, i, q, као функције времена (тј. $u(t)$, $i(t)$, $q(t)$). Физичке и математичке константе биће означаване усправним словима, нпр. π, ε. Векторске величине биће наглашаване масним словима, нпр. $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}$, док ће њихови интензитети, као и скаларне величине, бити означаване немасним словима, нпр. F, E.

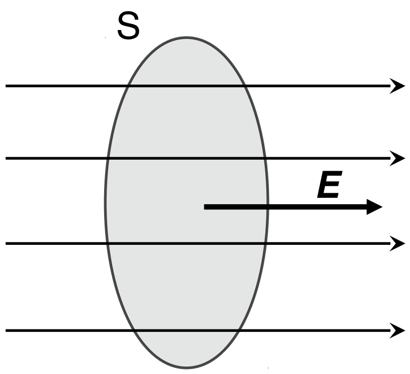
А. Гаусов закон за електрично поље

Ова Максвелова једначина описује Гаусов закон за електрично поље и гласи овако:

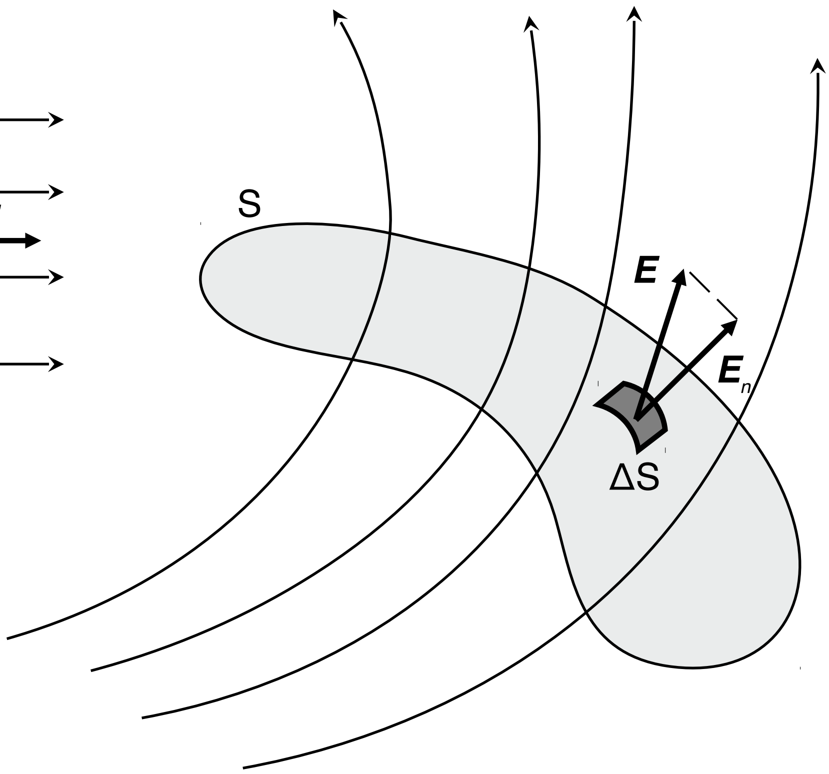
Укупан ”проток” (флукс) Φ вектора јачине електричног поља $\boldsymbol{E}$ кроз неку (било коју, сваку) затворену површ S *у простору, овде означен са* $\Phi_\mathrm{S}(\boldsymbol{E})$, *увек (у сваком тренутку времена) је једнак количнику укупног наелектрисања Q које се налази у простору* $\mathrm{V_S}$ *обухваћеном том површи и физичке костанте* ε_0:

$$\Phi_\mathrm{S}(\boldsymbol{E})=\frac{Q_{\mathrm{V_s}}}{\varepsilon_0}$$

Појам ”протока” неког вектора кроз неку површ, или *флукса* како се у науци назива, овде нећемо сасвим прецизно и формално дефинисати, али ћемо рећи да је он сличан појму



Слика 3



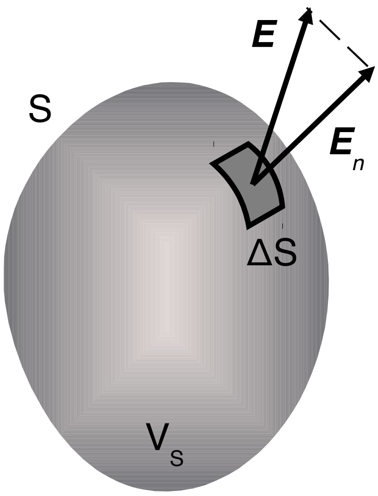
Слика 4

овај скуп закона не доприноси описивању електромагнетских поља, па, иако је независан од осталих, не чини скуп закона који описују електромагнетске појаве минималним. Наравно, ако једначине нису независне, онда ни њихов скуп није минималан.

14 Редослед којим су оне овде изложене преузет је са Википедије (https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations). У електротехници је уобичајен редослед у коме прве две (Гаусови закони) и друге две (Фарадејев и Амперов закон) међусобно замењују места.

протока течности кроз неку површ (одатле је и добио назив). Њега је једноставно разумети за случај равне површи S и вектора који је свуда нормалан на ту површ и једнаког правца, смера и интензитета у свакој тачки те површи (слика 3). У том случају, флукс је једноставан производ површине те површи и интензитета тог вектора. На пример, ако је посматрани вектор брзина протока течности кроз неку цев, и ако је интензитет тог вектора једнак по целој површини попречног пресека те цеви и нормалан на њу, онда флукс заправо представља запремински проток те течности кроз тај попречни пресек (запремину течности која протекне кроз дати попречни пресек у јединици времена)[15].

За случај закривљене површи или неједнаког интензитета вектора (слика 4), флукс се израчунава замишљеном поделом дате површи на бескрајно много бескрајно ситних површи ΔS, за које се сматра да су практично равне и да је по њима интензитет вектора ***E*** исти (јер су оне бескрајно мале), а онда сабирањем свих тих ”ситних” флуксева кроз те површинице који се добијају множењем сваке површинице и интензитета компоненте $\boldsymbol{E}_n$ вектора ***E*** нормалне на ту површиницу; овај поступак назива се *интеграција*.



Слика 5

У овој Максвеловој једначини, односно Гаусовом закону, посматра се произвољна *затворена површ* S (слика 5), а флукс израчунава описаним поступком интеграције по тој површи, подељеној на бесконачно мале површинице ΔS. Флукс је скаларна (алгебарска) величина, описана знаком и интензитетом. По договору, флукс неког вектора кроз затворену површ узима се за референтни смер ”замишљеног протока” који *излази* из дате површине у свим правцима. На деловима површи на којима вектор има стварни смер једнак референтном смеру (излази ван простора ограниченог површи), флукс ће бити позитиван. На деловима површи на којима вектор има стварни смер супротан овом референтном смеру (улази у простор ограничен површи), флукс ће имати негативну вредност. Дакле, позитивна вредност флукса описује ”проток” који ”истиче” из затворене површине, док негативна вредност описује ”проток” који ”утиче” у затворену површину. Гаусов закон каже да је овако добијени укупни флукс вектора јачине електричног поља кроз дату затворену површ једнака количнику укупне количине наелектрисања (који укључује и алгебарски знак, односно поларитет тог наелектрисања) у запремини обухваћеној том затвореном површи и константе ε_0.

Б. Гаусов закон за магнетско поље

Ова Максвелова једначина представља закон сличан претходном, али примењен за магнетско поље и гласи овако:

> *Укупан флукс вектора магнетске индукције* ***B*** *кроз неку (било коју, сваку) затворену површ* S *увек (у сваком тренутку времена) је једнак нули:*

15 Оставља се читаоцу да овај закључак изведе сам.

$$\Phi_S(\boldsymbol{B}) = 0$$

Вектор магнетске индукције $\boldsymbol{B}$ је једноставно векторска физичка величина која карактерише магнетско поље у свакој тачки тог поља, попут вектора јачине електричног поља за електрично поље.

Из овог закона следи, рецимо, да су линије магнетског поља увек затворене, односно никада немају свој почетак или крај. Заиста, ако би линије магнетског поља имале своје почетке у неком делу простора, онда би се тај део простора, колико год био мали, могао обухватити затвореном површи, тако да та површ ”пролази” кроз део простора где постоје линије поља (што значи да поље није нула, односно да постоји флукс) и део простора у коме нема линија поља (па је и флукс нула). Тада би укупан флукс био различит од нуле, што је супротно овом закону. Ово је различито од електричног поља, за које то не важи.

Одавде следи и да не постоје магнетски ”монополи”, односно ”честице” са само једним магнетским полом, као што постоје таква наелектрисања. Постоје увек само магнетски диполи, односно магнети са два пола, па колико год да су ти магнетски диполи ситни, у простору кога обухвата свака затворена површ, колико год да је она ”сићушна”, њихов укупни флукс јачине магнетског поља кроз ту површ је увек нула, јер је ”поништен флуксевима два супротна пола”.

Пошто се у овом тексту нећемо бавити магнетским пољем, ова једначина нам више неће бити од интереса.

В. Фарадејев закон електомагнетске индукције

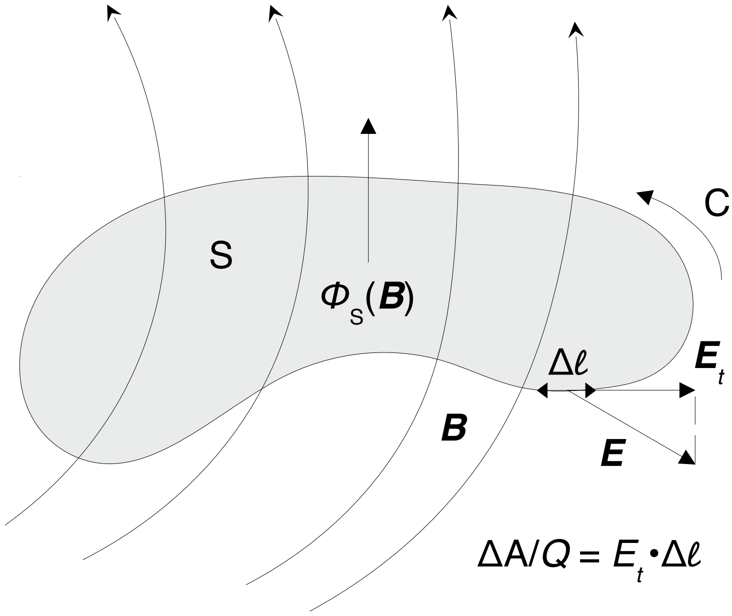
Ова Максвелова једначина представља Фарадејев закон о електромагнетској индукцији и гласи отприлике овако:

Укупан рад који би сила електричног поља јачине $\boldsymbol{E}$ *извршила над пробним тачкастим наелектрисањем* Q[16] *при једном обиласку неке (било које, сваке) затворене контуре* C, *овде означен са* $A_C(\boldsymbol{E},Q)$, *подељен тим наелектрисањем* Q, *једнак је негативној вредности брзине промене флукса вектора магнетске индукције* $\boldsymbol{B}$ *кроз површ* S *коју уоквирује (опасује) та контура:*[17]

$A_C(\boldsymbol{E},Q)/Q = -\dfrac{\Delta \Phi_S(\boldsymbol{B})}{\Delta t}$, $\Delta t \to 0$ (када временски интервал Δt тежи нули)

16 Увек се узима да је ово ”пробно” наелектрисање, на кога делује поље чије се карактеристике описују, јако (теоријски бесконачно) мало, и по количини и по димензијама, тако је да утицај тог наелектрисања на укупно поље занемарљиво. Заправо се сматра да су овде описани закони природна својства поља која постоје и без постојања ”пробног” наелектрисања на која поље делује, а која се испољавају деловањем поља на бесконачно мало (по количини) тачкасто (тј. бесконачно мало и по димензијама) наелектрисање, док се свеукупни ефекти у сложеном систему добијају суперпозицијом поља таквих тачкастих наелектрисања која испуњавају простор и њиховог укупног дејства на сва та наелектрисања.

17 Пажљивом читаоцу неће промаћи то да овде није дефинисано како изгледа површ коју опасује та затворена контура, јер таквих површи, које за своју ивицу имају дату контуру, има бесконачно много. Међутим, према претходној Максвеловој једначини – Гаусовом закону за магнетско поље, флуксеви вектора магнетске индукције поља кроз све њих су исти (пробајте то да докажете!), па је све једно која се површ изабере, за све њих важи исто.



Слика 6

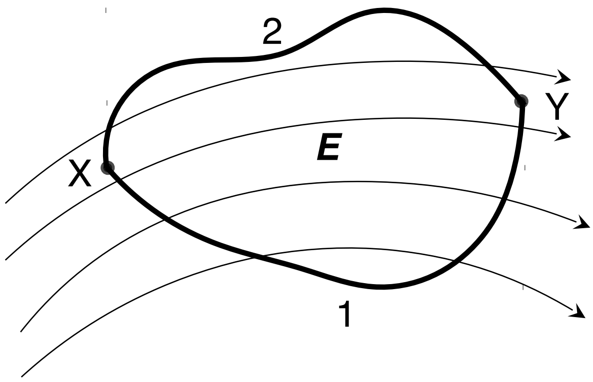
Посматрајмо неку површ S и контуру C која је обухвата (ивичи, опасује, слика 6). За рачунање флукса кроз ту површ и рада по затвореној контури која опасује ту површ договорно (конвенцијом) се узимају референтни смерови по правилу десне руке: ако се остали прсти десне руке (осим палца) усмере тако да ”обухватају” контуру у смеру који је узет као референтни за рачунање рада по контури, палац ће показивати референтни смер у односу на који треба рачунати флукс кроз површ, и обратно.[18]

У свим примерима касније у овом тексту неће постојати магнетско поље,[19] па ће и његова промена бити нула, тако да ће из овог закона следити, поједностављено речено:

Укупан рад који би сила електричног поља извршила по јединици наелектрисања при једном обиласку неке затворене контуре је увек нула:

$A_C(\boldsymbol{E},Q)/Q = 0$

Ово је заправо уопштен Други Кирхофов закон за електрична кола, као што ћемо видети нешто касније.



Слика 7

Посматрајмо сада две произвољне тачке X и Y у произвољном електричном пољу и

18 Треба приметити да би другачији договор, рецимо аналогним правилом леве руке, утицао само на алгебарске знаке.

19 Треба приметити да исто важи и за магнетско поље које је различито од нуле, али је непроменљиво у времену.

две произвољне контуре које их спајају, означимо их са 1 и 2 (слика 7). Претпоставимо да се јединично тачкасто наелектрисање премешта од тачке X, контуром 1 до тачке Y, а потом назад до тачке X али контуром 2. Тиме је оно обишло тачно један пун круг по затвореној контури X-1-Y-2-X. Нека је сила електричног поља на контури 1 извршила рад A_{X1Y}, а на контури 2 рад A_{Y2X}. Према овом закону је:

$$A_{X1Y} + A_{Y2X} = 0, \text{ односно}$$
$$A_{X1Y} = - A_{Y2X},$$

Како је, међутим, $A_{Y2X} = - A_{X2Y}$, јер рад исте силе у кретању по истој путањи, само у супротном смеру, само мења алгебарски знак, следи:

$$A_{X1Y} = A_{X2Y}.$$

Дакле, доказали смо својство *конзервативности електричног поља*:

> *Укупан рад који би сила електричног поља јачине* $\boldsymbol{E}$ *извршила над пробним тачкастим наелектрисањем Q при премештању тог наелектрисања од једне до друге тачке у простору, исти је за све путање које спајају те две тачке, односно не зависи од путање којим се наелектрисање премешта, већ само од положаја полазне и крајње тачке.*

Ово важно својство нам дозвољава да дефинишемо појам *потенцијала:*

> *За неку произвољно одређену референтну тачку* R, *која у многим случајевима може бити у бесконачности*[20], *потенцијал неке (било које, сваке) тачке* X *у простору представља рад који би сила електричног поља јачине* $\boldsymbol{E}$ *извршила над пробним тачкастим наелектрисањем Q при премештању тог наелектрисања од тачке* X *до тачке* R *(по било којој путањи), подељен тим наелектрисањем:*

$$V_R(X) =_{def} A_{XR}(\boldsymbol{E},Q)/Q$$

Дакле, за било коју референтну тачку R и неке две тачке X и Y, по дефиницији потенцијала важи:

$$V_R(X) = A_{XR}(\boldsymbol{E},Q)/Q,$$
$$V_R(Y) = A_{YR}(\boldsymbol{E},Q)/Q,$$

па је:

$$V_R(X) - V_R(Y) = A_{XR}(\boldsymbol{E},Q)/Q - A_{YR}(\boldsymbol{E},Q)/Q,$$

а како променом смера премештања између две тачке рад само мења знак:

$$- A_{YR}(\boldsymbol{E},Q)/Q = + A_{RY}(\boldsymbol{E},Q)/Q,$$

следи:

$$V_R(X) - V_R(Y) = A_{XR}(\boldsymbol{E},Q)/Q + A_{RY}(\boldsymbol{E},Q)/Q = A_{XRY}(\boldsymbol{E},Q)/Q,$$

што представља укупан рад при премештању наелектрисања од X до Y по некој путањи преко R. Као што смо показали, због конзервативности електричног поља када нема промене магнетског поља, овај рад је исти и за било коју другу путању од X до Y, која не мора обавезно да иде кроз тачку R. Дакле, разлика потенцијала између две тачке једнака је раду по јединици наелектрисања при премештању тог пробног тачкастог наелектрисаља између те две тачке (поново, по било којој путањи која их повезује):

$$V_R(X) - V_R(Y) = A_{XY}(\boldsymbol{E},Q)/Q,$$

што значи да разлика потенцијала између две тачке *не зависи од избора референтне тачке*, већ само од положаја те две тачке (и наравно, од електричног поља).

То нам дозвољава да уведемо појам *напона* између две тачке, као разлике

20 Нешто касније ће бити појашњено да референтна тачка може бити у бесконачности ако и само ако су наелектрисана тела коначних димензија, што је у пракси увек случај.

потенцијала те две тачке у односу на *било коју*, дакле произвољно изабрану референтну тачку потенцијала:

$U_{XY} = V_R(X) - V_R(Y)$

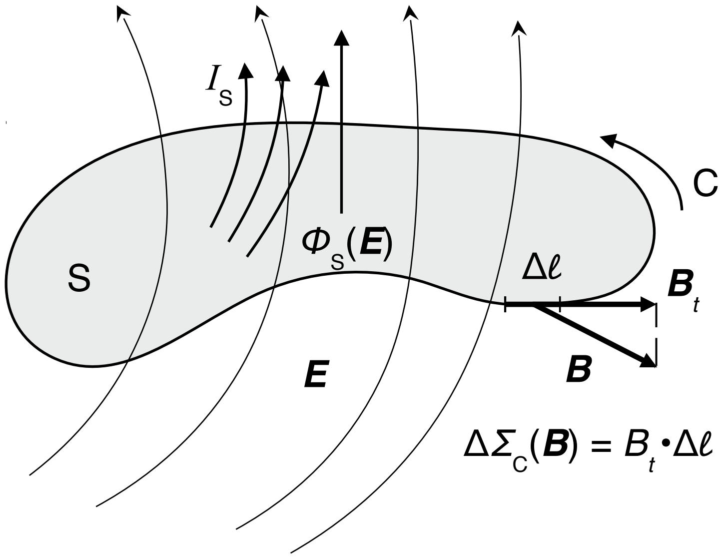
Према томе, и то треба нагласити још једном, за вредност потенцијала у некој тачки, дакле, јесте важна референтна тачка, док за вредност напона између две тачке, као разлике њихових потенцијала, реферетна тачка није битна јер је он исти за било коју референтну тачку потенцијала.

Г. Допуњен Амперов закон

Ова Максвелова једначина представља допуњен Амперов[21] закон и гласи овако:

*Циркулација Σ вектора магнетске индукције јачине **B** по некој (било којој, свакој) затвореној контури* C, *овде означена са* $\Sigma_C(\boldsymbol{B})$, *једнака је збиру укупне јачине струје I кроз површ* S *коју уоквирује (опасује) та контура, помножене физичком константом* μ_0, *и брзине промене флукса Φ вектора јачине електричног поља **E** кроз исту ту површ* S, *помноженом константама* μ_0 *и* ε_0*:*

$$\Sigma_C(\boldsymbol{B}) = \mu_0 I_S + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta \Phi_S(\boldsymbol{E})}{\Delta t}\text{ , } \Delta t \to 0 \text{ (када временски интервал } \Delta t \text{ тежи нули)}$$



Слика 8

Појам циркулације вектора смо заправо већ упознали код електричног поља – у претходној Максвеловој једначини коришћен је следећи појам: ”Укупан рад који би сила електричног поља јачине ***E*** извршила над пробним тачкастим наелектрисањем *Q* при једном обиласку неке (било које, сваке) затворене контуре C, подељен тим наелектрисањем *Q*”. Управо овакав рад који сила неког поља изврши по јединици оне величине, којој је та сила пропорционална, поред јачине тог поља, представља *циркулацију вектора тог поља*. Код електричног поља, наиме, сила која делује на тачкасто наелектрисање једнака је производу вектора јачине поља и наелектрисања:

$\boldsymbol{F} = Q\,\boldsymbol{E}$

Ово је једноставно релација која је постављена дефиницијом јачине електричног поља ($\boldsymbol{E} =_{\mathbf{def}} \boldsymbol{F}/Q$), па је не треба даље образлагати. Како је рад силе пропорционалан тој сили (и дужини пређеног пута), а сила пропорционална јачини електричног поља, са коефицијентом пропорционалнсти једнаким наелектрисању *Q*, када се тај рад подели тим коефицијентом *Q*,

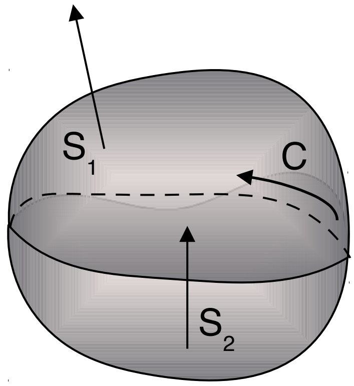
21 Допуна се састоји у додатном члану промене флукса електричног поља, коју је учинио Максвел у односу на оригинални Амперов закон, како би он био у сагласности са једначином континуитета.

добија се управо циркулација вектора јачине електричног поља ***E***.

Код магнетског поља не можемо користити исту формулацију са радом, јер једноставно не постоји ”јединично намагнетисање” или ”количина намагнетисања” једног пола (знака), односно магнетски монопол, као што постоји наелектрисање једног знака. Међутим, аналогна физичка величина – циркулација – се може дефинисати на сличан начин. Тако она на неки начин представља ”виртуелни” (замишљени) рад који би ”сила” мегнетског поља индукције ***B*** извршила над тачкастим ”намагнетисањем једног пола (знака)”, када би тако нешто постојало (а не постоји), при једном обиласку неке (било које, сваке) затворене контуре C, подељен тим ”намагнетисањем”. Може се рећи да је овај појам заправо фикција.

Код ове Максвелове једначине се (слика 8), на потпуно исти начин као и раније, за референтни смер јачине струје, исто као и за референтни смер флукса вектора јачине електричног поља, кроз исту површ S, у односу на референти смер рачунања циркулације вектора ***B*** по контури C, користи опет правило десне руке.

Посматрајмо сада (слика 9) једну контуру C која опасује две различите површи S_1 и S_2. Нека је референтни смер контуре као на слици, што одређује и референтне смерове површи по правилу десне руке, као на слици. Ове две површи S_1 и S_2 ограничавају један затворен простор, запремину V.



Слика 9

Према овој Максвеловој једначини, важи иста релација за обе површи S_1 и S_2 које деле заједничку ивичну контуру C:

$$\Sigma_C(\boldsymbol{B})=\mu_0 I_{S1}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}\ ,$$

$$\Sigma_C(\boldsymbol{B})=\mu_0 I_{S2}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_{S2}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}\ , \text{ за } \Delta t\to 0$$

Пошто је са леве стране иста величина, циркулација вектора ***B*** по истој контури C, у истом смеру, десне стране су такође једнаке:

$$\mu_0 I_{S1}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}=\mu_0 I_{S2}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_{S2}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}$$

Обрнимо сада референтни смер површи S_2, тако да он буде усмерен ка споља у односу на запремину V. Са S_2' означимо исту површ S_2, само са тако обрнутим референтним смером. Сада површи S_1 и S_2' чине једну затворену површ S са референтним смером свуда ка споља, по конвенцији, а која уоквирује запремину V. Интензитети јачине струје и флуксева вектора јачине електричног поља овом променом не мењају апсолутну вредност (интензитет), као што смо видели, већ само алгебарски знак:

$I_{S2} = - I_{S2'}$

$\Phi_{S2}(\boldsymbol{E}) = - \Phi_{S2'}(\boldsymbol{E})$

Одатле следи:

$$\mu_0(I_{S1}+I_{S2'})+\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}+\frac{\Delta\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}\right)=0\ ,$$

односно, после скраћивања са μ_0 (које је различито од 0):

$$(I_{S1}+I_{S2'})+\varepsilon_0\left(\frac{\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}+\frac{\Delta\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}\right)=0\ .$$

Можемо сада закључити следеће:

- израз (I_{S1} + $I_{S2'}$) представља *укупну јачину струје кроз затворену површ* S, при чему се као референтни смер узима смер ка споља:

  $I_{S1} + I_{S2'} = I_S$
- израз ($\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})/\Delta t$ + $\Delta\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E})/\Delta t$) представља *брзину промене укупног флукса вектора јачине електричног поља кроз затворену површ* S, при чему се као референтни смер узима смер ка споља; ево како:

$$\frac{\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}+\frac{\Delta\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}=\frac{\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})+\Delta\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E})}{\Delta t}\ =^{22}\ \frac{\Delta(\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})+\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E}))}{\Delta t}=\frac{\Delta\Phi_S(\boldsymbol{E})}{\Delta t}$$

Како је, према Максвеловој једначини за Гаусов закон:

$$\Phi_S(\boldsymbol{E})=\frac{Q_V}{\varepsilon_0}\ ,$$

следи да је промена флукса у бесконачно малом временском интервалу Δt једнака:

$$\Delta\Phi_S(\boldsymbol{E})=\frac{\Delta Q_V}{\varepsilon_0}\ ,$$

па је:

$$\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi_S(\boldsymbol{E})}{\Delta t}=\frac{\Delta Q_V}{\Delta t}$$

Заменом добијамо коначно:

$$I_S+\frac{\Delta Q_V}{\Delta t}=0\ \text{, односно}$$

$$I_S=-\frac{\Delta Q_V}{\Delta t}\ \text{, за } \Delta t\to 0.$$

Ово представља *уопштену једначину континуитета* или, другим речима, *закон о одржању наелектрисања*:

> *Укупна јачина струје (у референтном смеру свуда ка споља) кроз неку (било коју, сваку) затворену површину* S *једнака је супротној вредности брзине промене количине наелектрисања у запремини* V *коју ограничава та површ.*

Исказано другачије, наелектрисање не може у простору ”настајати ни из чега” нити ”нестајати никуда”, већ се његова количина може повећавати или смањивати у одређеним деловима простора, односно оно се може ”нагомилавати” или ”проређивати” у деловима простора, у зависности од јачине струје која улази, односно излази из тих делова простора. Ово је интиутивно и очекивано: заиста, ако јачину струје, како је уобичајено, схватимо као

22 Покушајте да сами закључите и математички прецизно докажете да је: ($\Delta\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})$ + $\Delta\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E})$) = $\Delta(\Phi_{S1}(\boldsymbol{E})$ + $\Phi_{S2'}(\boldsymbol{E}))$. Помоћ: сетите се шта је заправо $\Delta\Phi$ – промена величине Φ током временског интервала Δt, односно разлика вредности те величине на крају и на почетку тог временског интервала.

проток количине наелектрисања ΔQ_S кроз одређену површ S у бесконачно малом интервалу времена Δt:

$$I_S = \frac{\Delta Q_S}{\Delta t}, \text{ за } \Delta t \to 0,$$

онда следи:

$$\frac{\Delta Q_S}{\Delta t} = -\frac{\Delta Q_V}{\Delta t}, \text{ за } \Delta t \to 0,$$

односно:

$$\Delta Q_S = - \Delta Q_V$$

Дакле, ако кроз затворену површ S за произвољни временски интервал Δt ”изађе” количина наелектрисања ΔQ_S, таман за толико ће се смањити и количина наелектрисања Q_V која се налази у затвореном простору V који ограничава S. Другим речима, уколико кроз затворену површ ”улази” више струје него што кроз њу ”излази”, онда ће се наелектрисање у простору ограниченом том површи повећавати (”гомилати”) и супротно, уколико кроз затворену површ ”улази” мање струје него што из ње ”излази”, онда ће се наелектрисање у простору ограниченом том површи смањивати (”празнити”).

И коначно, јасно је да су укупне јачине струје која ”улази” и оне која ”излази” из неке затворене површи једнаке *ако и само ако* у простору ограниченом том површи нема промене количине наелектрисања. Ово је, као што се види, исказ који представља *једначину континуитета у посебном случају укупне струје нула*, или, кад је примењена на електрична кола, Друго Кирхофово правило, али још једном треба нагласити услов под којим важи: ако и само ако у простору који ограничава посматрана затворена површ *нема промене количине наелектрисања*.

Ако је пак овај услов задовољен, ова Максвелова једначина постаје формулација познатог Амперовог закона:

$$\Sigma_C(\boldsymbol{B}) = \mu_0 I_S$$

Овим излагањем показали смо како се неки други познати физички закони могу извести из Максвелових једначина, чиме смо разјаснили претходну причу о универзалности ових једначина, односно о чињеници да је Максвел све те законе уопштио и учинио само специјалним случајевима своје теорије. У историји су се ствари заправо дешавале обрнутим редоследом од овог нашег извођења: практично сви ови други закони били су познати од раније, као закључци експеримената, док је Максвел формулисао систем релација који представља њихово обједињење.

Као што се види, Максвелове једначине чврсто повезују физичке величине електричног и магнетског поља у јединствену целину, зависностима, односно релацијама које између њих увек важе. Зато се у физици електрицитет и магнетизам, односно електрично и магнетско поље сматрају јединственим феноменом који се посматра као нераскидива целина, *електромагнетизам* односно *електромагнетско поље*. Величине електричног и магнетског поља су тако само различити аспекти исте ствари, односно физичке величине које описују исту појаву, ”две стране истог новчића”. Заиста, из Максвелових једначина може се извести следећи низ закључака:

- ако (и само ако) у неком делу простора има слободних наелектрисања[23] и у њему постоји компонента *електричног поља* у правцу у коме се та слободна наелектрисања могу кретати, у том делу простора ће бити протока наелектрисања; по дефиницији,

23 По дефиницији, слободно наелектрисање је наелектрисање које се под дејством електричног поља може слободно кретати. У природи, то су нпр. електрони у проводним материјалима или јони у електролитима.

проток наелектрисања представља електричну струју;
- ако у неком делу простора постоји струја, постојаће и *магнетско поље*, према Амперовом закону (овде четвртој Максвеловој једначини);
- ако у неком делу простора постоји променљиво магнетско поље, према Фарадејевом закону (овде трећој Максвеловој једначини), постојаће и ненулта циркулација јачине електричног поља, односно *електормоторна сила* дуж затворене контуре;
- и тако у круг, јер ако постоји електромоторна сила дуж затворене контуре са слободним наелектрисањима, постојаће и струја кроз ту контуру; ово је заправо *принцип електромагнетске индукције*.
- посматрајмо неко тачкасто наелектрисање које се налази у магнетском пољу сталног магнета, при чему се наелектрисање и магнет крећу један у односу на други; ако вежемо посматрача (референтни систем) за наелектрисање, посматрач ”види” непокретно наелектрисање и покретан магнет; тада је магнетско поље променљиво у времену и простору тог референтног система, што проузрокује електромоторну силу према Фарадејевом закону, па на наелектрисање делује електрична компонента Лоренцове силе (сила електричног поља); ако пак вежемо посматрача за магнет, посматрач ”види” магнетско поње непроменљиво у простору и времену, па електромоторне силе нема, али и покретно наелектрисање, на које онда делује магнетска компонента Лоренцове силе (магнетско поље); заправо, различити посматрачи, у различитим референтним системима, ”виде” различите компоненте (електричну и магнетску) *истог* поља, при чему су те компоненте ”спрегнуте” у јединствену целину Максвеловим једначинама на исти начин у сваком референтном систему.

Апстракција и идеализовани модели

Иако представљају фундаменталне законе којиописују произвољно елекотрмагнетско поље, Максвелове једначине су сложене и врло често, за иоле сложеније случајеве какви су у стварности једино и присутни, не могу се решити математички егзактно,[24] па у таквом облику не би биле од велике користи. Да би се у пракси изборили са оваквим ситуацијама превелике комплексности, људи примењују технику *апстракције* или *идеализације*.[25] Апстракција је ментални (мисаони) поступак којим се појаве или ствари у природи поједностављују, тако што им се занемарују неке њихове карактеристике, како би се одређени проблем учинио решивим. Наравно, оваква идеализација, односно приближна представа (апроксимација) реалних ствари и појава уноси извесну грешку у резултате и закључке, па се зато увек пази да поступци занемаривања (апстракције) уносе грешку која се може сматрати прихватљивом, односно од довољно малог утицаја на тачност резултата, да би се цео поступак сматрао валидним. Другим речима, приликом идеализације, тј. занемаривања детаља или појава, треба водити рачуна да тај поступак има основа у реалности. Без оваквих

24 Максвелове једначине нису неког од облика које евентуално познајете, као што су линеарне или квадратне једначине, већ су оне *диференцијалне*, па често немају експлицитно решење на какво сте навикли код наведених једначина. Под експлицитним решењем подразумевамо математичке изразе, односно формуле за општи облик решења. Због тога Максвелове једначине представљају *ограничења* која природа поставља, односно релације између посматраних физичких величина које увек важе и које су обухваћене овим једначинама, али из којих не можемо увек (заправо често не можемо) израчунати конкретне, бројне вредности физичких величина техникама класичне математичке анализе. Овакве једначине и проблеми се данас ипак успешно решавају техникама нумеричке анализе, односно нумеричким методама, које подразумевају да се за конкретан проблем и конкретне бројне вредности параметара једначина могу израчунати конкретне, бројне вредности њихових решења ”уситњавањем” проблема и понављањем великог броја рачунских операција на тако ”уситњеним” елементима, по правилу уз помоћ рачунара.

25 Као што смо већ објаснили, и сами Максвелови закони почивају на одређеним апстракцијама, односно идеализацијама, као што су непрекидно (континуално) наелектрисање, што заправо не важи у природи.

поступака апстракције, односно идеализације, многи делови науке били би практично неупотребљиви, јер се њени основни закони не би могли искористити за решења практичних проблема. Зато је апстракција једно од основних људских оружја у борби против комплексности проблема.

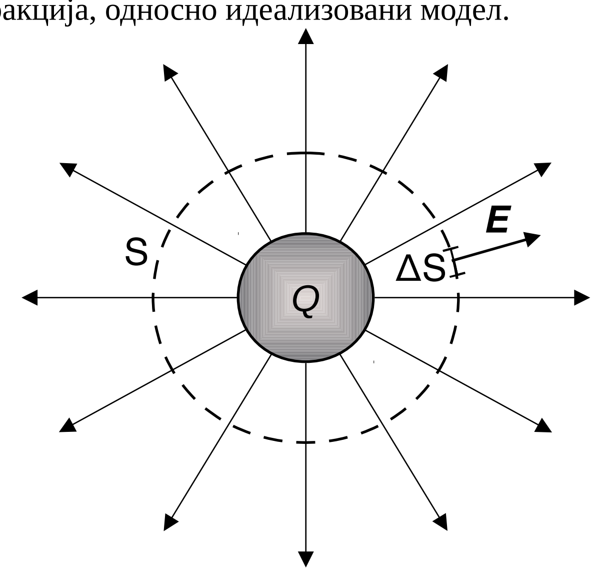
Апстракцијом се назива и резултат једног таквог менталног поступка, односно појам (концепт) који је добијен (измишљен) идеализацијом реалних појава или ствари, односно занемаривањем неких карактеристика уз прихватљив губитак тачности. На пример, материјална тачка је један од најосновнијих апстрактних појмова (апстракција) у физици, али ни појам физичког тела није ништа мање апстрактан!

Увођењем апстракција, односно поједностављивањем и занемаривањем споредних и мање утицајних појава на неки систем који се посматра добија се његов *модел* – идеализована, апстрактна и поједностављена представа тог реалног система. Модел нам тако омогућава да решимо постављени проблем и предвидимо, односно прорачунамо непознате физичке величине на основу познатих са довољном прецизношћу.

Као пример примене апстракције и идеализованих модела у електромагнетици, приказаћемо неколико случајева примене Максвелових закона са циљем прорачуна јачине електричног поља. Читаоцу се оставља да, по узору на ове примере, сам изведе неке друге формуле познате из наставе физике, рецимо Био-Саваров закон јачине магнетске индукције око бесконачног правог проводника кроз који протиче струја јачине I.

Јачина електричног поља наелектрисане идеалне сфере

Посматрајмо идеалну сферу (лопту) која је хомогено (равномерно) наелектрисана количином наелектрисања Q, а која се налази у вакууму (слика 10). Идеална сфера (лопта), наравно, не постоји у природи, као, додуше, ни идеални вакуум, па су ово само полазне апстракције које добро апроксимирају неке ситуације. Сфера је, као и све остало у математици, само апстракција, односно идеализовани модел.



Слика 10

Претпостављамо даље да у простору нема променљивог магнетског поља нити електричног поља других наелектрисања, што је, наравно, поново идеализација која не постоји у природи. Због тога се наелектрисање сфере неће кретати, односно његов распоред се неће мењати, што га чини *електростатичким*.

Први закључак који можемо направити јесте да је електрично поље око ове сфере апсолутно централно симетрично у свим правцима, баш као и ова сфера. Заиста, за идеалну сферу немамо ниједан разлог да било коју њену тачку посматрамо другачије него неку њену другу тачку, односно да ”препознамо” како је сфера ”окренута”, јер су све њене тачке по дефиницији сфере "исте". Пошто је и наелектрисање на њој такође равномерно распоређено, односно апсолутно симетрично у односу на центар сфере, и при томе непокретно, можемо закључити да су линије електричног поља идеалне сфере праве које пролазе кроз центар сфере, односно да су вектори јачине поља нормални на тангенте концентричних сфера описаних око посматране сфере, као и да су интензитети тог вектора у свим тачкама једнако удаљеним од центра сфере међусобно једнаки.[26] Како је јачина електричног поља, као вектор, по дефиницији тог појма у електромагнетици, количник силе којом поље делује на неко наелектрисање и тог наелектрисања ($\boldsymbol{E} =_{\mathrm{def}} \boldsymbol{F}/Q$), исто важи и за векторе силе. Ово је, као што се може видети, чисто логички закључак, али је он разуман и, уосталом, потврђен стварним појавама у природи.[27]

Ако је наелектрисање Q позитивно, договорно се узима да је смер вектора јачине електричног поља усмерен од сфере ка бесконачности, а ако је негативно, онда је усмерен ка центру сфере. Исти смер има и сила којом у датој тачки у пољу сфере то поље делује на позитивно тачкасто наелектрисање.[28]

Према Максвеловој једначини – Гаусовом закону, укупан флукс вектора јачине електричног поља кроз неку затворену површ једнак је количнику укупног наелектрисања које се налази у простору обухваћеном том површи и константе ε_0. Код електричног поља идеалне сфере који има особине које смо описали, узмимо за затворену површ такође сферу са центром у центру посматране сфере и произвољним полупречником r већим од полупречника дате сфере. Вектор јачине електричног поља увек је нормалан на тангентну раван те сфере у свакој тачки, односно на сићушну елементарну површ ΔS у тој тачки. Зато је флукс вектора јачине поља кроз ову описану сферу просто производ интензитета вектора јачине поља $\boldsymbol{E}$ на растојању r (за кога смо закључили да је свуда исти на том растојању) и величине те површине, односно $4\pi r^2 E$. Како је количина наелектрисања обухваћена овом површи једнака Q, следи да је интензитет вектора јачине електричног поља идеалне сфере на растојању r једнак:

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Као што смо већ навели, из дефиниције самог појма вектора јачине електричног поља следи да је интензитет силе којом ово поље делује на пробно тачкасто наелектрисање Q_1 једнак производу овог интензитета јачине електричног поља и наелектрисања Q_1:

$$F=E\,Q_1=\frac{Q\,Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Као што се види, ово представља познати Кулонов закон, који смо овог пута извели из Максвелове једначине – Гаусовог закона, па тако поново видимо како Кулонов закон представља само специјални случај једне од Максвелових једначина, примењен на тачкасто наелектрисање у пољу другог тачкастог наелектрисања или сфере. Кулон је, међутим, овај закон пронашао емпиријски, на основу експеримената. Супротни след се такође може

26 Ово се прецизније може закључити на следећи начин. Када линије електричног поља не би биле праве и строго радијалне, односно нормалне на тангентне површи сваке концентричне сфере, постојала би тангенцијална компонента вектора јачине електричног поља у тачкама на некој концентричној сфери. Због централне симетрије наелектрисања, такве компоненте би биле потпуно централно симетричне, па би из тога следило да постоји затворена контура која иде по површи неке такве сфере, а по којој би циркулација вектора јачине електричног поља била различита од нуле, што није могуће, по претпоставци непостојања променљивог магнетског поља.

27 Ако је наелектрисање распоређено само по површи свере, а не и по њеној запремини, докажите да је јачина електричног поља унутар сфере нула.

28 Треба приметити да је појам *тачкастог наелектрисања* такође апстракција, попут материјалне тачке у механици, и да се може посматрати као случај сфере, али и тела било ког облика јако малих димензија, док се поље тачкастог наелектрисања може посматрати као случај поља на удаљењу од тог тела које је много пута веће од његовог радијуса.

извести: из Кулоновог закона за силу електричног поља тачкастог наелектрисања, на основу дефиниције вектора јачине електричног поља и правила суперпозиције силе, па тиме и јачине поља, Гаусов закон се може извести поделом наелектрисаног тела произвољног облика и распореда наелектрисања на бесконачно много бесконачно сићушних, тачкастих наелектрисања и сабирањем свих сила које потичу од њихових поља. Управо то је и урадио Гаус, формулишући свој закон, а Максвел формулисао као један од основних закона који свеобухватно описују сва електромагнетска поља.

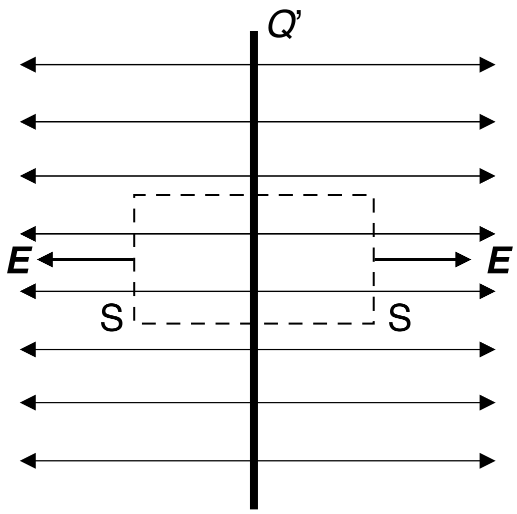
Јачина електричног поља равномерно наелектрисане равни

Сличним поступком извешћемо израз за јачину поља хомогено (равномерно) наелектрисане бесконачне равни. Бесконачна наелектрисана раван је поново апстрактан, математички појам, јер такав облик не постоји у природи, али овај модел добро апроксимира ситуације у којима посматрамо електрично поље на веома малом удаљењу од велике и танке проводне наелектрисане плоче, када су крајеви те плоче довољно далеко од посматраног дела поља, да се њихови утицаји (тзв. *ивични ефекти*) могу занемарити, а њена дебљина много мања од њене величине.

Пошто је наелектрисана раван бесконачна и равномерно наелектрисана, не можемо дефинисати њено укупно наелектрисање, јер је оно такође бесконачно, него *површинску густину* наелектрисања Q', што представља количину наелектрисања по јединици површине. Тада је наелектрисање на неком делу те равни коначне површине S једнако:

$$Q_S = Q'S$$

Сличним резоновањем као и код сфере, на основу симетрије простора у односу на раван и бесконачности те равни, закључујемо да су линије електричног поља нормалне на раван и међусобно паралелне. Ако је раван наелектрисана позитивним наелектрисањем, вектори јачине поља су усмерени од равни ка бесконачности са обе стране равни, а супротно за негативно наелектрисање равни.



Слика 11

Применимо сада исти Гаусов закон на ваљак чије су основице са различитих страна равни, паралелне су са њом и на једнаком растојању од ње, а изводнице нормалне на раван (слика 11). Количина наелектраисања "обухваћена" овом затвореном површином једнака је $Q_S = Q'S$, где је S површина основице ваљка. Флукс вектора јачине поља можемо одредити овако. Кроз омотач ваљка тај флукс је нула, јер је вектор јачине електричног поља паралелан са изводницама, па не "продире" кроз омотач ваљка, па самим тим нема ни "проток". [29] Пошто

29 Баш као што су струјнице тока течности кроз цев паралелне зидовима цеви, јер кроз зидове цеви нема протока.

је вектор јачине поља нормалан на обе основице ваљка, његов флукс кроз ове две основице износи $2ES$. По Гаусовом закону је тако:

$$2ES=\frac{Q'S}{\varepsilon_0}$$

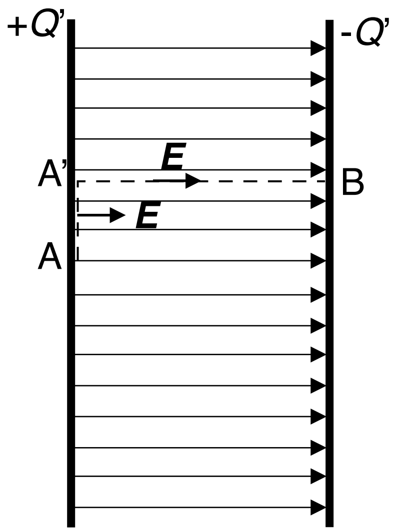
односно:

$$E=\frac{Q'}{2\varepsilon_0}$$

Следи да јачина поља не зависи од растојања од равни, односно да је то поље до бесконачности подједнаке јачине. Ово је, наравно, последица претпоставке о бесконачности равни што, као што смо рекли, у пракси никада није случај, па тако ни поље никада није ”до бесконачности подједнако јако”. За коначне плоче је поље, на веома великом удаљењу на коме се геометрија плоче више ”не разазнаје”, врло слично пољу тачкастог наелектрисања, па слаби са удаљењем (и то сразмерно квадрату удаљења), пошто се са великог удаљења коначна плоча ”види” као тачкасто наелектрисање.

Јачина и напон електричног поља две паралелне наелектрисане равни

Посматрајмо најзад случај две паралелне равни на међусобном растојању d које су хомогено наелектрисане наелектрисањима супротног знака, али исте апсолутне вредности површинске густине наелектрисања $Q'>0$ (слика 12). Ово је поново идеализован модел који описује две блиске плоче коначних димензија које су на удаљењу много мањем од своје величине. То је управо случај код неких склопова, попут плочастих кондензатора о којима ће касније бити речи.



Слика 12

Како су плоче равномерно наелектрисане наелектрисањима супротног знака, правци и смерови вектора јачине њихових поља су исти у простору између плоча, а супротни изван њих. Због постулата о суперпозицији вектора јачине поља (који следи из постулата о суперпозицији силе и дефиницији јачине електричног поља), резултантни вектор јачине поља између плоча биће истог смера, а интензитета једнаког збиру интензитета појединачних вектора, чије смо вредности малопре извели. Према томе, интензитет вектора јачине поља између ове две равни је:

$$E=\frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

па такође не зависи од растојања између равни. Интересантно је да је јачина поља са спољашње стране тих равни нула. Ово, наравно, опет у стварности није случај из истог разлога као и малопре: плоче никада нису бесконачне.

Одредимо сада и напон између две произвољне тачке A и B које се налазе на различитим плочама, при чему је тачка A на плочи са позитивним наелектрисањем. Као што смо већ показали, овај напон не зависи од избора референтне тачке, али ни од путање између две тачке по којој се рачуна, па ћемо одабрати путању која у једном сегменту иде по плочи од тачке A до тачке A', при чему је тачка A' тачно наспрам тачке B (права A'B је нормална на плоче), а у другом сегменту од тачке A' до тачке B по правцу нормалном на плоче. У деловима путање AA' (као и било које путање по некој равни која је паралелна са плочама), вектор јачине електричног поља је нормалан на ту путању, па је рад силе електричног поља нула. На делу путање A'B вектор јачине електричног поља је истог правца као и путања, али и истог смера и интензитета по целој путањи, као што смо показали, па је рад силе поља на пробно тачкасто наелектрисање Q_1 једнак производу интензитета вектора јачине поља и дужине те путање. Одатле следи:

$$U_{AB} = A_{AB} / Q_1 = A_{A'B} / Q_1 = E\, d = \frac{Q'\,d}{\varepsilon_0}$$

Посматрајмо сада случај *коначних* паралелних плоча на истом растојању d, једнаких димензија и површина S, и са истим апсолутним вредностима укупног наелектрисања плоча, али супротног знака ($+Q$ и $-Q$). Овакав систем заправо чини склоп који називамо *плочасти кондензатор*. Тада се површинска густина наелектрисања плоче може приближно узети као:

$$Q' = \frac{Q}{S}$$

Заменом у претходни израз за напон добијамо:

$$U_{AB} = \frac{Q\,d}{\varepsilon_0 S}$$

Закључујемо да је овај напон пропорционалан количини наелектрисања на плочама Q, са коефицијентом пропорционалности C који зовемо *капацитивност кондензатора*[30]:

$$\frac{Q}{U_{AB}} = C = \text{const.}$$

где је

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Добили смо, дакле, израз за (приближну) капацитивност плочастог кондензатора између чијих плоча се налази вакуум. Међутим, мора се јасно нагласити да је овакав закључак ипак ретултат апроксимације, односно приближна формула, јер се заснива на великом броју претпоставки и идеализација, и да важи само под тим условима:

- да се електрично поље између плоча може сматрати приближним пољу равномерно наелектрисаних бесконачних паралелних плоча (равни); ово, наравно не важи у природи, али се може сматрати добром апроксимацијом ако и само ако су плоче јако близу у односу на своју величину, односно да је њихово растојање много мање од њихове величине, тако да се могу занемарити ивични ефекти;[31]

30 Термин *капацитивност* је донекле исправнији од термина *капацитет*, јер "капацитет" упућује на ограничење у количини наелектрисања које неко тело може да "прими", на пример као запремина течности која може да стане у неки суд ("капацитет суда"), док термин "капацитивност" означава *својство*, у овом случају описано коефицијентом пропорционалности једне величине (напона) од друге величине (наелектрисања). По аналогији са судом и течношћу, капацитивност би одговарала рецимо односу запремине течности у суду којој је пропорционалан притисак те течности на суд, под условом да је зависност притиска од запремине течности у суду *линеарна*, што је наравно случај само код суда са константним попречним пресеком по целој висини. Ова иста претпоставка о линеарности мора бити присутна и код електричног поља (пропорционалност јачине електричног поља у односу на наелектрисање), али се она усваја као постулат за вакуум и важи за многе средине, али не важи за све материјале који могу испуњавати простор, рецимо између плоча. Даља дискусија превазилази опсег овог текста.

31 Треба приметити да се израз за напон, па тиме и капацитивност добија на моделу код ког у простору ван

- да су плоче наелектрисане наелектрисањима исте апсолутне вредности, а различитог знака; касније ће бити више говора о овој претпоставци и њеној заснованости у пракси;
- да је између плоча вакуум, или бар линеарна непроводна средина, што јесте најчешће случај у пракси, јер се склопови тако конструишу, али не мора увек бити.

Као што се види, приликом употребе неких закључака и израза, треба имати у виду претпоставке под којима су донети и под којима важе.

Теорија електричних кола

Једна дисциплина (подобласт) електротехнике која се заснива управо на поступку идеализације (апстракције) јесте *теорија електричних кола.* Ова дисциплина бави се електричним колима, тачније њиховим моделима – идеализованим (апстрактним) представама реалних електричних склопова који постоје у стварном свету. Електрична кола се састоје од различитих *елемената* (нпр. извора, отпорника, кондензатора) који су повезани проводницима на одређени начин.

Теорија електричних кола тако уводи бројне претпоставке које су чисте апстракције и заправо су понекад и у супротности са основним законима електромагнетике. Једна таква полазна претпоставка јесте да је јачина електричног поља ван елемената (нпр. ван кондензатора или извора) увек нула, односно да никаквог поља ван елемената нема, већ да је поље сконцентрисано само у тим елементима. Ово једноставно физички не стоји, јер је у супротности са Максвеловим законима. Заиста, већ смо показали да је, у случају непостојања променљивог магнетског поља, последица Максвелових закона да напон између произвољне две тачке A и B не зависи од путање по којој се тај напон рачуна. Ако би ова наведена претпоставка из теорије кола важила, онда би постојала путања између две тачке на крајевима датог елемента која иде кроз дати елемент, у коме постоји поље, па напон између њих може бити различит од нуле, али и нека друга путања која иде потпуно ван тог елемента, ”око њега”, где поља нема, па је по њој напон такође нула. Ово је очигледна контрадикција са основним законом.

Међутим, ова претпоставка се уводи јер би без ње било тешко, односно немогуће решавати једначине примењене на коло. Она је пак прихватљива, јер се заснива на чињеници да су у реалности јачине поља ван елемената, посебно на већим удаљењима од њих, заиста значајно, значајно мање него у њима, па је утицај поља једног елемента на физичке величине у другом елементу занемарљив (иако постоји)[32]. Из овога следи да је дата полазна претпоставка теорије електричних кола заправо еквивалентна претпоставци да између различитих елемената у колу нема никакве посредне спреге, односно међусобног утицаја, осим преко веза којим су они везани.

У реалним случајевима када ова претпоставка не важи, тј. када је утицај једног елемента на други, рецимо због променљивог електромагнетског поља и постојања индукције незанемарљив, онда се ти елементи моделују другачије: додавањем нових, поново апстракних елемената у модел кола који се описују једначинама које добро апроксимирају тај међусобни утицај, а које, наравно, опет следе из Максвелових једначина. Један такав пример јесте реални електрични вод, али о томе овде више нећемо причати. Када ни то није могуће, теорија кола просто није применљива, већ се дати проблем мора решавати општијим

плоча (бесконачних равни) нема електричног поља. Ако су плоче коначне, ова претпоставка просто није у сагласности са Максвеловим законима, односно са законом о конзервативности електричног поља који из њих следи, јер би по путањи која спаја плоче, али иде у потпуности изван њих, израчунати напон био нула, а по путањи која иде између плоча различит од нуле. Оставља се читаоцу да сам закључи зашто ово није случај код бесконачних наелектрисаних плоча (равни).

32 Другим речима, ово важи ако су елементи удаљени довољно један од другог да су ти утицаји занемарљиви. Ово може да значи, рецимо (али не обавезно), да су њихова међусобна удаљења значајно већа од њихових димензија.

методама електромагнетике.

Друга полазна претпоставка коју теорија кола подразумева јесте да ни на једном идеализованом елементу нема ”гомилања” или ”разређивања” наелектрисања. Прецизније речено, ово значи да за сваку површ која уоквирује (обмотава) неки елемент (и само њега) важи једначина континуитета, тако да је укупна количина наелектрисања на њему увек иста (обично се узима да је нула). Као што смо већ показали, ово је еквивалентно тврдњи да је у сваком тренутку укупна јачина струје која ”улази” у елемент иста као и укупна јачина струје која из њега ”излази”, у сваком тренутку. За неке елементе, попут отпорника или проводника, ово се интуитивно можда може и прихватити, али за неке друге елементе, попут кондензатора, оправданост ове претпоставке није сасвим интуитивна. Исто као и малопре, ако за неки реални склоп не важи ова претпоставка, онда се он моделује додатним идеалним елементима, тачније идеалним кондензаторима. О овоме ће касније бити више речи и овај постулат биће прецизније образложен.

Прва идеализација елемента јесте свакако проводник. У теорији кола, проводник је једнодимензиони елемент са два краја између којих може протицати струја, али на чијим крајевима нема разлике потенцијала (напон између крајева је увек нула). Овде, наравно, имамо две идеализације. Прва је да је проводник једнодимензиони елемент, односно да нема дебљину (дебљина му је ”бесконачно мала”), што је прихватљива апроксимација за све реалне проводнике чија је једна димензија, дужина, много већа од осталих (ширина). Друга идеализација јесте да је разлика потенцијала на крајевима проводника нула. Иако у реалности то никада није случај, ова апроксимација реалног проводника је исправна када је та разлика јако мала, односно много мања од разлика потенцијала на другим деловима кола, без обзира на струју која кроз проводник протиче. Ако то у реалности није случај, онда ћемо реални проводник моделовати другим идеалним (апстрактним) елементом који ово његово својство боље апроксимира – отпорником.

Пошто, дакле, претпостављамо да између елеманата у колу нема међусобног утицаја осим преко проводника којим су везани, као и да ван елемената нема електричног (али ни магнетског) поља, вредности физичких величина[33] елемената кола биће исте без обзира на геометријски положај елемената и проводника који их повезују у простору. Зато је за електрична кола, бар у теорији електричних кола, важна само њихова *топологија*, односно начин повезаности елемената, а не и *геометрија*, односно њихов распоред у простору и димензије тог распореда. И опет је ово апроксимација која је изведена описаним поступком закључивања и која у општем случају не важи у природи, али која помаже да решимо проблеме електричних кола са задовољавајућом тачношћу; када ова апроксимација није добра, једноставно не можемо применити теорију кола и правила њеног закључивања, јер ће дати потпуно погрешне резултате, већ морамо прибећи фундаменталнијим принципима електромагнетике који не уводе овакве апстракције и помоћу њих решити проблем.

Ми ћемо се даље бавити искључиво теоријом кола, јер је то тема овог чланка, па претпостављамо да све ове апроксимације важе као полазне претпоставке, односно постулати.

Модели идеалних елемената у теорији кола

Следећи овај начин размишљања и уведене претпоставке, теорија кола *дефинише*, односно уводи читав низ апстрактних модела идеализованих елемената кола. За сваки од тих модела дефинише се скуп математичких релација које повезују одређене физичке величине карактеристичне за ту врсту елемента, а које, као што је наведено, представљају

33 Овде се мисли искључиво на физичке величине од интереса, односно оне којима се бави електромагнетика и електротехника. Наравно, основна претпоставка јесте да ове величине зависе само једне од других, а не од неких других физичких појава и величина (нпр. гравитације и масе), што је опет једна од ствари која следи из Максвелових закона који повезују само одређене физичке величине (међу њима је и време).

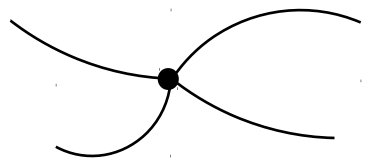
поједностављене, апроксимативне једначине које следе из Максвелових једначина уз низ занемаривања. Када се анализира електрично коло састављено од оваквих, идеализованих модела елемената оваквом теоријом, поступак постаје *формалан*, што значи да се своди искључиво на постављање низа релација које по дефиницији важе за елементе у колу, као и примену два основна закона, *Кирхофових правила*, који су, као што је већ показано, опет изведени из Максвелових једначина. Даље решавање кола је у искључивој ”надлежности” математике која треба да пронађе вредности тражених величина које задовољавају све постављене релације. Нагласићемо још једном, а касније ће бити јасније и зашто, да *ништа друго*, никакав други закључак који не следи из ових релација (по правилима логике) није коректан. Ако се, којим случајем, добије скуп релација које су контрадикторне, односно за које не постоји решење, онда коло није добро дефинисано, што у теорији значи да је просто контрадикторно, а у пракси по правилу значи да ће у таквом случају доћи до неке драматичне и често нежељене последице (рецимо, кратак спој са веома великом, теоријски бесконачном јачином струје, која ће у реалности узроковати прегоревање елемената).

Ево основног скупа елемената који се дефинишу у теорији електричних кола,[34] а који се изучавају и у курсевима физике у основним и средњим школама, као и релација које се за њих узимају као *постулати*, односно претпоставке (настале идеализацијом) које увек важе (и једино оне увек важе) без потребе за посебним доказивањем, бар у теорији кола. У датом тексту ћемо ипак образложити заснованост тих постулата на општим законима електромагнетике, односно Максвеловим законима, као и услове под којима те претпоставке важе.

1. Чвор

Чвор (слика 13) спаја два или више прикључака елемената кола. За њега важи следеће:

Потенцијали свих прикључака елемената који су везани у исти чвор су исти.



Слика 13

Овај постулат је тривијалан и не треба га додатно образлагати. Пошто је овај постулат заправо уграђен у саму примену Другог Кирхофовог правила, јер се, наиласком на чвор при обиласку затворене контуре, сматра да се потенцијал не мења, већ у укупан збир напона по контури узимају даље напони само на елементима на које се редом наилази, чвор заправо нећемо ни сматрати неким посебним ”елементом”.

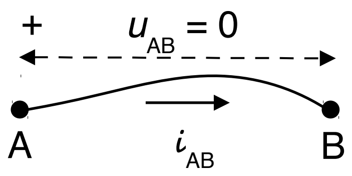
2. Проводник

Као што је већ речено, идеални *проводник* је једнодимензиони елемент са два прикључка који повезује два чвора (слика 14), и за који важи следеће, по дефиницији:

Напон између прикључака проводника је увек 0:

$u(t) = 0$

34 У овом тексту ограничићемо се на елементе са два прикључка, односно једним паром прикључака, који се једино и појављују у градиву физике за основне и средње школе. Теорија кола уводи и сложеније елементе, са два или више парова прикључака, попут трансформатора, жиратора и других, који моделују сложеније спреге између реалних склопова. О њима овде нећемо говорити.



Слика 14

Под ”увек” се овде мисли у сваком тренутку времена, а у дефиницијама користимо сада општији облик физичких величина, овде напона, као функције времена *t* (али не више и простора, односно геометрије као што је то случај у општој електромагнетици). Зато за означавање ових величина користимо сада мала слова. Треба приметити да ова релација не ограничава јачину струје кроз проводник – она може бити произвољна (укључујући и нулу).

Дакле, у решавању кола, сваке две таке које су повезане проводником су увек и без изузетка на истом потенцијалу, без обзира на све друге величине, односно на јачину струје кроз проводник. Образложење оправданости ове идеализације је већ раније дато.

Као што је малопре речено, у случају да неке друге релације показују да би између крајева проводника морао бити напон који је различит од 0, коло је теоријски контрадикторно и нема решења, док у пракси то значи да ће тај проводник, који ипак има коначну (иако малу) отпорност провести веома велику (али коначну) струју која ће довести до разарања (топљења) његовог материјала, односно да ће проводник прегорети (или ће прегорети неки други елемент у колу који не може да издржи толику јачину струје). Овакав случај се у жаргону назива *кратак спој*.[35]

3. Прекидач

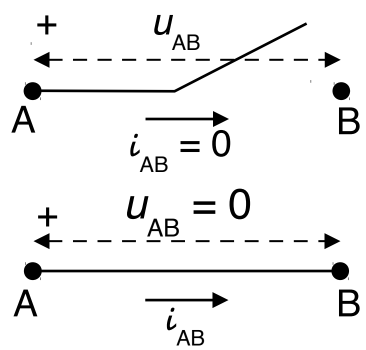
Прекидач је елемент који има два стања (слика 15), *отворен* (или *искључен*) и *затворен* (или *укључен*), за које важи следеће, по дефиницији:

Стање ”отворен”: Јачина струје кроз прикључке отвореног прекидача је увек 0:

$i(t) = 0$

Стање ”затворен”: Напон између прикључака затвореног прекидача је увек 0:

$u(t) = 0$



Слика 15

Дакле, између прикључака отвореног прекидача може бити било који напон (одређен остатком кола), а кроз затворен прекидач може протицати струја произвољне јачине

35 Понекад је овакво понашање чак и пожељно, односно намерно се користи за одређену намену. Пример су раније коришћени осигурачи електричних инсталација, на пример у домаћинству, који управо раде на принципу топљења и прекида струјног кола уколико дође до ”кратког споја” због неисправног директног контакта два проводника велике разлике потенцијала.

(одређене остатком кола).

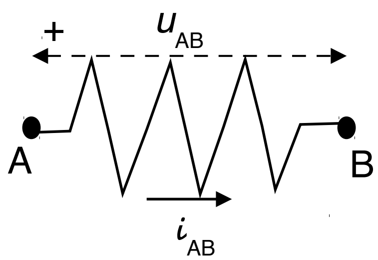
Ове дефиниције су крајње интуитивне и нема их потребе даље образлагати. Напоменимо само то да реални прекидач може имати и неке друге, пропратне карактеристике, које га чине незанемарљиво различитим од идеалног, рецимо капацитивност или отпорност када је затворен или чак проводљивост када је отворен. Ове карактеристике се у жаргону називају *паразитним*, јер су обично нежељене. Ако су незанемарљиве, оне се моделују додатним идеалним елементима у колу, попут отпорника или кондензатора.

4. Отпорник

За идеалан (линеаран) *отпорник* важи следеће, по дефиницији (слика 16):

Напон између прикључака отпорника увек је пропорционалан јачини струје кроз њега:

$u(t) = R\,i(t)$, R = const.



Слика 16

При томе, референтни смер напона, посматран од прикључка вишег према прикључку нижег потенцијала, једнак је референтном смеру струје који се узима за овај елемент и ову релацију. Коефицијент пропорционалности R је константан и позитиван и назива се *отпорност* отпорника. Као и за друге елементе, ово је идеализација која подразумева линеарну зависност напона и струје и непостојање других ефеката. У случају да реални отпорник има и паразитне капацитивности, оне се моделују додатним идеалним кондензаторима. Нелинеарни реални отпорници се моделују другачијим елементима.

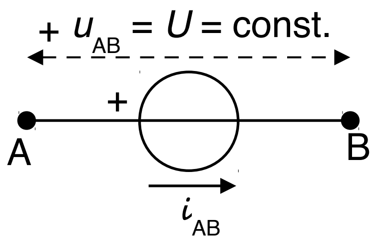
У настави физике се користи нешто другачији симбол за отпорнике. Овде ће бити коришћен данас општеприхваћен симбол отпорника у електротехници који мало боље симболизује чињеницу да кроз отпорник може протицати струја.

5. Идеалан напонски генератор

За идеалан *напонски генератор константног напона* важи следеће, по дефиницији (слика 17):

Напон између прикључака идеалног напонског генератора константног напона је увек константан и не зависи од јачине струје кроз њега:

$u(t) = U$ = const.



Слика 17

Референтни смер напона означава се ознаком + на прикључку вишег потенцијала. У општијем случају, генератор напона не мора имати константну вредност напона у времену, већ је битно да је тај напон унапред задат (познат) као функција времена. У настави физике и у овом тексту сматраће се да је та функција увек константна, као што је речено.

Овај елемент се у настави физике у школама неисправно назива ”извором струје”. Наиме, у теорији кола се користи још један елемент, аналоган овоме, *генератор струје* код кога важи да је јачина струје која кроз њега протиче задата функцијом (могуће и константном), без обзира на напон на његовим крајевима. Као што се види, ово су два суштински различита идеална елемента, сличних али ипак различитих дефиниција, па је терминолошка прецизност овде битна.

Осим тога, у настави физике се користи другачији симбол од овога, са две усправне паралелне црте различитих дужина и дебљина. Тај симбол лоше симболизује чињеницу да кроз овај генератор може протицати стална струја произвољне јачине и трајања, јер две паралелне усправне црте, сличне симболу кондензатора, више подсећају на чињеницу да између њих не може бити неограниченог протока сталне струје, што није исправно.

Као и за све друге елементе, реални генератори напона могу имати паразитне карактеристике, нпр. отпорности и капацитивности, које онда треба моделовати додатним идеалним елементима у колу. Осим тога, у реалности су функције напона само приближно константне у времену, и могу бити променљиве у односу на јачину струје која протиче или пак старост генератора (нпр. временом због пражњења акумулаторске батерије).

Модел идеалног кондензатора

За модел идеалног кондензатора у теорији електричних кола важе три полазне претпоставке, односно постулата, као тврдње које важе увек, без потребе за доказивањем. Овде ће бити изнета та три постулата и дати образложења њихове заснованости, као и неке последице.

1. Између прикључака кондензатора нема протока наелектрисања

Између прикључака идеалног кондензатора никада нема протока наелектрисања, односно струје.

Овај постулат је једноставно разумети: између прикључака реалних кондензатора, односно његових електрода (нпр. плоча код плочастог кондензатора) поставља се добар изолатор, или како се у електротехници назива *диелектрик*, материјал који нема слободних наелектрисања, па не може проводити струју.[36]

У стварности, међутим, диелектрик не мора бити идеалан изолатор, па кроз њега, посебно на високим напонима, могу постојати струје мале јачине. Такве струје у кондензатору се у жаргону називају *струје цурења* кондензатора и ако у посматраном колу оне нису занемарљиве, реалан кондензатор се моделује идеалним кондензатором и једним отпорником (по правилу велике отпорности) који је паралелно везан са тим идеалним кондензатором.

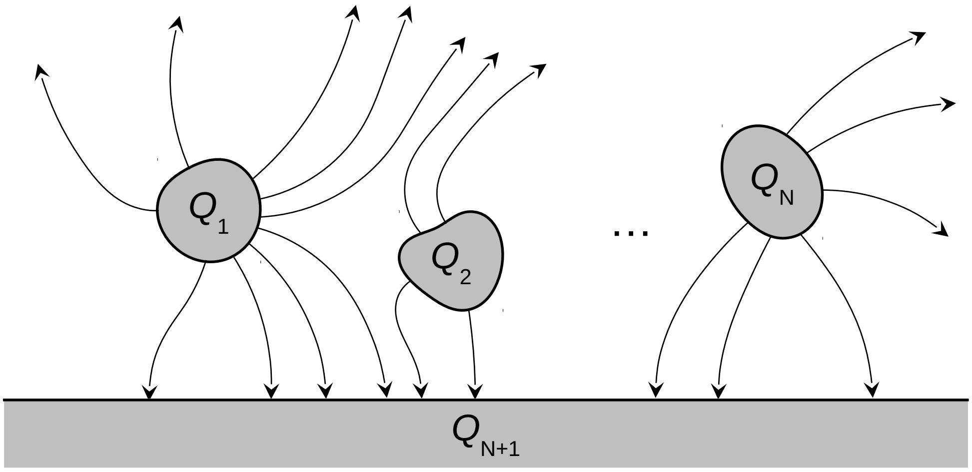
2. Наелектрисања на прикључцима кондензатора су увек +*Q* и -*Q*

На прикључцима идеалног кондензатора се у сваком тренутку налазе количине

36 Диелектрик ипак има *везана наелектрисања*, што значи да се у електричном пољу у диелектрику формирају сићушни електрични диполи, елементи са два супротно наелектрисана и везана пола, слични магнетским диполима. Ови диполи оријентишу се под дејством спољашњег електричног поља, али и сами формирају додатно електрично поње, које у укупном збиру мења изглед резултантног поља. Ова појава се у електромагнетици моделује модификацијом Максвелових једначина, али на начин да оне не мењају свој облик и своју суштину. Зато сви до сада изнети закључци важе за вакуум, али принципијелно исто и за средину са линеарним диелектриком, у којој у једначинама фигурише ”корективни фактор” средине. Ова дискусија превазилази опсег овог текста.

наелектрисања исте апсолутне вредности, али супротних знакова (тј. +Q и -Q, где је Q>0).

Основаност овог постулата није тако једноставно разумети, али се она ипак може извести из општих закона електромагнетике, као што следи.



Слика 18

Посматрајмо неки најопштији систем од N+1 наелектрисаних проводних тела у простору који је свуда око тела испуњен вакуумом или линеарним диелектриком (слика 18), где је N природан број, може бити 1 или више. Означимо тела редом са 1, 2, ..., N, N+1. Нека је првих N тела редом наелектрисано произвољним количинама наелектрисања произвољних вредности и знака: Q_1, Q_2, ..., Q_N. Нека је тело N+1 наелектрисано количином наелектрисања $Q_{N+1} = -(Q_1 + Q_2 + ... + Q_N)$. Ово тело N+1 називаћемо *референтним.* Овакав систем одговара неком затвореном систему у природи, који не размењује наелектрисање са околином и који је свеукупно увек неутралан (јер је $Q_1 + Q_2 + .. + Q_N + Q_{N+1} = 0$). Такав систем може бити нпр. електрично коло као систем изолован од околине, или електроенергетски систем, који је затворен заједно са Земљом, и у коме референтно тело N+1 представља Земљу, а у коме је укупна количина наелектрисања увек иста (јер нема размене са околином) и може се сматрати нулом (систем је свеукупно неутралан). За референтну тачку потенцијала узмимо неку тачку на референтном телу N+1 или у бесконачности (што се може урадити ако су сва тела коначних димензија и распореда наелектрисања).

Претпоставимо најпре да је наелектрисано само тело 1 наелектрисањем Q_1, док су наелектрисања осталих тела (осим референтног тела N+1) нула. Пошто је средина линеарна, на основу свих до сада изнесених разматрања о електричном пољу, можемо закључити да ће геометрија вектора електричног поља у овом случају бити иста у свим тачкама поља, без обзира на то колико је Q_1, само ће интензитет вектора бити пропорцијалан (и то на свим местима подједнако пропорционалан) наелектрисању Q_1. Како је потенцијал такође пропорционалан јачини електричног поља, као што смо показали, можемо закључити да су потенцијали првих N тела у односу на референтну тачку[37]:

$V_1 = a_{11}Q_1$,
$V_2 = a_{21}Q_1$,

37 У електростатици, односно када нема кретања наелектрисања, важи да су потенцијали свих тачака на површини проводних тела (тј. тела од материјала који имају слободна наелектрисања) исти. Оставља се читаоцу да, на основу свега до сада реченог, сам изведе овај закључак. Упутство: предуслови за овај закључак јесу да а) у телу постоје слободна наелектрисања (тј. наелектрисања која се могу слободно кретати под дејством електричног поља) и б) да нема кретања наелектрисања (претпоставка електростатике); доказ извести претпостављајући супротно и најпре закључити да разлика потенцијала између две произвољно блиске тачке постоји ако и само ако постоји ненулта компонента електричног поља у правцу који спаја те тачке.

$...,$
$V_N = a_{N1}Q_1$

где су a_{11}, a_{21}, ..., a_{N1}, неке константе.

Нека је сада наелектрисано само друго тело. На сличан начин закључујемо:

$V_1 = a_{12}Q_2,$
$V_2 = a_{22}Q_2,$
$...,$
$V_N = a_{N2}Q_2$

и тако даље. Коефицијенти a_{ij} су позитивни, изражени су у јединицама V/C (волт по кулону), а може се показати и да важи правило *реципроцитета* за свако i и j:

$a_{ij} = a_{ji}$

Због линеарности средине и на основу постулата о суперпозицији поља, резултантно поље када су сва тела наелектрисана добија се суперпозицијом свих појединачних поља, па се и потенцијали добијају такође суперпозицијом. Тако сабирањем добијамо систем од N линеарних једначина по Q_i, $i = 1,...,N$:

$V_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + ... + a_{1N}Q_N$
$V_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + ... + a_{2N}Q_N$
$...$
$V_N = a_{N1}Q_1 + a_{N2}Q_2 + ... + a_{NN}Q_N$

Решавањем овог система по Q_i добијамо систем:

$Q_1 = b_{11}V_1 + b_{12}V_2 + ... + b_{1N}V_N$
$Q_2 = b_{21}V_1 + b_{22}V_2 + ... + b_{2N}V_N$
$...$
$Q_N = b_{N1}V_1 + b_{N2}V_2 + ... + b_{NN}V_N$

За коефицијенте b_{ij} такође важи реципроцитет ($b_{ij} = b_{ji}$), а јединица им је фарад (1 F = 1 C/V).

Овај систем се сада може написати у следећем облику[38]:

$Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}(V_1 - V_2)+ ... + c_{1N}(V_1 - V_N)$
$Q_2 = c_{21}(V_2 - V_1) + c_{22}V_2 + ... + c_{2N}(V_2 - V_N)$
$...$
$Q_N = c_{N1}(V_N - V_1) + c_{N2}(V_N - V_2) + ... + c_{NN}V_N$

где је

$$c_{ii}=\sum_{j=1}^{N} b_{ij}>0 \ ,$$

тзв. *сопствена капацитивност* i-тог тела, односно коефицијент пропорционалности његовог наелектрисања и његовог потенцијала у односу на референтну тачку, а

$c_{ij} = -b_{ij},\ i \neq j$

тзв. *међусобна капацитивност* i-тог и j-тог тела, односно коефицијент пропорционалности наелектирсања i-тог тела и напона између i-тог и j-тог тела, при чему је

$c_{ij} = c_{ji} \geq 0.$

Дакле, у реалном кондензатору, где је N = 2 (два посматрана тела су две електроде кондензатора), наелектрисања електрода могу бити и различитих апсолутних вредности, али за та наелектрисања и потенцијале електрода увек важе наведене релације. Међутим, у

38 Оставља се читаоцу да сам изведе ову трансформацију. Упутство: пробајте да кренете од добијеног система и погледајте шта се добија множењем разлика у заградама, односно када су одговарајуће једначине у другом једнаке онима у претходном систему.

пракси је, посебно за кондензаторе релативно великих (међусобних) капацитивности, међусобна капацитивност електрода $c_{12} = c_{21}$ много већа од сопствених капацитивности електрода, па се те сопствене капацитивности могу занемарити ($c_{11}≈0$ и $c_{22}≈0$), док се међусобна капацитивност заправо узима као капацитивност кондензатора:

$C = c_{12} = c_{21}$

Тада дакле важи:

$Q_1 = c_{12}(V_1 – V_2) = CU_{12}$
$Q_2 = c_{21}(V_2 – V_1) = - CU_{12} = - Q_1$

Осим тога, да би се уопште могао моделовати реални кондензатор код кога сопствене капацитивности електрода нису занемарљиве, управо је и уведена апстракција идеалног кондензатора код кога ове капацитивности не постоје, јер је то елементаран идеални елемент помоћу кога се могу моделовати овакви реални кондензатори[39]. Овакав реални кондензатор, код кога постоје незанемарљиве сопствене капацитивности електрода, а које се тада сматрају паразитним (јер нису пожељне), моделује се онда једним идеалним кондензатором капацитивности $C = c_{12} = c_{21}$, са још два идеална кондензатора капацитивности $C_1 = c_{11}$ и $C_2 = c_{22}$, који повезују сваки од прикључака првог кондензатора са референтном тачком у колу. Дакле, у овом случају, мора се дефинисати референтна тачка, која се обично зове *уземљење*, и за коју се претпоставља да представља ”неисцрпан резервоар наелектрисања које може компензовати наелектрисања електрода”, односно који представља поменуто референто тело N+1. У пракси, то је неки део кола или стварно уземљење кола (веза велике проводљивости са Земљом[40]).

Видели смо, дакле, како је и на основу чега усвојен овај постулат и од сада па надаље посматраћемо само идеалне кондензаторе за које овај постулат важи.

Како је, дакле, наелектрисање на електродама идеалног кондензатора увек $+Q$ и $-Q$, где је $Q>0$, следи да је идеалан кондензатор *увек свеукупно неутралан*, јер је укупно наелектрисање на њему $+Q + (-Q) = 0$, па на њему као целини нема нагомилавања наелектрисања (наравно, то не важи за његове електроде). Ово је поново у сагласности са општим постулатом теорије кола за све идеалне елементе.

Како ово увек важи, то више не морамо наглашавати, већ ћемо ову ситуацију наелектрисања кондензатора описивати краћим термином, *оптерећењем* кондензатора. Дакле, ситуацију да је на електродама наелектрисање $+Q$ и $-Q$, где је $Q>0$, кратко ћемо описивати исказом да је тај кондензатор *оптерећен* наелектрисањем Q, при чему се за референтни прикључак позитивног наелектрисања узима онај који се узима као прикључак вишег потенцијала. Када је $Q=0$, кондензатор ћемо звати *неоптерећеним*. Функцију (у општем случају променљивог) оптерећења по времену означаваћемо са $q(t)$.

Овај постулат има две директне последице. Прва је да за кондензатор као целину важи једначина континуитета са укупном струјом нула. Наиме, за сваку електроду појединачно, оваква једначина не важи, пошто се на електродама могу ”гомилати” наелектрисања (то и јесте улога кондензатора). Заиста, ако обмотамо једну електроду (и само њу) неком затвореном површи, количина наелектрисања која уђе у кондензатор преко тог прикључка биће једнака повећању количине наелектрисања на тој електроди, јер то наелектрисање нема где да отекне, пошто нема протока наелектрисања између електрода.

39 Без овакве идеализације не бисмо могли да дефинишемо кондензатор, јер бисмо имали логички парадокс, попут ”берберина који брије све оне који не брију сами себе”.

40 У електротехници се Земља сматра великим проводним телом практично неограниченог *капацитета*, што значи да се из ње или у њу може пренети произвољно много наелектрисања из електричних кола, али и бесконачне сопствене капацитивности: колико год наелектрисања да јој додамо или одузмемо, њен потенцијал у свемиру се неће променити (тј. промениће се занемарљиво мало). Овај постулат важи јер је капацитивност Земље драстично већа од капацитивности свих осталих електротехничких система у пракси, због њене величине и количине слободног наелектрисања у односу на системе на њој.

Међутим, из наведеног постулата важи да ће у том случају иста количина наелектрисања отећи са друге електроде, односно да ће се на њој наелектрисање за толико смањити. Другим речима, ако за неки интервал времена Δt кроз један прикључак кондензатора протекне наелектрисање ΔQ (које може бити и позитивно и негативно), наелектрисање на тој електроди биће на крају овог интервала Δt:

$$Q' = Q + \Delta Q$$

где је Q било наелектрисање на почетку интервала, док ће на другој електроди наелектрисање на крају интервала бити, према овом постулату:

$$-Q' = -(Q + \Delta Q) = -Q - \Delta Q,$$

што значи да ће иста количина наелектрисања отећи са друге електроде. Како је, по дефиницији, јачина струје једнака протоку наелектрисања по јединици времена, ако неком затвореном површи обмотамо цео кондензатор (и само њега), важиће једначина континуитета са укупном струјом нула, јер је јачина струје која улази у један прикључак кондензатора једнака:

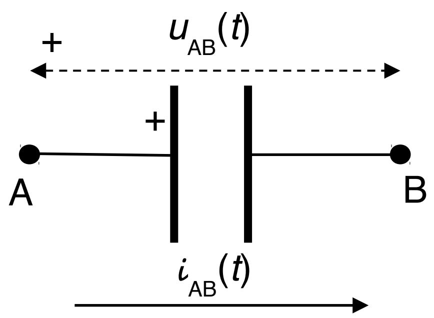
$$I_{\mathrm{A}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\text{ , за } \Delta t \to 0,$$

док је јачина струје кроз други прикључак (узимајући исти референтни смер ка унутра):

$$I_{\mathrm{B}} = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -I_{\mathrm{A}}\text{ , за } \Delta t \to 0,$$

па је:

$$I_{\mathrm{A}} + I_{\mathrm{B}} = 0.$$



Слика 19

Друга важна последица непосредно следи из претходног разматрања. Наиме, иако између самих електрода (нпр. плоча) кондензатора не може протицати струја, ”преко” самог елемента, посматрајући га споља као целину (интегрално), односно кроз његове прикључке, може протицати струја (слика 19). Зато ћемо ту струју посматрати као јединствену појаву, пошто она има исти интензитет и смер на оба прикључка, како смо управо показали. Та струја, ипак, не може бити коначно велике, ненулте апсолутне вредности и истог смера у неограниченом интервалу времена, јер би то узроковало неограничено оптерећивање кондензатора, што би значило и неограничен напон на њему, а што се не може постићи у пракси. Та струја ипак може бити или променљива у времену, рецимо, периодично мењати смер, као што је случај код кола наизменичне струје, или може имати исти смер у ограниченом интервалу времена, рецимо, док је укључен прекидач који се након неког времена искључи, или може имати и (теоријски) неограничено трајање, исти смер и ненулти интензитет, али тако да се тај интензитет стално смањује и временом тежи нули, тако да је укупан проток наелектрисања у збиру коначан, као што ћемо ускоро и показати.

Према томе, у најопштијем случају, струја која протиче ”преко” кондензатора, тачније кроз прикључке кондензатора, што се често у жаргону помало непрецизно назива и струјом ”кроз” кондензатор, посматраћемо апстрактно, као струју кроз било који други идеални елемент. Она може у општем случају бити нека функција времена $i(t)$.

3. Оптерећење кондензатора пропорционално је напону између његових прикључака

Оптерећење идеалног кондензатора пропорционално је напону између његових прикључака, са коефицијентом пропорционалности који представља капацитивност кондензатора:

$q(t) = C\,u(t),\ C = \text{const.}$

Ову релацију смо заправо већ доказали у претходном одељку, па је нећемо више посебно образлагати. Нагласимо ипак поново да она важи само при свим уведеним претпоставкама, као што су постојање идеално непроводног, линеарног диелектрика између електрода и нулте сопствене капацитивности електрода. Када нека од ових претпоставки не важи за реални кондензатор, он се не може моделовати идеалним.

Теоријски, ова релација не ограничава напон ни оптерећење кондензатора, па они могу бити произвољно велики. У пракси, међутим, то није тако: реалан кондензатор не може ”издржати” произвољно велики напон. Наиме, са растом напона између електрода кондензатора, као што смо видели, расте и јачина електричног поља између њих. Када тај напон, па тиме и јачина поља довољно порасте да силе електричног поља надвладају унутаратомске или унутармолекулске силе које у диелектрику између електрода држе наелектрисања везаним, сила електричног поља ће ”раскидати” те везе и наелектрисања ће постати слободна[41], па ће кроз диелектрик потећи струја. Ова појава назива се *пробој* кондензатора. Када се он догоди, материјал диелектрика се разара и престаје да буде изолатор, па кондензатор губи своја својства. Он ће тако изгубити и своју предвиђену улогу у електричном колу у коме се налази, па ће то коло постати неисправно, а кондензатор мора да се замени. За такав кондензатор се каже да је ”пробио”.

Вратимо се сада на појам струје која протиче кроз прикључке кондензатора о којој смо говорили у претходном одељку, чија је јачина у општем случају функција времена $i(t)$. Као што смо већ показали, јачина те струје представља брзину промене оптерећења кондензатора, односно једнака је промени оптерећења кондензатора $q(t)$ у датом интервалу времена Δt, по јединици времена, када тај интервал тежи нули:

$$i(t) = \frac{\Delta q(t)}{\Delta t}\text{, за } \Delta t \to 0$$

Са друге стране, видели смо сада да је оптерећење кондензатора пропорционално напону између његових прикључака:

$q(t) = C\,u(t),\ C = \text{const.}$

односно[42]:

$\Delta q(t) = C\,\Delta u(t)$

Одатле следи једначина која повезује напон између прикључака кондензатора и јачину струје која кроз њих протиче:

$$i(t) = C\frac{\Delta u(t)}{\Delta t}\text{, за } \Delta t \to 0.$$

При томе се за референтне смерове напона и струје узимају сагласни смерови као на слици

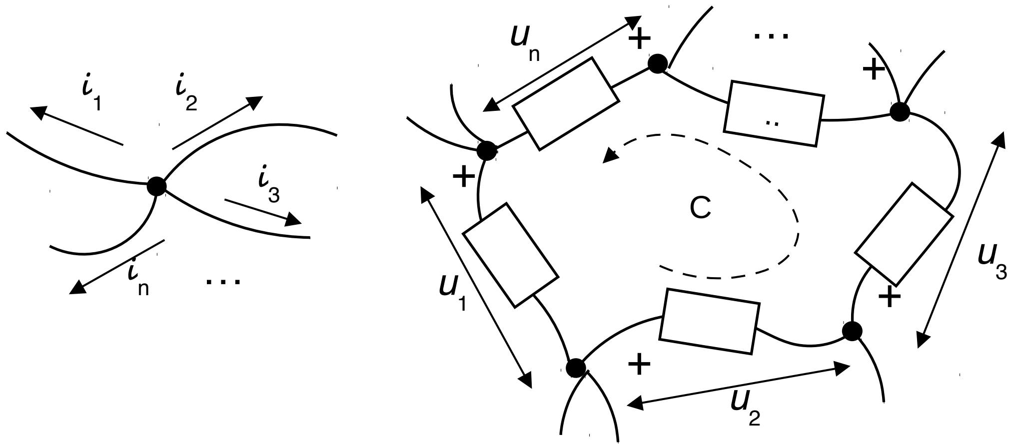
41 То значи да се електрони одвоје од атома, или да се молекули раставе на јоне.

42 Оставља се читаоцу да докаже ову релацију из претходне за дати интервал времена Δt. Као и увек, представите промену неке величине разликом њене вредности на крају и на почетку посматраног временског интервала.

19, слично као и за отпорник.

Кирхофова правила и решавање кола

Поред дефиниција идеалних елемената које успостављају релације између одређених величина на прикључцима свих елемената у колу, у теорији кола се користе и два позната Кирхофова правила (слика 20):



Слика 20

1. За сваки чвор N *у колу важи да је збир свих јачина струја кроз све прикључке који су повезани у том чвору (овде означен са* $\Sigma_N i(t)$*) једнак нули, ако се за све њих узме референтни смер од чвора ка споља (или свима обратно):*

$\Sigma_N\, i(t) = 0$

2. За сваку затворену контуру C *у колу важи да је збир напона између прикључака елемената по њој (овде означен са* $\Sigma_C u(t)$*) једнак 0, ако се за све те елементе узме референтни смер напона као и смер обиласка контуре (или свима обратно):*

$\Sigma_C\, u(t) = 0$

Као што је раније већ показано, Кирхофова правила следе из Максвелових закона. Прво Кирхофово правило представља једначину континуитета за јачину струје када у простору нема ”нагомилавања” наелектрисања. Ово је, као што смо рекли, један од основних постулата теорије кола. Заиста, ако посматрани чвор обухватимо произвољном затвореном површи која обухвата тај чвор (и ништа осим њега), и претпоставимо да ван елемената кола нема струје, а пошто ни у чвору нема нагомилавања наелектрисања[43], следи ово правило.

Друго Кирхофово правило представља својство конзервативности електричног поља које, као што смо рекли, важи ако и само ако у простору у коме се коло налази нема промењљивог магнетског поља. И ово је опет један од полазних постулата теорије кола. Заиста, ако за затворену контуру изаберемо дату контуру кола, циркулација вектора јачине електричног поља управо представља збир напона на елементима те контуре.

У општем случају, било које електрично коло се у теорији кола решава следећим формалним, врло ригорозним приступком и искључиво применом наведених постулата, Кирхофових правила и математичко-логичког закључивања, без икаквих ”слободних” или ”интуитивних” закључивања, односно без ”импровизације” или ”пречица”:[44]

---

43 Ово је заправо исказ који се ослања на претпоставку да је сопствена капацитивност реалног чвора занемарљива, тј. нула, као што смо показали. Слично важи и за остале идеалне елементе.

44 Ово је важно јер такав, и само такав приступ гарантује да се може исправно решити било који теоријски решив проблем. Осим тога, овакав приступ омогућава и аутоматско решавање кола помоћу специјализованог софтвера, какав одавно постоји.

1. За сваки елемент у колу дефинишемо (произвољно усвојимо) референтни смер напона и струје који су међусобно сагласни, према дефиницији за ту врсту елемента, и уводимо (означавамо) величине за напон имеђу његових прикључака и јачину струје кроз њих као променљиве у општем случају, $u(t)$ *и* $i(t)$.

2. За сваки чвор у колу пишемо једначину по Првом Кирхофовом правилу.

3. За сваку затворену контуру у колу пишемо једначину по Другом Кирхофовом правилу.

4. За сваки елемент кола пишемо релације које повезују величине (јачину струје и напон) за тај елемент, према дефиницијама идеалних елемената.

5. Решавамо дати скуп свих ових једначина по непознатим величинама.

У пракси се, међутим, по правилу примењују неке основне ”пречице” у овом поступку, јер су закључци врло једноставни и често се понављају. Једна таква основна пречица јесте ситуација када један чвор спаја само два прикључка два суседна елемента. Такав чвор се може сматрати тривијалним, а тако везани елементи се називају *редно везаним*. Ако су, на пример, референтни смерови јачина струја кроз оба та елемента усмерени од чвора, применом Првог Кирхофовог правила за тај чвор добијамо:

$i_1(t) + i_2(t) = 0$:

односно

$i_1(t) = - i_2(t)$

Дакле, једноставно закључујемо оно што смо и раније интуитивно знали, да струја кроз редно везане елементе има исти смер и интензитет. Зато ћемо ствари упростити, па ћемо низ суседних елемената, редно везаних помоћу тривијалних чворова називати *граном*, и за све елементе у грани, односно за целу грану, увести само једну величину за јачину струје, са једним истим смером кроз све те редно везане елементе. Међутим, уколико је сада за неки од тих елемената тако узети референтни смер струје у грани обрнут од референтног смера струје који се узима у сагласности са референтним смером напона у релацији између напона и јачине струје за тај елемент, онда ће, наравно, у тој релацији јачина струје добити обрнут предзнак.

У принципу, за сваку грану кола може се узети било који референтни (претпостављени) смер струје. Код примене првог Кирхофовог правила, ако је референтни смер струје у некој грани усмерен ка чвору уместо од њега, та јачина струје се у укупном збиру за чвор узима са негативним предзнаком. Ако се решавањем датог кола добије негативна алгебарска вредност јачине струје у тој грани, стварни смер струје у тој грани је заправо обрнут од референтног (претпостављеног).

Слично, код другог Кирхофовог правила, сабирају се напони између прикључака сваког елемента на контури, узимајући исти референтни смер напона на елементу као и смер обиласка контуре. Ако је референтни смер напона на елементу обрнут од тог смера обиласка, онда он у збир улази са негативним предзнаком. У пракси, то значи просто следеће: ако при обиласку контуре наилазимо најпре на + референтни прикључак елемента, његов напон улази са позитивним предзнаком у збир (потенцијал опада), иначе улази са негативним предзнаком у збир (потенцијал расте)[45]. Слично као и за јачину струје, ако се решавањем кола добије негативна алгебарска вредност за напон на неком елементу, онда тај напон заправо има обрнут стварни смер од претпостављеног за тај елемент.

У теорији кола се формално, применом теорије графова, математички доказује да је систем релација које одређују Кирхофова правила за сваки чвор и сваку петљу у колу довољан за решавање по непознатима које чине јачине струја и напона на крајевима сваке

45 Може и све обрнуто, јер је укупан збир свакако нула.

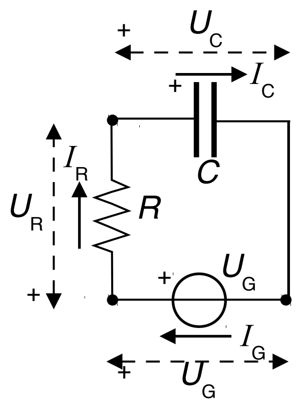
гране у колу у стационарном режиму (тј. неће имати више непознатих напона и струја у гранама кола него једначина). Према томе, постављањем свих ових једначина, као и релација које важе за сваки елемент, добија се систем једначина који треба решити. Као што је већ речено, уколико се добије систем који је контрадикторан, односно који нема решења, коло није добро дефинисано (тј. има вишак једначина), а у реалности ће се коло понашати на неки ”екстреман начин”, као што ћемо ускоро видети на једном примеру. Уколико се пак добије систем који има више решења, коло је недовољно дефинисано (тј. има мањак једначина), што значи да неки податак није познат, а да се без њега неке величине не могу одредити.

Кондензатор у колу у стационарном и прелазном режиму

Анализираћемо сада понашање кондензатора у неким једноставним, али врло важним, базичним везама у електрично коло. Најпре ћемо посматрати кондензатор у колу у равнотежном[46], тзв. *стационарном стању*. По дефиницији, стационарно стање подразумева да су све величине кола (напони и јачине струја) константни у времену.[47] Потом ћемо посматрати *прелазни режим*, којим коло прелази из једног у друго равнотежно стање и где те величине могу бити променљиве у времену.

Кондензатор у колу у стационарном стању

У првом примеру (слика 21) анализираћемо коло састављено од редно везаних следећих елемената: генератора познатог константног напона U_G, отпорника познате отпорности R и кондензатора познате капацитивности C. Овакво коло се у електротехници кратко назива *RC колом*, из очигледних разлога. Претпоставићемо да је коло у равнотежном, стационарном стању, дакле, да су све величине кола (напони и јачине струја) константни.



Слика 21

Спровешћемо сада врло строго малопре описани поступак решавања овог кола:

1. За сваки елемент у колу дефинишемо референтни смер напона и претпостављене струје и означавамо непознате (или познате) величине напона и струје сваког елемента. За елементе у овом колу, означићемо те реферетне смерове као на слици, а напоне и струје са:

U_G, I_G, U_R, I_R, U_C, I_C, при чему су све ове величине константне.

2. За сваки чвор у колу пишемо једначине по Првом Кирхофовом правилу. У датом колу, чворови спајају прикључке само по два суседна и редно везана елемента, па су сви

46 Термин ”равнотежно стање” позајмљен је из механике, где се њиме означава стање материјалне тачке на коју делује више сила, тако да је њихова резултанта нула, па материјална тачка мирује или се равномерно креће, без убрзања, односно без промене вектора њене брзине. Аналогно, овде се то сматра стањем у коме су све ”силе које би могле узроковати промену” у равнотежи, па се величине кола, тачније јачине струја и напони, не мењају у времену.

47 Код кола наизменичне струје, сматра се да је стационарно стање оно у коме су све величине строго периодичне.

тривијални. Зато су све јачине струја просто једнаке по апсолутној вредности (знаци им зависе од референтног смера). Овај корак се може упростити и одмах увести јединствена непозната за јачину струје у целој грани између два нетривијална чвора (овде таквих нема). Дакле, за ово коло важи:

$I_G = I_R = I_C = I$

3. За сваку затворену контуру пишемо једначине које следе из Другог Кирхофовог правила. У овом колу имамо само једну контуру за коју важи:

$U_G - U_R - U_C = 0$

4. За сваки елемент кола пишемо релације које повезују величине за тај елемент, према дефиницијама идеалних елемената. У овом колу имамо три елемента и за њих важи следеће:

$U_G = \mathrm{const.}$

$U_R = R\, I_R$

$$i_C(t) = C \frac{\Delta u_C(t)}{\Delta t} \text{ , за } \Delta t \to 0$$

5. Сада имамо све једначине и можемо да их решавамо. Кренимо најпре од последње релације: пошто је по претпоставци о стационарности $u_C(t) = U_C = \mathrm{const}$, следи да је $\Delta u_C(t) = \Delta U_C = 0$ за било који интервал времена Δt, па је:

$$I = I_C = C \frac{\Delta u_C(t)}{\Delta t} = C \frac{\Delta U_C(t)}{\Delta t} = 0$$

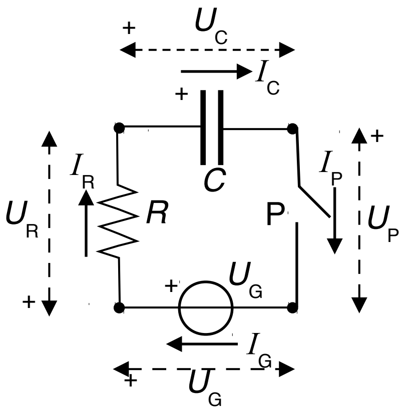
Дакле, закључујемо да у овом колу нема струје, што смо, наравно, од почетка интуитивно и знали. Међутим, овај закључак смо сада и формално извели. Наравно, у пракси ћемо врло често правити овакве "пречице" у закључивању, јер нам је одређени закључак попут овог унапред познат из искуства, али увек треба бити пажљив јер се приликом прављења оваквих пречица може испустити провера неке претпоставке која је неопходна за одређени закључак. Зато треба увек имати у виду све потребне претпоставке и, ако се појави било каква недоумица или забуна, прибећи поново строгом формализму.

Даље, из релације за отпорник $U_R = R\, I_R = R\, I$ следи да је и $U_R = 0$. Из једначине за Друго Кирхофово правило коначно добијамо да је $U_G = U_C$. Одатле можемо израчунати и оптерећење кондензатора, према постулату за идеални кондензатор:

$Q_C = C\, U_C = C\, U_G$

Дакле, у оваквом колу, у стационарном режиму, кондензатор ће бити "напуњен" на напон генератора и оптерећен одговарајућим наелектрисањем пропорционално његовој капацитивности. Треба приметити да ови закључци не зависе од познавања евентуалне предисторије стања кондензатора, односно његовог оптерећења пре приказаног стања. Заиста, како изледа случај када је кондензатор био оптерећен пре укључивања у ово коло? Шта се догодило са његовим почетним оптерећењем? Одговор је једноставан: коначно оптерећење кондензатора неће зависити од његовог претходног оптерећења, баш како смо и показали, а разлика између ранијег оптерећења (које може бити и нула) и коначног је заправо количина наелектрисања које је протекло кроз коло као струја, након укључења оптерећеног кондензатора у коло, и "премештало" са једне електроде кондензатора на другу кроз остатак кола (наравно, не између електрода), све док се није успоставило описано равнотежно стање.

Посматрајмо сада слично коло, само са још једним прекидачем P који је везан у коло редно са осталим елементима и који је отворен (слика 22).



Слика 22

У равнотежном стању, применом истог описаног поступка, добијамо следеће једначине:

1. За елементе у овом колу имамо следеће величне:

U_G, I_G, U_R, I_R, U_C, I_C, U_P, I_P, при чему су све ове величине константне.

2. По Првом Кирхофовом правилу, пошто су сви чворови тривијални:

$I_G = I_R = I_C = I_P = I$

3. По Другом Кирхофовом правилу, за једину затворену контуру имамо:

$U_G - U_R - U_C - U_P = 0$

4. За елементе кола имамо следеће релације:

$U_G = \text{const.}$
$U_R = R\, I_R$

$$I_C = C\frac{\Delta U_C}{\Delta t}\ ,\ \Delta t \to 0$$

$I_P = 0$

5. Сада имамо све једначине и решавамо их. Из Првог Кирхофовог правила и две последње релације, за кондензатор, као и за прекидач, једноставно поново закључујемо:[48]

$I = I_P = 0$

Како је јачина струје 0, из релације за отпорник следи да је $U_R = 0$. Остаје нам још само једначина по Другом Кирхофовом правилу, за коју, заменом $U_R = 0$, добијамо:

$U_G - U_C - U_P = 0$

Сада смо све познате релације искористили, извели све могуће замене, а добили смо једну једначину са две непознате, U_C и U_P. Ниједна друга релација не повезује ове величине, па се оне *не могу одредити*. То значи да је коло недовољно дефинисано, односно да постоји, у овом случају бесконачно много решења за ове величине (све оне које задовољавају последу релацију).

У чему је заправо проблем? Једноставно, никакав податак немамо о *оптерећењу* овог кондензатора. Јер да га имамо, тј. да је Q_C познато, имали бисмо одређену и вредност U_C из релације закондензатор:

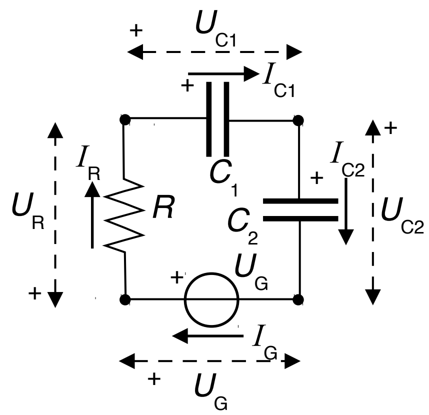
$$U_C = \frac{Q_C}{C}$$

48 Пажљивом читаоцу неће промаћи детаљ да сада закључак да је јачина струје у колу нула више не зависи од претпоставке о стационарности, јер је прекидач отворен и струја је због тога увек нула, чак и да нисмо претпоставили константност величина у колу као у претходном случају.

Одатле бисмо, заменом у једначину по Другом Кирхофовом правилу, знали и напон на прекидачу U_P:

$$U_P = U_G - U_C = U_G - \frac{Q_C}{C}$$

Можемо недвосмилено закључити да у одређеним ситуацијама, попут ове, *не можемо знати вредност напона на кондензатору* ако не знамо његово оптерећење. Тај кондензатор је раније, пре укључивања у ово коло, могао бити оптерећен произвољним оптерећењем, рецимо тако што је био везан у коло попут оног из претходног примера. Након искључења из тог претходног кола, кондензатор је могао бити укључен у ово коло и, ако претпоставимо да у међувремену није био укључиван ни у једно друго коло, односно да кроз његове прикључке није протицала струја, његово оптерећење остаће такво (јер у овом колу нема струје због отвореног прекидача). На основу тог оптерећења, кондензатор ће у овом последњем колу имати напон који је пропорционалан том почетном оптерећењу, а тај напон, уз напон генератора, одредиће и напон на прекидачу (који за отворен прекидач може бити произвољан). Другим речима, у одређеним ситуацијама не можемо знати вредност напона на кондензатору, ако не знамо његову ”прошлост”, односно предисторију његовог укључивања у кола која би тај напон или оптерећење одредила.



Слика 23

Погледајмо још један сличан пример кола са два редно везана кондензатора капацитивности C_1 и C_2, отпорником и напонским генератором (слика 23), опет у стационарном стању.

Истим поступком као и до сада добијамо, укратко:

$I_G = I_R = I_{C1} = I_{C2} = I = 0$, $U_R = 0$

$U_G - U_{C1} - U_{C2} = 0$

Поново имамо две непознате вредности напона на кондензаторима, које не можемо одредити без податка о њиховом оптерећењу, или бар ранијем оптерећењу пре њиховог везивања у коло, као што ћемо нешто касније видети. Дакле, поново закључујемо да у неким ситуацијама, попут ове са редно везаним кондензаторима, не можемо одредити њихове напоне без податка о њиховом тренутном оптерећењу (или обратно), или бар о оптерећењу односно напону пре укључивања у коло.

Кондензатор у колу у прелазном режиму

Посматрајмо сада исто RC коло из претходног одељка са редно везаним генератором познатог константног напона U_G, отпорником познате отпорности R, кондензатором познате капацитивности C и отвореним прекидачем P (слика 22). Нека је пре временског тренутка кога ћемо означити са $t = 0$ коло било у стационарном стању и нека је кондензатор био неоптерећен. Као што смо малопре одредили, величине овог кола за време пре тренутка $t = 0$, односно за свако $t < 0$, биће тако:

$i_G(t) = I = 0$,
$q_C(t) = Q_C = 0$, па је и $u_C(t) = U_C = 0$
$u_P(t) = U_P = U_G - U_C = U_G$

Ово стање кола важиће у сваком тренутку пре тренутка $t = 0$, што значи и у сваком, тренутку $t = 0$ произвољно блиском тренутку, или како се то често каже и обележава, ”у тренутку $t = 0^-$” (минус означава бесконачно блиску, али мању вредност од 0).

Нека се у тренутку $t = 0$ прекидач укључи. За сваки, било који тренутак $t > 0$, важиће следеће једначине које се постављају на исти показани начин, само за стање са затвореним прекидачем, и без увођења претпоставке о стационарности:

$i_G(t) = i_R(t) = i_C(t) = i_P(t) = i(t)$
$u_G(t) - u_R(t) - u_C(t) - u_P(t) = 0$
$u_G(t) = U_G = \text{const.}$
$u_R(t) = R\, i_R(t)$

$$i_C(t) = C\frac{\Delta u_C(t)}{\Delta t}\ ,\ \Delta t \to 0$$

$u_P(t) = 0$

Решавањем, односно одговарајућим заменама, добијамо:

$$U_G - RC\frac{\Delta u_C(t)}{\Delta t} - u_C(t) = 0\ ,\ \Delta t \to 0$$

односно:

$$u_C(t) = U_G - RC\frac{\Delta u_C(t)}{\Delta t}\ ,\ \Delta t \to 0$$

Ова једначина је *диференцијална*, јер у себи има количник $\Delta u_C(t)/\Delta t$, за $\Delta t \to 0$, при чему је бројилац овог количника тзв. *диференцијал* тражене (непознате) величине. Она успоставља релацију између неке величине (у овом случају напона на кондензатору $u_C(t)$) и брзине промене те величине (овде $\Delta u_C(t)/\Delta t$). Овакве једначине се не могу решити техникама елементарне математике. Међутим, овај облик једначине представља један од најједноставнијих облика диференцијалних једначина и решава се у вишој математичкој анализи. Њено решење има следећи облик[49]:

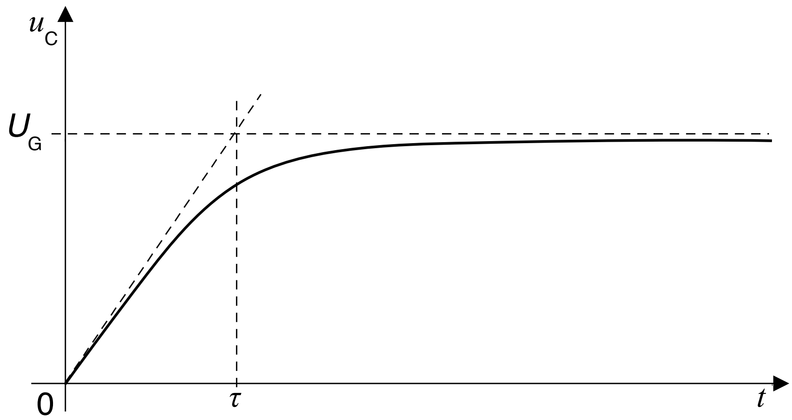
$u_C(t) = U_G\,(1 - e^{-t/RC})$

где се производ RC назива *временском константом RC кола*, означеном са τ:[50]

$\tau = RC$
$u_C(t) = U_G\,(1 - e^{-t/\tau})$

Ова функција има облик приказан на дијаграму на слици 24.

49 Ирационални број e има приближну вредност 2,71828183.
50 Оставља се читаоцу да сам покаже да производ RC има физичку димензију времена!



Слика 24

Дакле, у тренутку бесконачно блиском тренутку $t = 0$, али ипак већем од њега, односно, како се означава, у тренутку $t = 0^+$, вредност напона на кондензатору биће:

$$u_C(t>0) = U_G\,(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$U_C(t=0^+) = U_G\,(1 - e^{-0/\tau}) = U_G\,(1 - 1) = 0$$

Ово је, наравно, у сагласности са вредношћу напона који је кондензатор имао непосредно пре затварања прекидача, што је и природно, јер се тај напон физички не може тренутно променити, јер би то значило бесконачно јаку струју, као што ћемо ускоро и формално показати. Оваква вредност која важи на почетку неког интервала за који се диференцијална једначина решава представља тзв. *гранични услов* диференцијалне једначине.

Вредност $e^{-t/\tau} = 1/e^{t/\tau}$ је увек већа од нуле, јер је именилац увек позитиван, и са порастом времена постаје све мања, односно све ближа нули, па вредност напона на кондензатору временом постаје све ближа другој граничној вредности, која се назива *асимптота* (или асимптотска вредност):

$$u_C(t>0) = U_G\,(1 - e^{-t/\tau})$$

$$U_C(t\rightarrow\infty) = U_G\,(1 - 0) = U_G$$

Ово је, интересантно али не и изненађујуће, у сагласности управо са напоном на кондензатору у стационарном стању кола са затвореним прекидачем који смо одредили у претходном поглављу. Дакле, асимптотска вредност напона (али и сваке друге величине у колу) у прелазном режиму једнака је оној у стационарном режиму. Међутим, како је вредност $e^{-t/\tau} = 1/e^{t/\tau}$ увек већа од нуле, произилази да вредност напона на кондензатору *никада неће достићи вредност* која важи за стационарни режим, већ је јој се само бескрајно приближавати. Произилази да је стационарно стање само фикција, односно апстракција, што заиста и јесте, јер до неког циљаног равнотежног стања не можемо доћи "ниоткуда", већ постепеним склапањем кола и укључивањем елемената (који су пре тога увек били у неком другом режиму), чиме се заправо иницира прелазни режим који се, бар теоријски, никада не завршава, односно не прелази у стационаран.

У пракси је то ипак мало другачије. Вредност напона (а како ћемо сада видети и јачине струје) достиже вредност која је довољно блиска асимптотској, да се практично може сматрати њој једнаком, за време једнако неколико временских константи τ.[51] Зато појам стационарног стања ипак има практичан смисао, јер се пратично може постићи.

Погледајмо сада како изгледа јачина струје у овом колу. Она се може добити рецимо израчунавањем напона на отпорнику из Другог Кирхофовог правила:

51 Оставља се читаоцу да уз помоћ калкулатора израчуна колика је разлика стварне вредности ове величине од њене асимптотске вредности након протеклог времена $t=\tau$, $t=2\tau$, $t=3\tau$ итд.

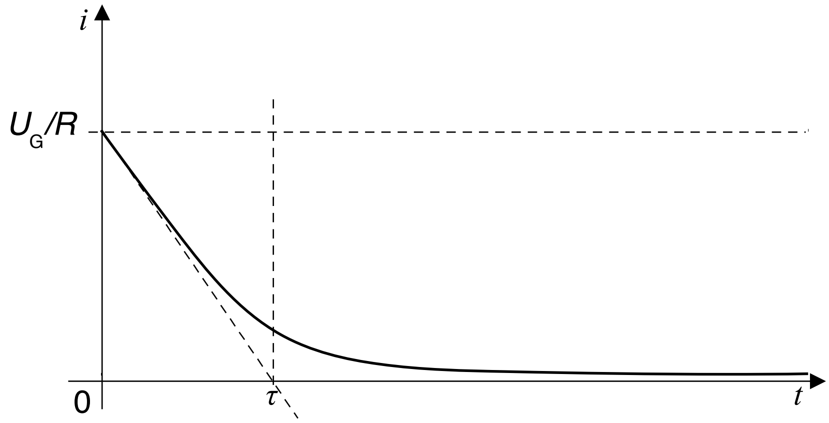
$u_R(t) = U_G - u_C(t) = U_G\, e^{-t/\tau}$

Оставља се читаоцу да проучи како изгледа овај напон у почетном тренутку и у бесконачности. Према правилу за отпорник добијамо за јачину струје:

$$i(t)=\frac{u_R(t)}{R}=\frac{U_G}{R}e^{-t/\tau}$$

График промене јачине струје струје по времену приказан је на слици 25. У почетном тренутку t = 0+ вредност јачине струје је

$$I(t=0^+)=\frac{U_G}{R}$$



Слика 25

Као и напон, јачина струје временом тежи својој асимптотској вредности која је поново једнака вредности коју смо израчунали за стационарно стање, односно нули, иако је теоријски никада не достиже:

$$I(t\rightarrow\infty)=\frac{U_R(t\rightarrow\infty)}{R}=0$$

За неки интервал времена, укупна количина наелектрисања које протекне кроз прикључке кондензатора једнака је укупној промени његовог оптерећења. Како смо видели, важи:

$\Delta q_C(t) = i_C(t)\,\Delta t,\ \Delta t\rightarrow 0$

па је заправо протекло наелектрисање, односно промена оптерећења кондензатора у бесконачно малом интервалу $\Delta t\rightarrow 0$, једнака површиници правоугаоника бесконачно мале ширине Δt испод графика функције $i_C(t)$ у тренутку t (између тог графика и временске осе). Зато је за произвољни временски интервал укупна количина протеклог наелектрисања једнака површини дела графика функције $i_C(t)$ између тог графика и временске осе, за тај временски интервал. Овај појам се у математици назива *интеграл* функције. У математичкој анализи се, за добијени облик функције $i_C(t)$, показује да је ово протекло наелектрисање, почев од тренутка t = 0 па све до бесконачности, коначно, и износи управо

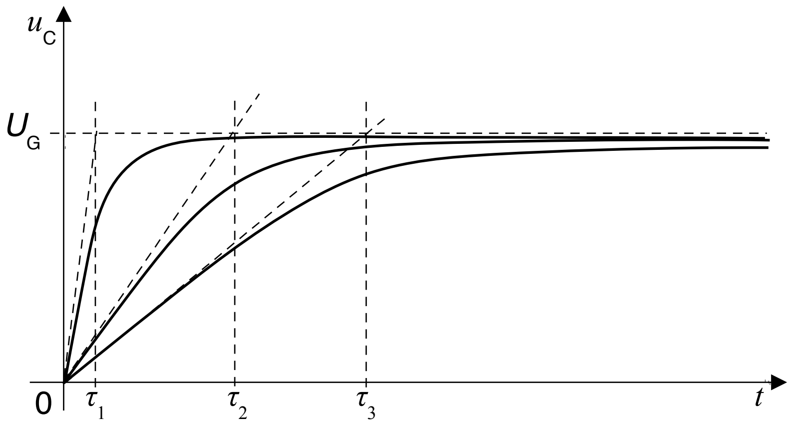
$Q_C = CU_G$,

што је управо коначно оптерећење кондензатора, односно разлика између његовог коначног и почетног оптерећења (које је овде било нула).

Техникама математичке анализе може се израчунати нагиб тангенте на ове две криве у тренутку $t = 0^+$, који износи U_G/τ, односно $-U_G/R\tau$, редом. Нагиб тангенте криве функције у некој тачки представља брзину промене функције у тој тачки, па се он лако може одредити и из полазне диференцијалне једначине:

$$\frac{\Delta u_C(t)}{\Delta t}=\frac{U_G}{\tau}-\frac{u_C(t)}{\tau}\ ,\ \Delta t\to 0$$

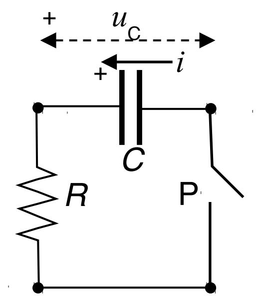
Како је за $t = 0^+$: $U_C(t=0^+) = 0$, тада је $\Delta U_C(t=0^+)/\Delta t = U_G/\tau$. Осим тога, из ове диференцијалне једначине се види да је брзина промене функције сразмерно мања, што је вредност те функције већа. Одатле следи да ове тангенте секу асимптоте у тачки $t = \tau$ (слика 24, 25, 26). Према томе, нагиб ове тангенте, а тиме и саме криве, зависи од временске константе $\tau = RC$: што је ова константа мања, ова тангета, па тиме и крива, јесте стрмија, што значи да се вредност величине напона или струје брже приближава асимптоти. Када је пак ова константа веома велика, асимптотске вредности се много спорије постижу. Можемо рећи да то практично значи следеће: кондензатор ће се тим брже пунити, што је капацитивност тог кондензатора мања односно отпорност отпорника мања, и обратно. То је сасвим у сагласности са интуитивним разумевањем: ако је отпорност отпорника већа, струја ће ”теже протицати”, па ће се кондензатор ”спорије пунити”; слично, што је капацитивност кондензатора већа, он ће се ”спорије пунити” јер више наелектрисања треба да протекне да би се његов напон повећао за неку вредност.



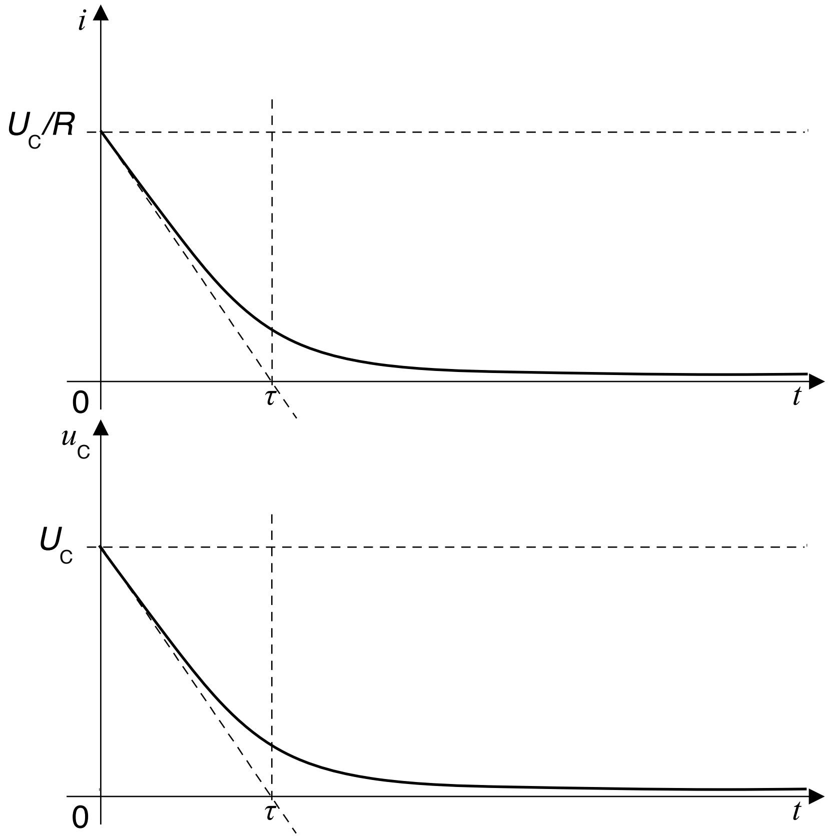
Слика 26

Потпуно аналогни закључци важе и за супротан поступак пражњења оптерећеног кондензатора почетног оптерећења Q_C у RC колу које се састоји само од прекидача, кондензатора и отпорника (без генератора, слика 27), након затварања прекидача који је до тада био отворен: криве напона и јачине струје на кондензатору имају исти облик (слика 28) и асимптотски теже својим вредностима у стационарном стању (тј. нули). Напон на кондензатору у тренутку $t = 0^+$ има вредности стационарног стања отвореног прекидача, тј. U_C, јачина струје има вредности U_C/R, док су нагиби тангенти пропорционални истој временској константи $\tau = RC$.[52]

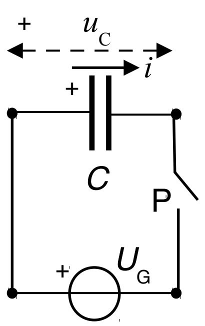
52 У овом примеру смо за референтни смер струје узели супротан смер од онога који је у сагласности са референтним смером напона на кондензатору, јер интуитивно знамо у ком смеру ће струја тећи приликом пражњења кондензатора. Зато смо за алгебарску вредност струје добили позитивну вредност, што значи да она заиста протиче у том претпостављеном смеру. Могли смо исто тако узети и обрнут референтни смер струје, при чему бисмо добили исти облик функције, само са супротним (негативним) алгебарским знаком, тј. симетричан у односу на *t* осу.



Слика 27



Слика 28



Слика 29

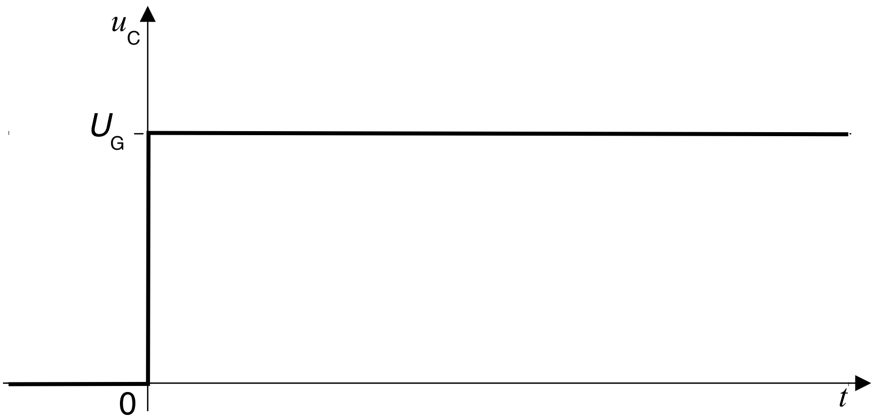
Посматрајмо сада још једно коло, слично претходном, са генератором напона, кондензатором, отвореним прекидачем, али сада без отпорника (слика 29). Нека је пре тренутка $t = 0$ прекидач био отворен, кондензатор неоптерећен, а коло било у стационарном стању, и нека се у тренутку $t = 0$ прекидач затвори. Тада за тренутак непосредно пре затварања прекидача, тј. за t = 0- важи:

$Q_C(t=0-) = q_C(t<0) = 0,$
$U_C(t=0-) = u_C(t<0) = 0$

За тренутак непосредно по затварању прекидача $t = 0^+$ имамо просто:

$U_C(t=0^+) = U_G(t=0^+) = U_G,$
$Q_C(t=0^+) = CU_C(t=0^+) = CU_G$

Дакле, напон на кондензатору, а тиме и његово оптерећење, које је пропорционално том напону, променили су се тренутно, па има облик ”степеника” приказан на следећем графику (слика 30):



Слика 30

Како изгледа јачина струје за овај прелаз? У тренутку $t = 0^-$, бесконачно блиском тренутку затварања прекидача $t = 0$, али пре њега, оптерећење кондензатора је нула. У тренутку $t = 0^+$, бесконачно блиском тренутку затварања прекидача $t = 0$, али после њега, оптерећење кондензатора је коначно и износи $Q_C(t=0^+) = CU_G$. Према томе, оптерећење се за бесконачно кратак временски интервал $\Delta t \rightarrow 0$ променило за коначну вредност. Како јачина струје кроз прикључке кондензатора, а тиме и кроз ово коло, представља брзину промене оптерећења овог кондензатора, односно однос количине протеклог наелектрисања и интервала времена, закључујемо да је ова брзина промене оптерећења, односно јачина струје *бесконачна* (јер делимо коначну вредност бесконачно малом вредношћу). Другим речима, да би се задовољила ова промена оптерећења и напона на кондензатору, потребна је струја бесконачно велике јачине, али и бесконачно кратког трајања. Оваква струја назива се *импулсном струјом*. Иако и за овакав, потпуно апстрактан случај у теорији кола постоји математички модел, у принципу се сматра да овакво коло *није добро дефинисано*.[53]

У пракси се у оваквим случајевима ”кратког споја” кондензатора на неки напон, без отпорника између, дешава следеће. Као што смо већ рекли, не постоје идеални елементи у стварности, па чак и кад су њихове отпорности јако мале, оне су ипак веће од нуле. Зато се заправо реално коло у оваквом случају понаша као већ описано RC коло, али са јако малом временском константом *RC*. Дакле, криве напона и струје ће бити приказаног експоненцијалног облика, али са изузетно стрмим нагибом одмах након затварања прекидача. На тај начин, график напона на кондензатору приближиће се по облику приказаном идеалном

53 Може се показати да за овакав импулс, иако је он бесконачно велике ”висине” (јачине) и бесконачно мале ”ширине” (трајања), важи да му је површина испод графика по времену, односно ”производ ширине и висине”, коначан. Заиста, површина испод графика јачине струје по времену представља количину протеклог наелектрисања, а у овом случају она је, као што је показано, коначна. Овакав апстрактан математички модел назива се *Дираков импулс*.

”степенику”. Са друге стране, график струје ће се по облику приближити импулсу чија ће ”висина” у $t = 0^+$ бити, као што смо показали, $I(t=0^+) = U_G/R$, па пошто је R јако мало, струја ће одмах по укључењу имати изузетно велику јачину, односно представљаће већ поменуту импулсну струју. Оваква појава може да доведе до прегоревања оног елемента у колу чији материјал не може да проведе толику струју.

Треба приметити да је след закључивања потпуно исти и за случај када је кондензатор пре затварања прекидача био оптерећен произвољним другим оптерећењем осим оним једнаким CU_G, односно напона различитог од U_G.[54] Коначно, исто важи и за кратак спој између прикључака оптерећеног кондензатора. Једина разлика биће у количини укупно протеклог наелектрисања.

Због тога се, дакле, овакво коло, у коме се на прикључке кондензатора нагло и без довољно велике отпорности у колу прикључује напон, у теорији сматра лоше дефинисаним, а у пракси се просто не ради (избегава). Треба такође приметити да то исто важи за прикључивање било ког елемента са таквим напоном, не обавезно генератора, већ рецимо и другог кондензатора различитог напона. На пример, неопрезним руковањем кондензаторима може се догодити да њихови прикључци дођу у контакт. Ово је посебно проблем код веома осетљивих електронских кола која могу да проводе само мале јачине струја и зато лако прегоревају у оваквим ситуацијама.[55]

Везе кондензатора и еквивалентна капацитивност

Размотрићемо сада два карактеристична начина везивања два или више кондензатора у *паралелну* и *редну везу* и израчунати *еквивалентне капацитивности* за те везе. Еквивалентном капацитивношћу неке везе (склопа) кондензатора сматра се капацитивност тзв. *еквивалентног* идеалног кондензатора. Еквивалентни кондензатор је онај идеални кондензатор који се може везати у било које коло уместо тог склопа кондензатора, тако да остатак кола ”не осети разлику”, или прецизније, тако да се *ниједна величина остатка кола* никако тиме не промени. Важно је напоменути да је овај услов неопходан за то да уопште можемо увести појам еквивалентне капацитивности, односно еквивалентног кондензатора – ако тај услов није задовољен, односно ако такав идеалан кондензатор не постоји, онда ни појам еквивалентне капацитивности није дефинисан нити примерен за дату везу.

Основне величине које су од значаја у теорији кола јесу јачина струје и напон. Да би екивалентирање везе више кондензатора једним идеалним кондензатором било могуће, довољно је да се те две величине подударају, јер је трећа, проток наелектрисања, величина која се изводи из јачине струје (и времена). Дакле, да би се нека веза кондензатора могла еквивалентирати једним идеалним кондензатором, потребно је (и довољно) да буду задовољена два услова:

1) Да за целу везу, као јединствен склоп са два ”спољашња” прикључка A и B којима се цео склоп повезује у коло, важи једначина континуитета са укупном струјом нула; ако се за референтне смерове тих струја за оба прикључка узме смер ка унутра, то значи да увек мора да важи:

$$i_A(t) + i_B(t) = 0$$

Ако је ово задовољено, можемо увести појам јединствене струје која пролази ”преко” прикључака (али не и између њих) и усмерена је од A према B:

$$i(t) = i_A(t) = - i_B(t)$$

Приметимо да је овај услов заправо увек задовољен за везе више кондензатора и других

54 Оставља се читаоцу да сам анализира наведени случај.

55 Зато је правило да се електронске компоненте не додирују прстима, јер човечија кожа, колико год да је мало наелектрисана, може бити на потенцијалу макар и мало различитом од потенцијала додирнутог елемента и тако изазвати кратку импулсну струју коју човек и не осети, али која уништава осетљив елемент.

идеалних елемената, јер ни на једном идеалном елементу (па ни на кондензатору као целини), према основном постулату теорије кола, нема "гомилања" наелектрисања, па онда то исто важи и за цео склоп.[56]

2) Да је јачина ове струје у сваком тренутку пропорционална брзини промене напона између прикључака у том тренутку. Ако (и само ако) је то задовољено, тај коефицијент пропорционалности представља управо еквивалентну капацитивност C_e:

$$i(t)=C_e\frac{\Delta u(t)}{\Delta t}\ ,\Delta t\rightarrow 0$$

Другим речима, за сваки тренутак t и интервал времена (t, $t+\Delta t$), $\Delta t\rightarrow 0$, величине промене напона и јачине струје треба да буду у следећој вези:

$$I=C_e\frac{\Delta U}{\Delta t}\ ,\Delta t\rightarrow 0,$$

а како је:

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}\ ,\Delta t\rightarrow 0,$$

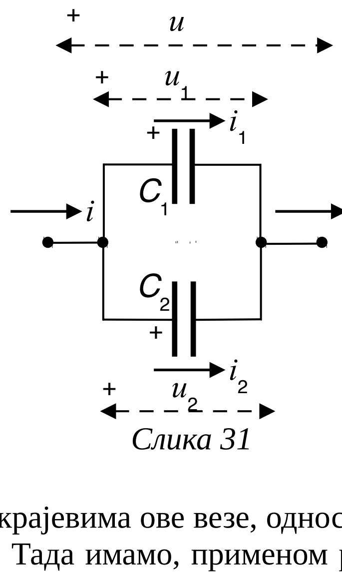
где је ΔQ количина наелектрисања протекла кроз референтни прикључак А у кондензатор (узећемо да је овај референтни прикључак +) за временски интервал Δt, следи да треба да буде, за сваки интервал Δt:

$$\Delta Q = C_e\,\Delta U$$

односно, да је количина наелектрисања која протекне кроз прикључке пропорционална промени напона између прикључака, за сваки интервал времена, са коефицијентом пропорционалности C_e.

Паралелна веза кондензатора

Посматрајмо паралелну везу два идеална кондензатора капацитивности C_1 и C_2 (слика 31). Нагласимо поново да са оваквим везивањем кондензатора треба бити опрезан, јер су при њиховом повезивању могуће импулсне струје: они се овако смеју везати (директно, без отпорника између) само ако су иницијално оптерећени на исти напон (или просто неоптерећени).



Слика 31

Претпоставимо да је на крајевима ове везе, односно између прикључака за целу везу, у неком тренутку неки напон U. Тада имамо, применом релација за идеалне кондензаторе и чворове:

56 Треба приметити да то не важи за делове кондензатора, јер се наелектрисање гомила на електродама, али је свеукупно идеални кондензатор увек неутралан ($+Q + (-Q) = 0$).

$U_1 = U_2 = U$
$Q_1 = C_1\, U_1 = C_1\, U$
$Q_2 = C_2\, U_2 = C_2\, U$

Нека се за неки временски интервал Δt напон између заједничких прикључака променио за ΔU. Тада су величине на крају овог интервала, односно у тренутку $t+\Delta t$, означене са ':

$U_1' = U_2' = U' = U + \Delta U$
$Q_1' = C_1\, U_1' = C_1\, U' = C_1\,(U + \Delta U) = C_1\, U + C_1\, \Delta U = Q_1 + \Delta Q_1$, где је $\Delta Q_1 = C_1\, \Delta U$
$Q_2' = C_2\, U_2' = C_2\, U' = C_2\,(U + \Delta U) = C_2\, U + C_2\, \Delta U = Q_2 + \Delta Q_2$, где је $\Delta Q_2 = C_2\, \Delta U$

Пошто су, према постулату за идеалан кондензатор, на сваком кондензатору наелектрисања на електродама увек исте апсолутне вредности, а супротног знака, закључујемо да су кроз оба заједничка прикључка протекле исте количине наелектрисања (само кроз један према унутра, а кроз други према споља), и то у укупној количини, према једначини континуитета за један прикључак:

$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = C_1\, \Delta U + C_2\, \Delta U = (C_1 + C_2)\Delta U$

Како је јачина струје количник количине протеклог наелектрисања и интервала времена $\Delta t \to 0$, следи да ће напон, количина протеклог наелектрисања, као и јачина струје за ову везу бити исте као и за идеалан кондензатор који има капацитивност:

$C_e = C_1 + C_2$

Тако смо једноставно показали да су оба услова за еквивалентирање задовољена и добили израз за еквивалентну капацитивност паралелне везе кондензатора. Треба нагласити да овај закључак важи *независно од тога како су кондензатори претходно били оптерећени*, јер се њихово евентуално претходно оптерећење, какво год да је било, ”прерасподелило” на њихове електроде да би се успоставио исти напон U.[57]

Интересантно је запазити да су наелектрисања замишљених ”електрода” ове паралелне везе, које заједно чине парови међусобно спојених електрода појединачних кондензатора, односно прикључци ове везе кондензатора, опет подједнако наелектрисани количином наелектрисања $+(Q_1 + Q_2)$ и $-(Q_1 + Q_2)$, за сваки напон U.

Истим поступком можемо добити и израз за еквивалентну капацитивност произвољног броја N паралелно везаних кондензатора:

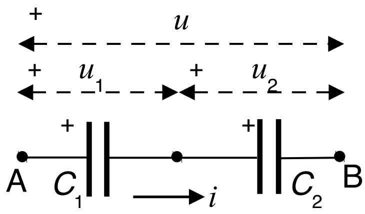
$C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$

Дакле, закључујемо да паралелна веза идеалних кондензатора *увек има еквивалентну капацитивност* која је једнака збиру капацитивности појединачних кондензатора.

Редна веза кондензатора

Посматрајмо сада редну везу два идеална кондензатора капацитивности C_1 и C_2 (слика 32), са референтним смеровима усмереним на исти начин, као на слици. Нека су њихова оптерећења пре везивања у ову редну везу била редом Q_1^0 *и* Q_2^0.

57 Понављамо, у том поступку прерасподељивања може доћи до импулсне струје уколико нема довољне отпорности.



Слика 32

Посматрајмо једну затворену површ која пролази између електрода сваког кондензатора, а обухвата само по једну електроду сваког кондензатора, и то оне две електроде које имају заједнички прикључак, и њихов заједнички прикључак (и не обухвата ништа више осим тога). Како, према постулату о идеалном кондензатору, између електрода (кроз његов диелектрик) никада нема струје, следи да унутар ове затворене површине неће бити промене количине наелектрисања. Како су, према другом постулату за идеалан кондензатор, наелектрисања на електродама кондензатора исте апсолутне вредности, само супротног знака, следи да ће за оптерећења ових кондензатора Q_1 и Q_2 у сваком тренутку важити релација:

$$- Q_1 + Q_2 = - Q_1^0 + Q_2^0 = - Q^0$$

где смо са Q^0 означили разлику првобитних оптерећења ова два кондензатора:

$$Q^0 = Q_1^0 - Q_2^0$$

Како за сваки од кондензатора увек важи:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

следи да ће напон између спољашњих прикључака целе везе бити:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Добијамо тако систем релација:

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \qquad (1)$$

$$-Q_1 + Q_2 = -Q^0 \qquad (2)$$

Нека се сада за неки временски интервал Δt напон између спољашњих прикључака променио за ΔU. Тада су величине на крају овог интервала, односно у тренутку $t+\Delta t$, означене са ':

$$U' = U + \Delta U \qquad (3)$$

$$U' = \frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} \qquad (4)$$

$$-Q_1' + Q_2' = - Q^0 \qquad (5)$$

Наелектрисање које је протекло кроз леви спољашњи прикључак A је тако (у референтном смеру ка унутра):

$$\Delta Q_A = Q_1' - Q_1$$

док је наелектрисање које је протекло кроз десни спољашњи прикључак B тако (у референтном смеру ка унутра):

$\Delta Q_B = -(Q_2' - Q_2)$

одузимањем једначине (2) од једначине (5) добијамо:

$Q_2' - Q_2 - (Q_1' - Q_1) = 0$

односно:

$Q_2' - Q_2 = Q_1' - Q_1$

Одатле следи:

$\Delta Q_B = -(Q_2' - Q_2) = -(Q_1' - Q_1) = -\Delta Q_A$

чиме смо доказали да за ову везу, као целину, важи једначина континуитета, односно да важи први услов за еквивалентирање. Ово смо могли да закључимо и интуитивно: ако је на електроду А дотекло наелектрисање ΔQ_A, исто толико наелектрисање је морало да ”отекне” са друге електроде првог кондензатора, због постулата о свеукупној неутралности кондензатора. То наелектрисање, пак, није имало нигде другде да ”оде”, него на леву електроду другог кондензатора. Поново, по истом постулату за иделане кондензаторе, исто толико наелектрисање је морало да ”оде” са десне спољашње електроде В. Треба ипак приметити да сада, за разлику од паралелне везе кондензатора, ”спољашње” електроде, односно прикључци, нису више обавезно наелектрисани наелектрисањем истих апсолутних вредности, као што је то случај код идеалног кондензатора.

Да проверимо сада и други услов еквивалентирања. Већ смо показали да је:

$Q_1' = Q_1 + \Delta Q,$
$Q_2' = Q_2 + \Delta Q,$

где је $\Delta Q = \Delta Q_A = -\Delta Q_B$ наелектрисање протекло кроз прикључке. Из ових, као и из једначина (1), (3) и (4) можемо добити:

$$U' = U + \Delta U = U_1' + U_2' = \frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_1 + \Delta Q}{C_1} + \frac{Q_2 + \Delta Q}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{\Delta Q}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{\Delta Q}{C_2} =$$
$$\left(\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}\right) + \frac{\Delta Q}{C_1} + \frac{\Delta Q}{C_2} = U + \Delta Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

Тако добијамо да је:

$$\Delta U = \Delta Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

односно:

$\Delta Q = C_e \Delta U$

где је:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Добили смо израз за еквивалентну капацитивност редне везе два идеална кондензатора. Поново, као и малопре, *она не зависи од претходне оптерећености кондензатора*.

Истим поступком можемо добити и израз за еквивалентну капацитивност произвољног броја N редно везаних кондензатора:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

Израчунајмо још и напоне на кондензаторима C_1 и C_2. Поновимо једначине које имамо:

$$U=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2} \qquad (1)$$

$$-Q_1 + Q_2 = - Q^0 \qquad (2)$$

Ако решимо овај систем једначина по Q_1 и Q_2, добијамо:

$$U=Q_1\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)-\frac{Q^0}{C_2}$$

односно:

$$Q_1=C_e\left(U+\frac{Q^0}{C_2}\right)$$

$$Q_2=C_e\left(U-\frac{Q^0}{C_1}\right)$$

а напони:

$$U_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{C_e}{C_1}\left(U+\frac{Q^0}{C_2}\right)$$

$$U_2=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{C_e}{C_2}\left(U-\frac{Q^0}{C_1}\right)$$

Као што се види, и како смо раније већ и показали, напоне и оптерећења кондензатора *не можемо одредити* без познавања претходне (почетне) разлике оптерећења ова два кондензатора, ако су они различитих капацитивности. Ако (и само ако) је та разлика била нула ($Q^0 = Q_1^0 - Q_2^0$), односно ако су они били исто оптерећени (или неоптерећени), добијамо да су наелектрисања и напони:

$$Q_1 = C_e U$$

$$Q_2 = C_e U$$

$$U_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{C_e}{C_1}U$$

$$U_2=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{C_e}{C_2}U$$

тако да је само тада:

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{C_2}{C_1}$$

Према томе, у овом и само у овом случају, када је разлика почетних оптерећења кондензатора различитих капацитивности била нула, кондензатори ће имати *исто оптерећење* у редној вези, док ће однос напона на њима бити обнут односу њихових капацитивности. Иако ово јесте често случај, јер су кондензатори у вези често на почетку били неоптерећени, као што смо показали, то не мора у општем случају бити тако. Ако су кондензатори различитих капацитивности иницилајно били оптерећени различитим наелектрисањем, и у редној вези ће такође бити различито оптерећени, па ће ”спољашње” електроде целог склопа (редне везе) бити наелектрисане различитим количинама наелектрисања. У том смислу, такав склоп се не понаша исто као и идеалан кондензатор, али то није од утицаја на остале величине кола (струје и напоне) и свеукупну неутралност склопа као целине.

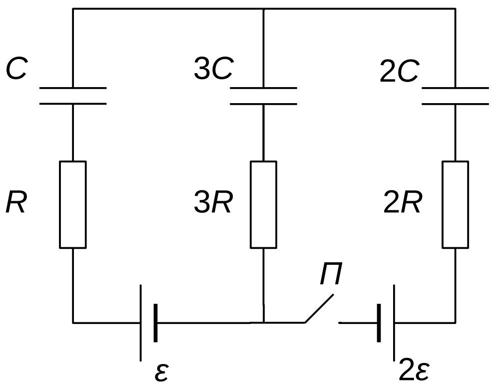
Примери

Дошли смо коначно и до приче са почетка овог текста. Размотрићемо сада два примера проблема са кондензаторима, при чему су оба примера била постављена као задаци на такмичењима из физике високог ранга.

Пример 1

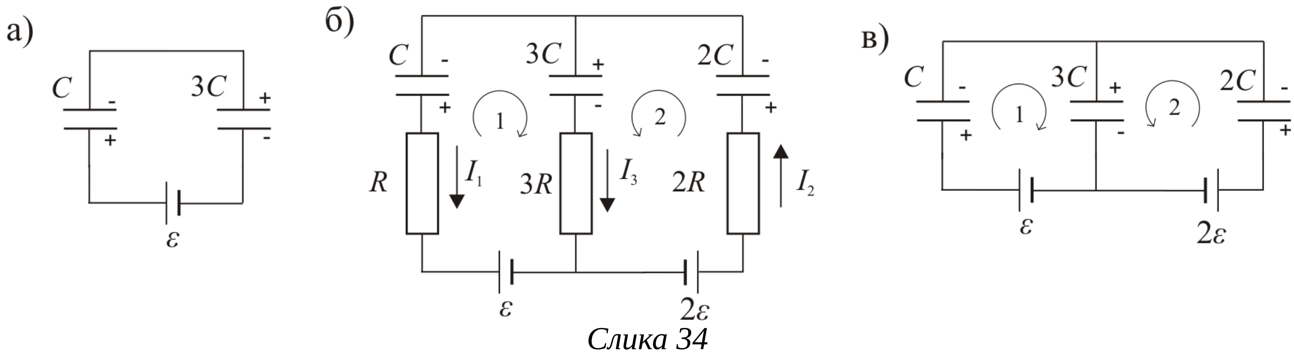
Поново ћемо размотрити задатак са самог почетка овог текста. У наставку је поновљена његова поставка, као и званично решење комисије са такмичења.

У колу приказаном на слици 33 одредити:
а) напон на кондензатору капацитета C *након успостављања равнотеже, а пре затварања прекидача П,*
б) струју I_3 *која потекне кроз отпорник отпорности* $3R$ *одмах после затварања прекидача П и*
в) напон на кондензатору капацитета C *после затварања прекидача и успостављања равнотеже.*
Напомена: Одмах након затварања прекидача кондензатори се понашају као извори струје чија је ЕМС једнака напону на кондензатору пре затварања прекидача, а поларитет им одговара знаку наелектрисања на плочама.



Слика 33

Званично решење комисије гласи дословце овако:



Слика 34

а) Еквивалентна шема за први случај је приказана на слици 34а. Одавде се види да је:

$\varepsilon = U_\mathrm{C} + U_\mathrm{3C}$ *, тј.*

$\varepsilon = \dfrac{q}{C} + \dfrac{q}{3C} = \dfrac{4q}{3C}$ *, па се добија:*

$U_{\mathrm{C}} = \frac{3}{4}\varepsilon$.

б) Примена Кирхофових правила: $I_3 + I_1 = I_2$.

Прва контура:

$\varepsilon - U_{\mathrm{C}} - U_{3\mathrm{C}} = 3I_3R - I_1R$ *, пошто је још увек* $\varepsilon = U_{\mathrm{C}} + U_{3\mathrm{C}}$ *, добија се* $3I_3 = I_1$.

Друга контура:

$2\varepsilon - U_{2\mathrm{C}} - U_{3\mathrm{C}} = 3I_3R + 2I_2R$ *, пошто је* $U_{2\mathrm{C}}=0$, $3I_3R + 2I_2R = \frac{7\varepsilon}{4}$.

Пошто је $I_2 = 4I_3$ *, добија се* $I_3 = \frac{7\varepsilon}{44R}$.

в) Укупна количина наелектрисања је $q_1 + q_2 = q_3$ *, за контуру један важи:*

$$\varepsilon=\frac{q_1}{C}+\frac{q_3}{3C} ,$$

а за контуру два:

$$2\varepsilon = \frac{q_2}{2C} + \frac{q_3}{3C} ,$$

$$q_1 = \frac{C\varepsilon}{6} , \ U_1=\frac{q_1}{C}=\frac{1}{6}\varepsilon .$$

Након свега што је до сада речено, можемо дати следеће коментаре на поставку и приказано решење:

- Део објашњења о ”понашању кондензатора након затварања прекидача” који гласи: ”*кондензатори се понашају као извори струје*”, као што смо већ напоменули, терминолошки није сасвим коректан. Наиме, ”извором струје” је примереније назвати идеалан елемент који се у теорији кола назива *идеалним струјним генератором*, и за који важи да је јачина струје кроз њега увек позната функција, независна од напона између његових прикључака. Овде је примереније рећи ”идеални напонски генератор”.
- Цела формулација допунског објашњења о ”понашању кондензатора након затварања прекидача” је помало неспретна и формално некоректна, јер се кондензатори ”не понашају” као напонски генератори. Јасно је да је састављач задатка желео да помогне ученицима у решавању задатка, па им је сугерисао како да посматрају коло за тренутак $t = 0^+$ након затварања прекидача. То није баш лако извести, као што смо видели, али се надамо да је цела прича сада сасвим јасна. Заправо, овај задатак *није ни примерено дати* уколико цела ова прича није у потпуности испричана. Или, можда је било исправније рећи просто: ”Напони на кондензаторима одмах након укључења прекидача исти су као и напони на њима непосредно пре тог укључења.” Тиме би се постигло исто, а формулација би била сасвим исправна.
- Као што смо већ показали, задатак под а) *не можемо* решити без познавања претходних оптерећења ових кондензатора. Ако и само ако су ти кондензатори били неоптерећени пре укључења у ово коло, важе закључци из званичног решења. Очигледно је састављач задатка ово подразумевао, али то треба нагласити, јер се не подразумева!
- Сасвим слично, напон на кондензатору $2C$ пре затварања прекидача, па самим и тим и у тренутку $t = 0^+$, *није могиће одредити* без податка о његовој оптерећености. Ако и само ако је он неоптерећен, напон на њему биће нула, како је претпостављено у задатку.

Све у свему, највећа примедба на овај задатак јесте што *није непосредно наглашено да су сви кондензатори у колу били неоптерећени* пре укључивања у коло. Ово заправо уопште не мора да важи, па се *не подразумева*. Као што смо већ наговестили на почетку, замислимо да је коло сада у равнотежном (стационарном) стању које је последње у овом задатку (са затвореним прекидачем, слика в). Отворимо сада прекидач *П* и сачекајмо да се коло поново ”смири”, односно пређе поново у стационарно стање (стање ”равнотеже”). То ће бити стање са почетка задатка, односно стање отвореног прекидача са слике а. Који је напон на овом кондензатору $2C$ сада?

Оставља се читаоцу да сам реши овај задатак.

Пример 2

Званична поставка овог задатка на такмичењу гласила је овако:

На располагању вам стоје извор електромоторне силе $\varepsilon = 1V$, *као и два празна кондензатора капацитета* $C_1 = 2\mu F$ *и* $C_2 = 3\mu F$. *Колики је највећи напон који се може добити комбиновањем ова три елемента? При томе можете произвољан број пута пунити и празнити кондензаторе, везивати их на све могуће начине, другим речима, све је дозвољено!*

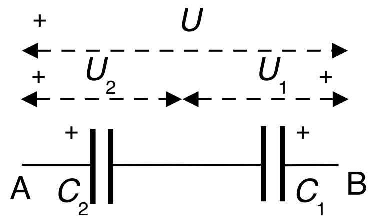
Нећемо више посебно коментарисати терминолошки проблем са изразом ”капацитет кондензатора”. Такође, скрећемо пажњу и на проблем идеје икаквог везивања кондензатора непосредно на генератор напона, или чак један на други, без отпорника, које, као што смо објаснили, доводи до прелазног режима који је теоријски недефинисан, а практично веома лош због појаве импулсних струја и могућег прегоревања неког елемента. Ограничићемо се само на решење овог задатка које, у облику у коме је званично дато, може бити прилично неразумљиво, уколико није сасвим јасно све оно што је до сада речено, посебно у претходном поглављу о редној вези кондензатора.

Идеја која је описана у решењу је позната и заиста се може користити за постепено (каскадно) повећање напона. Суштина идеје јесте следећа: ако два оптерећена кондензатора вежемо редно, али тако да спојимо њихове негативно наелектрисане прикључке, напон између спољашњих прикључака биће једнак разлици (апсолутних вредности) појединачних вредности напона на та два кондензатора. Због тога се та редна веза кондензатори може прикључити на дати генератор напона (али обавезно преко отпорника, због импулсних струја!), чији је напон већи од те разлике, али може бити мањи од напона сваког појединачног кондензатора. Тада ће се та разлика још мало повећати, тако да буде једнака напону генератора. Ако се тиме напон на једном од кондензатора повећао, добили смо укупно мало већи збир (апсолутних вредности) напона на појединачним кондензаторима. Наравно, овај поступак можемо понављати и њиме повећавати напон на кондензатору само док је напон на крајевима такве редне везе мањи од напона генератора.

Цео поступак који је описан у решењу овог задатка тече по корацима овако:

1. Најпре су оба кондензатора појединачно напуњена везивањем сваког на генератор напона (преко отпорника!). Тада се на њима, након успостављања стационарног режима, добијају напони једнаки напону генератора и одговарајућа оптерећења:

   $U_1 = \varepsilon = 1$ V
   $U_2 = \varepsilon = 1$ V
   $Q_1 = C_1U_1 = 2$ μC
   $Q_2 = C_2U_2 = 3$ μC



Слика 35

2. Сада вежемо ова два кондензатора редно, без везивања на генератор, али тако да су њихови негативно наелектрисани прикључци спојени, као на слици 35. Прикључак А, који је везан за позитивно наелектрисану електроду кондензатора C_2, узмимо као референтно позитиван. Како кроз спољашње прикључке А и В не може протицати струја, пошто су они отворени, оптерећења, па тиме и напони сваког кондензатора остаће исти, док ће напон између спољашњих прикључака А и В бити сада:

   $U_{AB} = U_2 - U_1 = 0$

3. Ако сада вежемо ову редну везу на генератор (опет преко отпорника), тако да позитиван прикључак генератора вежемо на прикључак А редне везе кондензатора, након успостављања стационарног стања, напон између спољашњих прикључака А и В биће сада једнак напону генератора $U_{AB} = \varepsilon = 1$ V. Као што смо показали у претходном поглављу, ако се напон између спољашњих прикључака редно везаних кондензатора променио за ΔU, онда ће кроз прикључке протећи наелектрисање $\Delta Q = C_e \Delta U$, где је C_e еквивалентна капацитивност редне везе кондензатора, и то *независно од претходног оптерећења појединачних кондензатора.*[58] Овде је:

   $\Delta U = \varepsilon = 1$ V

   $$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

   $\Delta Q = C_e \Delta U$

   Одавде следи да је:

   $$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1{,}2\,\mu F$$

   $\Delta Q = C_e \Delta U = 1{,}2\ \mu\text{C}$

   Дакле, кроз прикључак А је ”дотекла” количина наелектрисања ΔQ. Иста та количина наелектрисања је ”отекла” са негативног прикључка кондензатора C_2, али такође и дотекла на негативан прикључак кондензатора C_1. Наравно, иста та количина наелектрисања је отекла и са позитивног прикључка кондензатора C_1. Према томе, оптерећење кондензатора C_2 се повећало за ΔQ, док се апсолутна вредност оптерећења другог кондензатора за толико смањила. Зато ће се напон на кондензатору C_2 повећати за:

   $$\Delta U_2 = \frac{\Delta Q}{C_2} = \frac{1{,}2\,\mu\text{C}}{3\,\mu\text{F}} = 0{,}4\,\text{V}$$

   односно постати:

   $U_2 = 1{,}4$ V

4. Сада развежемо кондензаторе, а други кондензатор, на коме се напон смањио,

58 Треба приметити да то што је референтни смер другог кондензатора обрнут нема утицаја. Само ће вредности оптерећења и напона тог кондензатора имати обрнут знак, али сви ранији закључци важе.

допунимо генератором поново на напон $\varepsilon = 1$ V.

5. Сада поновимо исти поступак описан у корацима 2, 3 и 4: вежимо најпре кондензаторе у редну везу (нећемо више понављати да је увек потребан отпорник!) на исти начин (спојени својим негативним крајевима као на слици), па ће напон на њиховим спољашњим прикључцима бити:

   $U_{AB} = U_2 - U_1 = 1{,}4\ \text{V} – 1\ \text{V} = 0{,}4\ \text{V}$

   Када на спољашње прикључке поново вежемо генератор на исти начин као и раније, кроз кондензаторе ће протећи наелектрисање:

   $\Delta Q = C_e \Delta U = 1{,}2\ \mu\text{F} \cdot 0{,}6\ \text{V} = 0{,}72\ \mu\text{C}$

   док ће напон на кондензатору C_2 бити:

   $U_2 = 1{,}4\ \text{V} + \Delta U_2 = 1{,}4\ \text{V} + \Delta Q/C_2 = 1{,}4\ \text{V} + 0{,}72\ \mu\text{C} / 3\ \mu\text{F} = 1{,}64\ \text{V}$

Очигледно је да смо напон на кондензатору C_2 повећали на вредност већу од напона генератора, па овај поступак можемо понављати. Поставимо опште релације за једну итерацију овог понављања. На почетку итерације имамо напоне на кондензаторима $U_1 = \varepsilon = 1$ V (јер је напуњен помоћу генератора) и U_2 (напуњен на вредност у претходној итерацији). На крају једне итерације имаћемо:

$$\Delta Q = C_e \Delta U = C_e(\varepsilon - U_2 + U_1) = C_e(\varepsilon - U_2 + \varepsilon) = C_e(2\varepsilon - U_2)$$

$$U_2' = U_2 + \Delta U_2 = U_2 + \frac{\Delta Q}{C_2} = U_2 + \frac{C_e}{C_2}(2\varepsilon - U_2)$$

односно:

$$U_2' = 2\frac{C_e}{C_2}\varepsilon + \left(1 - \frac{C_e}{C_2}\right)U_2$$

Како је:

$$1 - \frac{C_e}{C_2} = 1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} > 0,$$

$$2\frac{C_e}{C_2}\varepsilon = 2\varepsilon\frac{C_1}{C_1 + C_2} > 0,$$

следи да ћемо напон на кондензатору C_2 овим поступком стално повећавати. Заменом конкретних вредности добијамо рекурентну формулу:

$$U_2' = U_2[n+1] = 0{,}8\ \text{V} + 0{,}6\ U_2[n]$$

где смо са n означили редни број итерације (понављања), са $U_2[n]$ напон на кондензатору C_2 у тој итерацији.

Докле можемо ово понављати, односно докле овај напон можемо овако повећавати? Наравно, само дотле док је напон генератора већи од напона или једнак напону редне везе кондензатора, односно, док је:

$$U_2 - U_1 = U_2 – \varepsilon \le \varepsilon,$$

односно док је

$$U_2 \le 2\varepsilon = 2\ \text{V}$$

На почетку је, као што смо видели, $U_1 = U_2[0] = \varepsilon = 1$ V.

Добијена једначина за U_2 је *диференцна* једначина, па се може решити или посебном техником, или нумерички (понављањем израчунавања, нпр. уз помоћ једноставног рачунарског програма, што се оставља читаоцу). У овом случају, њено решење је:

$$U_2[n] = (2 – 0{,}6^n)\ \text{V},\quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

где је n број итерације. Као што се види, вредност коју добијамо овим поступком за U_2 се бесконачно *приближава* вредности 2 V, када n тежи бесконачности, али је *никада* не достиже (већ јој асимптотски тежи)! Другим речима, неограниченим понављањем наведеног поступка можемо се произвољно приближити вредности од 2 V, али је *никада не можемо тачно достићи* (нити је пребацити), баш као што ни стационарну вредност не можемо постићи у прелазном режиму, већ јој се само неограничено приближити. На пример, првих десетак вредности за U_2 (у волтима) су: 1; 1,4; 1,64; 1,784; 1,8704; 1,92224; 1,953344; 1,9720064; 1,98320384; 1,989922304; 1,9939533824 итд.

Ово се може интуитивно разумети на следећи начин. Напон на који можемо напунити редну везу кондензатора јесте напон генератора од 1 V. Ако је кондензатор C_1 већ сам напуњен на тај напон, описаним начином везивања добијамо да је разлика апсолутних вредности напона на ова два кондензатора једнака напону генератора, односно $U_2 - U_1 = 1$ V, што значи да напон на кондензатору C_2 свакако не може бити већи од 2 V. Ако је кондензатор C_2 пре везивања на ред и прикључивања на генератор напуњен на неки напон макар и само мало мањи од 2 V, а на почетку то свакако јесте (јер је напуњен на 1 V), онда ће се он оваквим везивањем и прикључивањем редне везе на генератор макар мало допунити неким оптерећењем ΔQ. Као што смо видели, за исто толико ће бити смањено оптерећење кондензатора C_1, па ће његов напон мало пасти испод 1 V. Како је разлика напона на ова два кондензатора увек иста и једнака напону генератора $U_2 - U_1 = 1$ V, па како U_1 мало падне испод вредности од 1 V, следи да ни напон U_2 не може бити тачно 2 V, већ за толико мањи. Према томе, тај напон од 2 V не можемо *никада постићи* на кондензатору C_2 (иако му се можемо произвољно приближити).

На крају, ако претпоставимо да смо постигли вредност напона U_2 произвољно блиску вредности 2 V, можемо урадити још један корак: повезати оба кондензатора (поново преко отпорника) паралелно, односно у коло спојити њихове позитивне крајеве са једне и негативне са друге стране. Тада ће се, након прелазног режима, напони на кондензаторима изједначити, док ће укупно оптерећење остати исто (2 μC + 6 μC = 8 μC), па ће напон на кондензаторима бити:

$$U = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{8\,\mu\mathrm{C}}{5\,\mu\mathrm{F}} = 1{,}6\ \mathrm{V}$$

Коначно, редним везивањем напонског генератора и ова два кондензатора, добија се укупан напон од 1 V + 1,6 V + 1,6 V = 4,2 V, што је и коначно, тражено решење задатка.

Оставља се читаоцу да сам размотри случај у ком би се уместо кондензатора C_2 користио кондензатор C_1, односно ова два кондензатора заменила своје улоге у поступку, и да сам закључи зашто је за стално подизање напона до асимптотске вредности од 2 V одабран баш кондензатор веће капацитивности C_2, док је за допуњавање на напон генератора изабран онај мање капацитивности C_1.

На крају морамо приметити да је, бар по мишљењу аутора овог текста, овај задатак потпуно непримерен за ученике основних и средњих школа, не само у смислу идеје коју је демонстрирао и у смислу комплексности решења, за које је неопходно знати све што је овде изнесено, него и због извесне теоријске некоректности решења, као што је овде показано. Наиме, у званичном решењу је, без икаквог образложења, закључено да се напон од 2 V на кондензатору C_2 може постићи, и то можда и у коначном броју итерација (али наравно, не може пребацити), иако није наведено у колико итерација. Као што је показано, може се јасно закључити да се, понављањем описаног поступка, овај напон стално повећава (како се то у математици каже, он је монотоно растући). Међутим, само из тога се *не може* закључити да он може достићи *било коју* вредност, као што је у решењу без образложења закључено, јер он просто може бити ограничен, па тиме само имати граничну (асимптотску) вредност којој тежи, а која се не може достићи. Управо то и јесте овде био случај.

Закључак

Аутор се нада да је овај текст испунио свој циљ, односно да је ђацима, посебно онима који се такмиче из физике, али и њиховим наставницима, помогао и разјаснио многе нејасноће и неодумице из области којом се бавио. Аутор се такође нада да ће проблема у решавању сложенијих задатака са електричним колима, посебно са кондензаторима, бити много мање, јер је показан општи, аксиоматски приступ овој проблематици, у ком не би смело да буде непознаница.

Осим тога, овим је упућен и позив састављачима задатака на такмичењима из физике да коригују свој приступ у састављању задатака и решења, али и да исправе неке грешке на које је овде указано. Посебно се скреће пажња на пропуст у смислу изостанка података о иницијалном оптерећењу кондензатора који су у многим случајевима неопходни, јер решење задатка зависи од њих. Евентуална аргументација да се увек подразумева да су кондензатори неоптерећени, осим ако се другачије не нагласи, једноставно није ваљана. Прво, то се *не* подразумева у електротехници, а овде је указано и на примере да то може лако бити другачије. Друго, постоје случајеви, као што је показано, када тражене величине кола не зависе од претходног оптерећења кондензатора, односно предисторије њиховог укључивања у коло. У таквим случајевима податак о иницијалном оптерећењу кондензатора није потребан. Било би заиста превише очекивати од ђака да добро и увек без проблема разликују ситуације у којима решење задатка зависи или не зависи од тог податка, па када зависи, да сами уведу претпоставку о њиховој иницијалној неоптерећености. На пример, некада такво почетно оптерећење може бити одређена и ненулта, али непозната величина коју треба израчунати током решавања задатка. И коначно, оваква напомена, рецимо да су кондензатори иницијално неоптерећени, никада није на одмет и није нимало мање важна од, рецимо, аналогне претпоставке о ”лаким и неистегљивим нитима” које повезују тела, а која се увек доследно (и потпуно исправно) наглашава у задацима из механике. Да подсетимо зашто је ова поменута претпоставка уопште битна:

- претпоставка о неистегљивости нити имплицира да су, под условом да је нит затегнута, брзине, па тиме и убрзања, тела везаних за њене крајеве једнаке; у супротном, оне не морају да буду једнаке, па би проблеми постали знатно компликованији;
- претпоставка о ”лаким” нитима значи следеће: ако (и само ако) постоји (ненулто) убрзање (затегнуте) нити (тј. тела везаних за њене крајеве), разлика између сила које затежу дату нит са њена два краја није нула, па се те силе разликују, јер, по Другом Њутновом закону, та разлика узрокује убрзање саме нити:

  $$F_1 - F_2 = ma$$

  где је m маса, а a убрзање нити. Међутим, ако и само ако се претпостави да је маса нити сасвим занемарљива, следи да је и разлика затезних сила исто тако занемарљива, *без обзира на убрзање нити*, односно уводи се претпоставка да су те силе (приближно) једнаке, тј. да нит ”преноси силу затезања са краја на крај”, чак и када се креће убрзано.

Као што се види, лака и неистегљива нит је поново апстракција која помаже тако што поједностављује решавање проблема у механици, баш као што и идеални кондензатор то чини у теорији електричних кола. На потпуно исти начин овакви задаци заслужују да се нагласи претпоставка о иницијалном оптерећењу кондензатора.

Захвалнице

Захваљујем професорки Вишњи Јовановић, наставници физике у Математичкој гимназији у Београду, на сарадњи током израде овог текста, а посебно на томе што ми је указала на други пример задатка са такмичења. Захваљујем др Дејану Тошићу, редовном професору на Катедри за општу електротехнику Електротехничог факултета Универзитета у Београду, на прегледу овог текста. Посебну захвалност дугујем академику др Антонију Ђорђевићу, редовном професору на Катедри за општу електротехнику Електротехничог факултета Универзитета у Београду, на разјашњењу неколико фундаменталних и осетљивих теоријских детаља.

Литература

1. Антоније Ђорђевић, ”Основи електротехнике: Електростатика”, Електротехнички факултет у Београду, 2012.
2. Антоније Ђорђевић, ”Електромагнетика”, Електротехнички факултет у Београду, 2012.
3. Wikipedia, www.wikipedia.org